Math. A. 205 ed -1-

Redtenbacher

21/XII

Bayerische Staatsbibliothek
<3665664256001 5

DER
MASCHINENBAU

VON

F. REDTENBACHER,

Doctor der Philosophie, Grossh. Badischer Hofrath, Commandeur des Ordens vom Zähringer Löwen, Ritter des St. Olafs- und des St. Stanislausordens II. Klasse, Direktor der Grossh. polytechnischen Schule und Professor des Maschinenbaues in Karlsruhe.

Erster Band.

Mit XXX lithographirten Tafeln.

(Der Verfasser behält sich das Recht der Uebersetzung dieses Werkes vor.)

MANNHEIM.
Verlagsbuchhandlung von *Friedrich Bassermann.*

1862.

88 - D.

Buchdruckerei von MALSCH & VOGEL in Karlsruhe.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.
Bayerische Staatsbibliothek München

DER
MASCHINENBAU.

Vorrede.

Das vorliegende Buch ist der erste Band eines Werkes, das in drei Bänden das Wesentliche der Vorträge des Verfassers über Maschinenbau an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe zu geben bestimmt ist. Der zweite Band wird im Laufe des nächsten 1862/63, der dritte im Laufe des zweit folgenden Jahres 1863/64 erscheinen.

Dieses Werk bildet für die Eleven der hiesigen polytechnischen Schule, welche sich dem Ingenieur- oder Maschinenfach widmen, die Brücke zwischen zwei Werken, welche ich schon vor vielen Jahren herausgegeben habe, die Brücke, welche von meinen Prinzipien der Mechanik und des Maschinenbaues zu den Resultaten für den Maschinenbau führt, d. h. das vorliegende Werk, das ich kurz den Maschinenbau nenne, ist im Wesentlichen die Herleitung der Resultate aus den Prinzipien, worin vorzugsweise die durch die Vorträge zu lösende Aufgabe besteht.

Die Prinzipien sind so zu sagen ein allgemeiner Formalismus, durch welchen ausgesprochen ist, worin das Wesen jeder Maschine besteht, wie die Bewegungen und Thätigkeiten jeder Maschine bestehen, welchen Bedingungen jede Maschine zu entsprechen hat, wie diese Bedingungen ausfindig gemacht werden können, welcher Ideengang zu verfolgen ist, um einen Entwurf zu einer Maschine und die Ausführung derselben zu Stande zu

bringen. Mit einem Worte: die Prinzipien bemühen sich alles dasjenige auszusprechen und zu lehren, was für das Verständniss, für den Entwurf und für die Ausführung der Maschine im Allgemeinen zu wissen nothwendig ist, oder jene Prinzipien sind die allgemeine Maschinenlehre, die in dem Vortrag des Verfassers im ersten Kursus in ungefähr drei Monaten behandelt wird.

Das Werk, von welchem das vorliegende Buch den ersten Band bildet und das ich kurzweg den Maschinenbau nenne, ist bestimmt, alle Spezialitäten zu lehren, die zur praktischen Verwirklichung der allgemeinen Prinzipien zu wissen nothwendig sind, und behandelt eine Reihe der wichtigsten speziellen Kraft- und Arbeitsmaschinen.

Der „Maschinenbau" gibt nicht vollständig den Inhalt der Vorträge, indem eine vollständige Darstellung derselben zu weitläufig wäre. Es ist in diesem Buch von dem Inhalt der Vorträge alles dasjenige weggelassen, was durch das aufmerksame Anhören der Vorträge ohne nachträgliches Studium und Wiederholungen verstanden werden kann und im Gedächtniss bleibt, was der Schüler gar nicht schwarz auf weiss gedruckt oder geschrieben zu besitzen braucht, um es als geistiges Eigenthum aus dem Hörsaal mit fortzutragen. Zu diesem Theil des Inhalts der Vorträge gehört: 1) die Beschreibung von Maschinen und Apparaten, die in den Vorträgen durch Modelle und durch eine grosse Anzahl von in grossem Maassstabe ausgeführten illuminirten Zeichnungen gegeben wird; 2) ein grosser Theil der Lehren von der praktischen Ausführung der Maschinen, die man auch nur einmal aussprechen gehört zu haben braucht, um sie für alle Zeiten zu kennen und im Gedächtniss zu behalten; 3) alles dasjenige, was man durchaus entstehen und entwickeln sehen muss, um es verstehen zu können. Es gibt sehr viele Dinge, die sehr leicht verständlich zu machen sind, wenn man sie vor dem Auge des Zuhörers vermittelst Zeichnungen entstehen lässt, die sich aber ungemein schwer schriftlich

erklären lassen, weil die schriftliche Verfolgung ungemein weitläufig ist und von Niemand gelesen wird.

Für Jemand, der die Vorträge nicht gehört hat, wird daher das Buch keineswegs den Inhalt derselben vollständig ersetzen, weil in den Vorträgen sehr viel gesagt, gethan und gezeigt wird, was das Buch nicht enthält. Insbesondere wird das Buch bei Jemand, der die Vorträge nicht besucht hat, die Meinung erwecken, dass dieselben vorherrschend theoretisch seien und dass die praktische Seite des Faches nur wenig beachtet wird.

Das Buch gibt auch den Vortrag in der Hinsicht nicht getreu, insofern im Buch nur selten construktive Darstellungen der Gegenstände vorkommen, sondern meistens nur theoretische Figuren, während in den Vorträgen die construktive Darstellung theils durch Modelle, theils durch Wandtafelzeichnungen in grösserem Maassstabe, theils durch Kreidezeichnungen, die während der Vorträge an der Tafel ausgeführt werden, erläutert wird. Ein Werk, das die Vorträge vollständig und identisch zu geben beabsichtigte, würde einen unverhältnissmässigen Umfang einnehmen, sehr kostspielig sein und beim Studiren durch seine Weitläufigkeit so sehr ermüden, dass man sich nicht leicht entschliessen würde, es durchzuarbeiten. Ein Grund, weshalb ich grösstentheils nur theoretische und keine construktive Darstellungen mache, ist auch der, weil bereits in den Resultaten, die jeder meiner Schüler in Händen hat, die Maschinendetails beinahe vollständig und korrekt construktiv dargestellt sind, es sich also in jeder einzelnen durchzuführenden Construction doch nur darum handelt, dass man die construktiven Gedanken genau kennt.

Die technischen Werke würden nach meiner Ansicht wenigstens für den Lehrzweck meistens viel brauchbarer sein, wenn sie solche Zeichnungen machten, die nur die Gedanken darstellen, welche man zu erklären hat, und diese treten viel deutlicher und verständlicher hervor, wenn man alle construktiven Details weglässt und über-

haupt nur das darstellt, was der Construkteur vor Augen haben muss, wenn er die Durchführung eines construktiven Gedankens beginnen will. Aus diesem Grunde sind vollständige Maschinen in der Regel nur nach ihren construktiven Grundgedanken mit Hinweglassung aller Details dargestellt. Wenn man einmal an das Studium vollständiger Maschinen geht, muss man sich bereits mit den Maschinendetails so intensiv und verlässlich beschäftigt haben, dass man die richtige Construktion derselben mit spielender Leichtigkeit auszuführen weiss, man muss es in der Darstellung der Details zu einem gewissen Grad von Virtuosität gebracht haben; so lange diese nicht vorhanden ist, kann man keine vollständige Maschine entwerfen oder richtig verstehen; ist sie dagegen vorhanden, so ist das untergeordnete Detail nur ein Hinderniss des Verständnisses.

Ein wesentlicher Theil des Unterrichts im Maschinenbau, welcher in dem Buch ebenfalls nicht zur Erscheinung kommen kann, besteht in den construktiven Uebungen, welche in den Zeichensälen parallel mit den Vorträgen sowohl an bestimmten Tagesstunden, als auch in allen freien Stunden statt finden. Die spezielle Leitung dieses Unterrichtes geschieht durch zwei Hilfslehrer, die sich mit meinem Constructionssystem in dem Grade vertraut gemacht, ja sich mit demselben in dem Maasse identifizirt haben, dass ihr Unterricht im Wesentlichen die gleiche Wirkung hervorbringt, wie wenn ich denselben unmittelbar selbst ertheilte, was auch früher geschehen ist und geschehen musste, bis solche Hilfskräfte herangebildet waren. Theils durch das methodische Verfahren des construktiven Unterrichts, insbesondere aber durch dieses Zusammenstimmen der Uebungen mit den Vorträgen, ist es möglich geworden, den construktiven Unterricht mit meinen zwei Hilfslehrern (Construkteurs) mehr als 200 Schülern gleichzeitig zu ertheilen.

Was den Inhalt dieses ersten Bandes und die Methode

der Behandlung betrifft, so ist das eine wie das andere durch die „Prinzipien“ und die „Resultate“ theilweise oder grösstentheils schon bekannt. Die Grundgedanken, auf welchen die Methode der Verhältnisszahlen beruht, habe ich bereits in den Prinzipien, Seite 308, ausgesprochen und die Mehrzahl der theoretischen Ergebnisse, welche die Methode der Verhältnisszahlen liefert, sind in den „Resultaten“ zusammengestellt. Auch ist der Inhalt der Vorträge durch nachgeschriebene Hefte vielfach verbreitet worden, so dass die Verlagshandlung schon oftmals genöthigt war, gegen diese Verbreitung meiner Arbeiten einzuschreiten. Hoffentlich wird dieser Missbrauch in Zukunft unterbleiben.

Karlsruhe im Juni 1862.

Der Verfasser.

Inhalt.

Vorrede . V

Erster Abschnitt.

Elastizität und Festigkeit der Materialien.

Seite

Formänderungen eines Körpers 1
Ausdehnung stabförmiger Körper 2
Zugfestigkeit 6
Zusammendrückung stabförmiger Körper 8
Absolut rückwirkende Festigkeit der Materialien 9
Erfahrungen über Elastizität und Festigkeit 9
Empirische Regel über den Modulus der Elastizität 11
Abscheerung 12
Biegung eines Stabes. Vorbereitung 13
Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen 16
Integration der Gleichungen 19
Interpretation der Resultate 20
Berechnung der Werthe von μ E z 23
Relative oder Bruchfestigkeit 24
Günstige Querschnittsformen 26
Die Anstrengung 27
Berechnung der Querschnittsdimensionen 28
Verschiedene Biegungsweisen 29
Erster Fall 30
Zweiter Fall 31
Dritter Fall 33
Vierter Fall 36
Fünfter Fall 38
Biegung durch Zusammendrückung 41
Biegung eines im natürlichen Zustande krummen Stabes 47
Verwindung oder Torsion eines Stabes 53
Drehung um die Schwerpunktfaser 55
Torsionsfestigkeit 56
Torsionswinkel 59
Festigkeit cylindrischer Gefässe 60

	Seite
Festigkeit kugelförmiger Gefässe	65
Unrunde Gefässe	69
Wirkungsgrössen für Deformirungen	70
Ausdehnung	70
Biegung	72
Drehung	73
Körper von gleicher Festigkeit	75
Absolute Festigkeit	75
Bruchfestigkeit	77
Rückwirkende Festigkeit	81
Aequivalenz der Querschnitte	85
Allgemeinster Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande krummen Stabes	87
Erfahrungscoeffizienten	95

Zweiter Abschnitt.

Construktion der Maschinenbestandtheile.

Allgemeine Grundsätze	97
Das Construktions - Material	97
Stahl - Federn	100
Schicht - Federn	100
Rechteck - Federn	104
Trapez - Federn	105
Hyperbel - Federn	106
Resultate der Untersuchung	108
Coeffizienten	109
Cylindrische Schraube als Tragfeder	110
Konische Schraubenfeder	112
Spiralfeder	114
Cylindrische Schraubenfeder	118
Hanfseile	121
Drahtseile	123
Ketten	124
Seil - und Kettenhaken	135
Schrauben	138
Vernietungen	144
Winkeleisen	153
Zapfen	154
Torsionswellen	162
Axen - Construktionen	167
Wellen mit zusammengesetzter Festigkeit	171
Wellenkupplungen	174
Axenlager	178
Lagerstühle	182
Rollen	184
Spannrollen	200
Zahnräder	203
Die Schraube ohne Ende	221

	Seite
Winkelhebel	223
Kurbeln und kurbelartige Hebel	226
Kurbelaxen	230
Schubstangen	233
Balancier	237
Traversen	241
Röhren und deren Verbindung	242
Ventile, Hahnen, Schieber, Klappen	247
Deckel mit Stopfbüchsen	254
Kolben für Pumpen und Dampfmaschinen	256

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Widerstände.

Reibung eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers	260
Kreuzkopf und Linealführung	261
Rollenreibung	264
Zapfenreibungen	265
Schraube	280
Schraube ohne Ende	282
Reibung der Zahnräder	284
Widerstände eines Rollentriebes	289
Reibung einer Transmissionswelle	290
Annäherungsausdruck für $\sqrt{x^2 + y^2}$	291
Steifheit der Seile	294
Wälzungswiderstand	304

Vierter Abschnitt.

Die Verzahnung.

Verzeichnung von krummen Linien	307
Geometrische Theorie der Verzahnung	312
Erste Verzahnung mit Triebstöcken	314
Zweite Verzahnung. Epicycloiden und radiale Einschnitte	316
Dritte Verzahnung. Epi- und Hypocycloiden	319
Vierte Verzahnung Kreisevolventen	319
Fünfte Verzahnnng. Allgemeine Methode	323
Abrundung der Zähne nach Kreisbögen	324
Verzahnung der Kegelräder	327
Allgemeine Methode zur Bestimmung von Zahnflächen	328
Herstellung der Zähne	331

Fünfter Abschnitt.

Die Bewegungsmechanismen.

Einleitung	333
Räderwerke	334

	Seite
Stirnräder	334
Kegelräder	334
Zwischenrad	335
Zwei Zwischenräder	335
Eine Zwischenaxe	335
Räderzählwerk	335
Schraubenräder	336
Schraube ohne Ende	336
Spiralrad	336
Differenzialräderwerk mit Kegelrädern	337
Differenzialräderwerk mit Stirnrädern	339
Uebersetzungskurbel mit Kegelrädern	340
Uebersetzungskurbel mit Stirnrädern	341
Rädergehänge	341
Drehung um zwei Axen	341
Unrunde Räder	342
Ellyptische Räder	346
Das Einzahnrad	346
Rollen	347
Gewöhnlicher Riementrieb	347
Geschränkte Riemen	347
Riementrieb für Axen, die einen Winkel bilden	347
Rolle mit Hook'schem Schlüssel	348
Expansions - Rollen	349
Konusbewegung	349
Kettenbewegung	353
Kurbelübersetzungen	354
Universalgelenk	356
Hin - und Hergang	358
Sinus - Bewegung	358
Sinus - Bewegung mit Excentrum	359
Excentrum mit veränderlicher Excentrizität	359
Das Planetenrad	359
Hypocycloidischer Hin - und Hergang	360
Hin - und Hergang mit zwei Kurbeln	361
Interferenz - Bewegung	361
Zusammensetzung geradliniger Schwingungen	362
Schubdublirung	367
Herzbewegungen	367
Herz für gleichförmige Bewegung	368
Herz für Sinus - versus - Bewegung	368
Bogendreieck	369
Herz für Expansionssteuerung	370
Balancier - Mechanismen	371
Balancier mit Gegenlenker	371
Watt'sches Parallelogramm	374
Balancier ohne Drehungsaxe	375
Schwingender Hebel (von Nehrlich)	376
Rechenbewegung	377

	Seite
Rechenbewegung mit halbverzahntem Rad	377
Drei halbverzahnte Räder	378
Schwinge mit halbverzahntem Rad	378
Mangelrad mit Triebstöcken	379
Mangelrad mit zweifacher Verzahnung	379
Schaltungen	379
Stangenschaltung für ganze Theilungen	379
Stangenschaltung für halbe Theilungen	380
Continuirliche Schaltung	381
Bohrmechanismen	382
Parallel-Bewegungen	383
Schützenaufzüge	384
Abstellung und Einkehrung	384
Leerrolle	385
Erste Abstellung mit drei Rollen	385
Zweite Abstellung mit drei Rollen	386
Abstellung mit Zwischenrad	386
„ „ Schraube	386
„ „ Friktionskegel	387
„ „ Konus und Klaue	387
„ „ Bremse und Klaue	388
„ „ Klauen	388
„ „ Differenzialräderwerk	389
„ „ Bremse und Planetenrad	390
Kraftmaschinenverkupplung	390

Sechster Abschnitt.

Messinstrumente.

Wagen	392
Schnellwage	392
Gleicharmige Wage	393
Erste Dezimalwage	398
Zweite Dezimalwage	399
Brückenwage	400
Garnwage	400
Uhren	406
Pendelschwingungen. Annäherungstheorie	407
„ mit Rücksicht auf Nebenhindernisse	409
„ mit Rücksicht auf Nebenhindernisse	414
Schwungrad-Schwingungen	417
Einrichtung einer Uhr im Allgemeinen	422
Beharrungszustand	424
Pendeluhr mit Ankerhemmung	426
Cylinderhemmung mit Schwungrad	428
Ruhende Hemmung	429
Freie Hemmung	430

Siebenter Abschnitt.

Maschinen, die durch Menschenkraft bewegt werden.

	Seite
Der Mensch und die Thiere als Motoren	431
Der praktische Werth des Menschen und der Thiere als Motoren	435
Winden	439
Der Kreuzhaspel	439
Der Kurbelhaspel	439
Das Spillenrad	440
Das Laufrad	440
Der Tummelbaum	441
Die Erdwinde	441
Der Flaschenzug	441
Eiserne Winde mit einfacher Uebersetzung	445
Eiserne Winde mit doppelter Uebersetzung	448
Friktionswinden	451
Krahne	455
Einfacher Magazinkrahn	455
Magazinkrahn	456
Krahn ohne Strebe	456
Krahn ohne Säule	456
Giessereikrahn	457
Quaikrahn	458
Freistehender Krahn mit unbeweglicher Axe	458
Blechkrahn	458
Krahn ohne Drehungsaxe	459
Transportabler Eisenbahnkrahn	459
Theorie der Krahne	459
Das Construktionsmaterial der Krahne	462
Berechnung eines Krahnes	463
Hebegerüste	465
Der Dreifuss	465
Der Vierfuss	466
Der Zweifuss	466
Aufstellungsgerüste	470
Schiebebühnen	471
Kleine Schiebebühne	471
Schiebebühne mit Grube	472
Grössere Schiebebühne für Lokomotive	472
Laufkrahne	476
Laufkrahn für Montirungswerkstätten	476
Laufkrahn mit hohem Gerüste für Magazine	476
Laufkrahn für Brückenbauten	477
Drehscheiben	477
Kleine Drehscheibe	478
Grössere Drehscheibe	478
Grosse Drehscheibe	479

ERSTER ABSCHNITT.

Elastizität und Festigkeit der Materialien.

Formänderungen eines Körpers. Der geometrische Zusammenhang aller Bestandtheile einer Maschine wird immer unter der Voraussetzung ausgedacht, dass diese Bestandtheile ihre Formen und Abmessungen unter der Einwirkung der äusseren Kräfte entweder gar nicht oder nur ganz unmerklich ändern. Wir brauchen also zur Realisirung unserer technisch-construktiven Gedanken eines sehr starren Materials, während die Natur gerade umgekehrt zu ihren organischen Bildungen stets sehr leicht deformirbare, höcht elastische Gebilde in Anwendung bringt; für den Techniker ist es daher von der grössten Wichtigkeit zu wissen, wie die Formen und Dimensionen der einzelnen construktiven Elemente gewählt werden müssen, damit die in denselben durch äussere Kräfte eintretenden Formänderungen so gering ausfallen, dass dadurch der wahre geometrische Zusammenhang nicht merklich geändert wird.

Die Deformirungen, welche in den Körpern durch äussere Kräfte eintreten, richten sich theils nach der Form dieser Körper, theils nach der Angriffsweise der Kräfte. Die einfachsten Aenderungen sind Dehnungen und Zusammendrückungen oder Verdichtungen; etwas zusammengesetzter sind schon Gegeneinanderverschiebungen der Theile eines Körpers; noch verwickelter werden Biegungen, bei welchen theilweise Ausdehnungen, theilweise Zusammendrückungen eintreten, und die Verwindungen, wobei gegeneinander Verschiebungen stattfinden, und zwar in ganz veränderlichem Maasse. Endlich gibt es auch noch Deformirungen, wobei zusammengesetzte innere Vorgänge eintreten. Z. B. gleichzeitige Biegungen und Drehungen.

Ueberschreitet eine Deformirung ein gewisses Maass, so werden entweder alle oder einzelne Atome des Körpers so weit von der relativen Gegeneinanderlagerung, die im natürlichen Zustande des Körpers vorhanden ist, entfernt, dass eine Trennung der Atome eintritt. Man sagt dann, die Festigkeit des Materials sei überwunden.

Die Verhältnisse der Elastizität und der Festigkeit der Materialien können auf rationellem Wege untersucht werden, indem man von der atomistischen Anschauungsweise ausgeht und darauf die allgemeinen Prinzipien des Gleichgewichts der Kräfte anwendet, oder man kann einen halbrationellen Weg einschlagen, indem man von annähernd wahren Erfahrungsthatsachen ausgeht und darauf Schlüsse baut. Der erstere Weg ist in wissenschaftlicher Hinsicht von viel höherem Werth als der letztere; dieser ist aber viel leichter zu verfolgen, und führt zu leichter anwendbaren Resultaten, die, wenn man sie nicht missbraucht, sondern als Annäherungen betrachtet, die nur unter gewissen Voraussetzungen zulässig sind, recht gute Dienste leisten. Die Hauptthatsachen, auf welche sich die nachfolgende Theorie gründet, ergeben sich durch Ausdehnungs- und Verdichtungs-Versuche, so wie auch durch Verschiebungs-Versuche mit stabförmigen Körpern. Mit diesen Fundamentalversuchen haben wir es also zunächst zu thun.

Ausdehnung stabförmiger Körper.

Empirisches Gesetz. Nimmt man einen stabförmigen Körper, macht das eine Ende desselben fest, und lässt auf das andere Ende eine Kraft nach der Längenrichtung des Stabes einwirken, so entsteht in dem ganzen Stabe eine Ausdehnung, aber auch gleichzeitig nach der Quere des Stabes eine Zusammenziehung, die Ausdehnung ist jedoch viel auffallender als die Zusammenziehung, und letztere kann bei den meisten technischen Aufgaben ganz unberücksichtigt gelassen werden. Wir wollen daher unsere Aufmerksamkeit nur auf die Längenausdehnung richten. Um nun das Ausdehnungsgesetz kennen zu lernen, kann man zweierlei Wege einschlagen: Man kann unmittelbar an das Experimentiren gehen, und Stäbe von verschiedener Abmessung und aus verschiedenem Materiale durch schwächere und stärkere Kräfte wirklich ausdehnen, diese Ausdehnungen genau messen und dann nachsehen, ob sich die Zahlenresultate durch irgend einen mathematischen Ausdruck wiedergeben lassen. Dieser Weg ist nicht der rechte. Wenn man experimentirt bevor man studirt, macht man sich einen Wust von Arbeit, der sich oft nicht bewältigen lässt.

Zweckmässiger ist es, von einer wahrscheinlichen, das Gefühl befriedigenden Annahme auszugehen, und diese durch zahlreiche Versuche zu prüfen. Bestätiget sie sich, so ist man am Ziele; bestätiget sie sich nicht, so kann man dann vielleicht durch eine geringe Modifikation der Annahme seinen Zweck erreichen. „Naturgesetze" wird man auf diesem Wege (dem inductiven) selten finden, dagegen aber hält es nicht schwer, auf diese Weise Regeln aufzustellen, die für die Verfolgung praktischer Zwecke hinreichend genau sind. Wir wollen also auch in Betreff der Ausdehnung der Stäbe eine Annahme machen, und sie sodann durch Versuche prüfen.

Wenn man sich den Vorgang einer Stabausdehnung lebhaft vorstellt, so wird man es als wahrscheinlich finden, dass die Verlängerung e, die in einem Stab, dessen Länge l und Querschnitt a ist, durch eine ausdehnend wirkende Kraft P entsteht, der ausdehnenden Kraft P und Länge l direkt, dem Querschnitt des Stabes dagegen verkehrt proportional sein dürfte, dass aber auch diese Ausdehnung von der Natur des Materials abhängen werde. Wir stellen daher die Hypothese auf:

$$e = \frac{P\,l}{a\,\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

in welcher ε ein Coeffizient ist, welcher die Ausdehnsamkeit des Materials zu charakterisiren bestimmt ist. Wir nennen denselben den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht. Unter der Voraussetzung, dass der Ausdruck (1) eine absolute Wahrheit, also ein wirkliches Naturgesetz ausdrückt, würde die Bedeutung des Elastizitätsmodulus ε leicht zu erklären sein. Wenn nämlich (1) absolut richtig ist, so gilt es auch noch, wenn wir $e = l$, $a = 1$ setzen; dann wird $\varepsilon = P$, d. h. ε drückt diejenige Kraft aus, durch welche ein Stab von 1 Quadratcentimeter Querschnitt um so viel ausgedehnt wird, als seine Länge vor der Ausdehnung beträgt.

Wenn der Ausdruck (1) eine Wahrheit ist, so muss man bei Ausdehnungsversuchen mit Stäben, die aus dem gleichen Material bestehen, für ε immer den gleichen Werth finden, wie auch die Grössen e P l a modifizirt werden mögen. Diese Prüfung ist hundert- und tausendfältig gemacht worden, und es hat sich dabei gezeigt, dass zwar (1) kein absolut richtiges Gesetz ausdrückt, dass es jedoch als eine Annäherungsregel angesehen werden kann, so lange die Ausdehnungen eine gewisse, allerdings nicht streng be-

stimmbare Grenze nicht überschreiten. Man findet nämlich in der That bei schwächeren Ausdehnungen für ε immer den gleichen Werth, wenn das Material nicht geändert wird. Die Regel (1) hört auf mit den Versuchsresultaten zu stimmen, wenn die Ausdehnungskraft ungefähr gleich wird dem dritten Theil der Kraft, welche das Abreissen des Stabes bewirkt. Ueber diese Grenze hinaus nimmt der Werth von ε allmählich nach einem noch nicht empirisch bestimmten Gesetz ab. Da uns für technische Zwecke doch nur schwache Ausdehnungen interessiren, so werden wir von nun an die durch (1) ausgedrückte Regel als eine Basis für unsere folgenden Untersuchungen gelten lassen.

Es ist klar, dass nicht nur jeder Materialgattung, sondern dass jedem individuellen Körper ein besonderer Elastizitätsmodulus entspricht. Die genauen, von Wertheim angestellten Versuche haben auch nachgewiesen, dass der Elastizitätsmodulus, selbst bei der ganz gleichen Substanz, nicht nur mit dem Ausdehnungsgrade derselben, sondern auch mit ihrer Temperatur und überhaupt mit dem in ihrem Innern herrschenden physikalischen Zustand abhängt. Indessen auf alle diese Feinheiten braucht man sich bei den derben Fragen der technischen Praxis nicht zu kümmern, wohl aber muss hervorgehoben werden, dass wenn es sich um grössere wichtigere technische Konstruktionen handelt, welche von der Ausdehnbarkeit des Konstruktionsmaterials abhängen, es sehr rathsam ist, durch besondere Versuche den Elastizitätsmodulus des Materials, mit welchem diese Konstruktionen realisirt werden sollen, zu bestimmen. Für die meisten Konstruktionen, die im Maschinenbau vorkommen, ist es jedoch genügend, den Rechnungen die mittleren Werthe, welche einem bestimmten Material entsprechen, zu Grunde zu legen. Diese mittleren Werthe sind in der Seite 36 der Resultate befindlichen Tafel in der mit ε überschriebenen Rubrik zusammengestellt. Bei Schmiedeeisen variirt der Modulus von 1,500,000 bis 2,500,000, bei Stahl von 2,000,000 bis 2,400,000. Bedenkt man alle die mannigfaltigen mechanistischen, physikalischen und chemischen Prozesse, die mit dem Eisen und Stahl durchgeführt werden, bis sie als Konstruktionsmaterial gebraucht werden, so hat man Ursache sich zu wundern, dass die Abweichungen nicht grösser sind.

Wie schwierig es ist, auf experimentalem Wege über die Natur des Molekularbaues der Körper zu einer gründlichen Einsicht zu kommen, zeigt die Verschiedenheit der Ansichten, zu welchen verschiedene, gleich achtenswerthe Beobachter über die sogenannte Elastizitätsgrenze gekommen sind.

Manche Beobachter haben aus ihren Versuchen zu finden geglaubt, dass wenn die, einen Stab ausdehnende Kraft eine gewisse Grenze nicht überschreitet, der Stab nach Beseitigung der Kraft ganz genau in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, und überhaupt in seinem Innern keine Aenderung erleidet. Diese Grenze hat man die Elastizitätsgrenze genannt. Die genauesten und zahlreichen Untersuchungen, welche in dieser Hinsicht Wertheim angestellt hat, haben jedoch zu der Meinung geführt, dass es eine solche Elastizitätsgrenze nicht gebe, und dass ein Stab, wenn er auch nur wenig ausgedehnt wird, nicht mehr ganz genau in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, wenn man die ausdehnende Kraft beseitigt. Indessen, wenn es auch in rein wissenschaftlicher Hinsicht eine wahre Elastizitätsgrenze nicht gibt, so kann man doch in praktischer Hinsicht von einer solchen sprechen, denn es stimmen die Resultate aller Beobachter darin überein, dass die bleibenden Verlängerungen erst dann merklich werden, wenn die ausdehnende Kraft bei Eisenarten ungefähr die Hälfte, bei Hölzern ungefähr den vierten Theil von demjenigen Werth erreicht, bei welchem das Abreissen erfolgt, dass also wirklich die Konstruktionsmaterialien keine wesentliche Aenderung in der inneren Molekulargruppirung erleiden, wenn sie innerhalb dieser praktischen Elastizitätsgrenze deformirt werden.

Für manche praktische Konstruktionen ist es auch von Wichtigkeit zu wissen, ob die Dauer der Einwirkung einer dehnenden Kraft von Einfluss ist auf die Grösse der Ausdehnung. Nach den zur Entscheidung dieser Frage angestellten Versuchen muss man sie bejahend beantworten. Die Ausdehnung nimmt in der That mit der Dauer der Krafteinwirkung zu, jedoch nur sehr langsam und, wie es scheint, nicht einfach proportional mit der Zeit, sondern in der Art, dass sie sich allmählich einer bestimmten Grenze nähert.

Das Stabausdehnungsgesetz (1) kann noch in einer andern Form ausgesprochen werden. Es ist $\frac{P}{a}$ die Kraft, welche jeden Quadratcentimeter des Stabes spannt. Diese wollen wir die Spannungsintensität nennen und mit J bezeichnen. Der Quotient $\frac{e}{l}$ aus der Ausdehnung und der ursprünglichen Länge drückt die Ausdehnung aus, die jeder Centimeter der Stablänge erlitten hat; wir wollen diesen Quotienten die verhältnissmässige Ausdehnung nennen und mit i bezeichnen. Unter dieser Voraussetzung können wir statt (1) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{J}{\varepsilon} \\ J &= \varepsilon\, i \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man findet also die verhältnissmässige Ausdehnung, wenn man die Spannungsintensität durch den Modulus der Elastizität dividirt. Man findet ferner die Spannungsintensität, wenn man die verhältnissmässige Ausdehnung mit dem Modulus der Elastizität multiplizirt, und diese beiden Regeln sind richtig, wie gross oder wie klein der Querschnitt des Stabes ist, und wie lang oder wie kurz er auch sein mag.

Diese Regeln leisten uns vortreffliche Dienste bei Untersuchungen, bei welchen die verhältnissmässigen Ausdehnungen an verschiedenen Stellen eines Körpers verschieden sind. Die der Elastizitätsgrenze entsprechende verhältnissmässige Ausdehnung beträgt für Schmiedeeisen $\frac{1}{1250}$, für Gusseisen $\frac{1}{1562}$, für Hölzer $\frac{1}{500}$

Absolute oder Zugfestigkeit der Stäbe.

Die Intensität der Cohäsionskraft kann bestimmt gemessen werden, indem man die Kraft angibt, welche erforderlich ist, um einen Stab von einem Quadratcentimeter Querschnitt abzureissen. Diese Kraft nennt man auch das Maass der absoluten Festigkeit eines Materials. Es gründet sich auf die Erfahrung, dass die zum Abreissen eines Stabes erforderliche Kraft unabhängig ist von der Länge des Stabes und von der Form des Querschnitts, dagegen der Grösse des Querschnittes proportional ist.

Nennt man $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials (oder die dem Abreissen entsprechende Spannungsintensität), K die Kraft, welche erforderlich ist, einen Stab, dessen Querschnitt a Quadratcentimeter beträgt, abzureissen, so hat man:

$$K = \mathfrak{A}\, a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist selbstverständlich, dass dieses $\mathfrak{A}$ für jeden individuellen Körper einen besonderen Werth hat. Die mit K überschriebene Columne der Tafel, Seite 36 der Resultate, enthält den mittleren Werth für verschiedene Materialien. Handelt es sich um ausgedehnte Konstruktionen von Eisen, die grössere Materialmassen erfordern, so wird man oftmals gut thun, mit dem zu verwendenden Material genaue Versuche über seine absolute Festigkeit anzustellen, um den individuellen Werth der Festigkeit zu erhalten; für die meisten Konstruktionen im Maschinenbau genügt die Kenntniss der mittleren Werthe. Die im Allgemeinen sehr grosse absolute Festigkeit der Metalle richtet sich auch nach den mechanischen und chemischen Prozessen, die bei ihrer Bereitung angewendet wurden. Möglichste Befreiung aller fremdartigen und insbesondere der schlackigen Bei-

mengungen, und mechanische Verdichtung durch äussere Schläge oder Drücke erhöhen die absolute Festigkeit. Daher kommt es, dass alles Eisen in dünnen Stäben in der Regel fester ist, als Eisen in dickeren Stäben, und dass man Eisen in dickeren Stäben nur dadurch in vorzüglicher Qualität erhält, indem man dünnes Stabeisen nimmt, es zusammenschweisst und durch Hammerschläge verdichtet. Nimmt man zur Vergleichung der Festigkeit der Metalle die Festigkeit des Gusseisens (1000) als Einheit an, so ist die des Kanonenmetalls 2·6, die des Schmiedeeisens 3·3 bis 7 (Draht), die des Stahles 7·5 bis 10.

Durch das Verhalten stabförmiger Körper beim Abreissen derselben spricht sich die Natur des innerer Molekularbaues sehr deutlich aus.

Stäbe aus kurzfaserigem Holz (Eichen, Buchen) zeigen bis zum Moment des Reissens hin keine andere Veränderung, als die Ausdehnung. Ist der Riss erfolgt, so erscheinen die Rissflächen kurz zackig. Tafel I., Fig. 1.

Stäbe aus langfaserigem Holz (Tanne, Lerche) zeigen zwar für das Auge keine andere Veränderung als die Ausdehnung, allein so wie sich die Spannungsintensität dem Reissen nähert, hört man das klingende Abreissen einzelner Fasern, dies wiederholt sich bei zunehmender Spannung immer häufiger und häufiger und wenn dann plötzlich der Riss eintritt, zeigen sich die Rissflächen lang zackig. Tafel I., Fig. 2.

Gusseisen und überhaupt alle Gussmetalle zeigen während der Ausdehnung bis zum Reissen keine auffallende Erscheinung, als die allgemeine Ausdehnung selbst. Der Riss erfolgt plötzlich, ohne dass er sich durch irgend etwas ankündigte, und die Rissflächen zeigen dann die mehr oder weniger krystallinischen oder körnigen Gefüge des Materials.

Ganz anders ist das Verhalten des Schmiedeeisens und überhaupt der zäh streckbaren Metalle, z. B. auch des Kupfers. Wird ein Stab aus zähem Schmiedeeisen bis zum Reissen ausgedehnt, so zeigt sich in der Regel, sowie die Spannung eine gewisse Grenze erreicht hat, an irgend einer Stelle des Stabes eine Verdünnung, Fig. 3, des Querschnittes, diese nimmt mehr und mehr zu, ohne dass in den übrigen Theilen des Stabes merkliche Veränderungen vorkommen und wenn endlich der Querschnitt eine gewisse Kleinheit erreicht hat, tritt plötzlich der Riss ein. Die Rissflächen Fig. 4, zeigen sich zäh, faserig, und das Eisen ist vorübergehend stark magnetisch.

Gussstahl verhält sich beim Abreissen ähnlich wie Gusseisen, Schmiedestahl (Steierscher) ähnlich wie Schmiedeeisen, jedoch nicht in dem Grade zähe wie Schmiedeeisen.

In neuerer Zeit hat man die Behauptung aufgestellt, dass das Eisen an Festigkeit verliere, wenn es anhaltend heftigen Erschütterungen und Vibrationen ausgesetzt ist. Es ist auch mehrfach versucht worden, die Richtigkeit dieser Behauptung durch Versuche nachzuweisen. Allein die Sache scheint doch noch nicht spruchreif zu sein, indem die Art und Weise, wie die empirischen Beweise geführt wurden, sehr wohl zu irrigen Schlüssen führen konnte, denn ein Beweis wird nicht durch Thatsachen, sondern durch einen Schluss aus Thatsachen geführt.

Betrachtet man die Sache vom theoretischen Standpunkte aus, indem man von der atomistischen Anschauungsweise ausgeht, so erscheint es allerdings als möglich, ja sogar in gewisser Hinsicht als wahrscheinlich, dass die Behauptung richtig ist. Denn es ist sehr wohl denkbar, dass durch andauernde heftige Erschütterungen eine Aenderung der Gegeneinanderlagerung der Atome eintritt, wodurch ein Uebergang aus einem amorphen Zustand in einen regelmässig kristallinischen herbeigeführt werden kann, und z. B. zähes Schmiedeeisen in sprödes umgewandelt wird. Allein hiermit ist nur eine Möglichkeit, oder theilweise eine Wahrscheinlichkeit ausgesprochen; die Wahrheit kann nur auf induktivem Wege aus einem reichen und verlässlichen Thatsachenmaterial erschlossen werden.

Zusammendrückung kurzer stabförmiger Körper.

Versuche über die Zusammendrückung kurzer Stäbe haben gezeigt, dass das Seite 3 für die Ausdehnung aufgestellte Gesetz auch für die Zusammendrückung gilt, wenn dieselbe eine gewisse Grenze nicht überschreitet und dass sogar innerhalb dieser Grenze der Modulus der Elastizität den gleichen Werth hat, wie für Ausdehnung. Es widerstehen demnach alle Materialien schwächeren Zusammendrückungen genau so, wie schwächeren Ausdehnungen, und es gelten auch hier die Gleichungen:

$$\frac{e}{l} = \frac{P}{a} \frac{1}{\varepsilon}, \qquad i = \frac{J}{\varepsilon} \quad \dots\dots\dots (1)$$

Allein wenn die Zusammendrückungen gewisse Grenzen überschreiten, wird der Modulus der Elastizität variabel, und zwar nach einem anderen Gesetz, als bei starken Ausdehnungen, und es verhalten sich in dieser Hinsicht die verschiedenen Materiale verschieden. Bei Schmiedeeisen und bei den verschiedenen Holzarten stimmen die beiden Gesetze des Ausdehnungs- und Zusammendrückungs-Modulus sehr nahe überein; bei Gusseisen dagegen ist das Gesetz

für den Zusammendrückungsmodulus sehr verschieden von jenem für die Ausdehnung. Bei starken Aenderungen widersteht nämlich das Gusseisen der Zusammendrückung weit mehr als der Ausdehnung, oder mit andern Worten, es ist schwerer zusammendrückbar als ausdehnbar.

Absolut rückwirkende Festigkeit der Materialien.

Die absolut rückwirkende Festigkeit messen wir durch die Kraft, welche im Stande ist, einen Würfel von einem Quadratcentimeter Querschnitt zu zerdrücken. Diese rückwirkende Festigkeit ist bei Holz die Hälfte, bei Schmiedeeisen $^4/_5$ von der absoluten Festigkeit gegen das Abreissen. Bei Gusseisen ist dagegen die rückwirkende Festigkeit $5^1/_2$mal so gross als die absolute Festigkeit.

Uebersicht der Erfahrungen über Elastizität und Festigkeit der Materialien.

Alles was bisher über die Festigkeit und Elastizitätsverhältnisse der Materialien gesagt wurde, lässt sich durch graphische Darstellung, sowie durch eine tabellarische Zusammenstellung der Erfahrungswerthe am deutlichsten anschaulich machen. Die beiliegende Tabelle ist dem trefflichen Werk von Rebhann, Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen, entnommen.

Erfahrungsresultate über die Elastizität und Festigkeit der Materialien.

	$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{A}_1$	$\mathfrak{R}_1$	ε	α_1	β_1
Schmiedeeisen	4040	$\frac{4}{5}\mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$	2 020 000	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Eisenblech	3636	$\frac{4}{5}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{3}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{3}\mathfrak{A}$	1 779 600	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Eisendraht	6464	$\frac{4}{5}\mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$	$0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$	2 181 600	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Gusseisen	1454	$5{\cdot}5\ \mathfrak{A}$	$\frac{4}{9}\mathfrak{A}$	$\frac{4}{3}\mathfrak{A}$	1 010 000	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Tannenholz	970	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	129 280	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Fichtenholz	808	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	121 200	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Kiefern	1050	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	129 280	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Lerchenholz	1131	$\frac{1}{2}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{5}\mathfrak{A}$	129 280	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Eichenholz	808	$\frac{2}{3}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{3}\mathfrak{A}$	$\frac{1}{4}\mathfrak{A}$	121 200	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$

Es bedeutet:

$\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials.

$\mathfrak{R}$ die absolut rückwirkende Festigkeit.

$\mathfrak{A}_1$ die Spannungsintensität an der Elastizitätsgrenze für Ausdehnung.

$\alpha_1 = \frac{e}{l}$ die verhältnissmässige Ausdehnung an der Elastizitätsgrenze.

$\mathfrak{R}_1$ die Druckintensität an der Elastizitätsgrenze der Zusammendrückung.

β_1 die verhältnissmässige Zusammendrückung an der Elastizitätsgrenze.

ε den Modulus der Elastizität des Materials, innerhalb der Elastizitätsgrenze.

Die Werthe von $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{A}_1$ $\mathfrak{R}_1$ sind auf $\mathfrak{A}$ bezogen angegeben.

In Figur 5, Tafel I., sind die Intensitäten als Abscissen, die verhältnissmässigen Ausdehnungen und Zusammenpressungen als Ordinaten aufgetragen. Der Maassstab für die Ordinaten ist ein anderer, als der für die Abscissen, und die Kurven, welche die Dehnung und Zusammendrückung darstellen, sind nicht punktweise nach Thatsachen verzeichnet.

Die Kurven gehen natürlich sämmtlich durch die Anfangspunkte der Coordinaten und sind daselbst beinahe geradlinig, indem nach den Thatsachen die verhältnissmäsigen Aenderungen bei schwächeren Kraftintensitäten diesen Intensitäten proportional sind, bis an die Elastizitätsgrenze hin. In der Nähe der Elastizitätsgrenze haben diese Kurven rasche Krümmungen und verlaufen sodann assymptotisch nach der Richtung der Ordinatenaxe.

Für Schmiedeeisen ist:

$\overline{OS} = \mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit. $\overline{OS_1} = \mathfrak{A}_1$ die Spannungsintensität; $s_1 S_1 = \alpha$ die verhältnissmässige Ausdehnung an der Elastizitätsgrenze, und es ist $OS_1 = 0{\cdot}4\ OS$ oder $\mathfrak{A}_1 = 0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$; OS_3 die rückwirkende Festigkeit; OS_2 die Druckintensität; $S_2 s_2$ die verhältnissmässige Zusammendrückung an der Elastizitätsgrenze, und es ist $\overline{OS_2} = 0{\cdot}4\ \mathfrak{A}$. Ueberhaupt ist die Bedeutung der in der Figur verzeichneten Abscissen und Ordinaten folgende:

	Holz.	Schmiedeeisen.	Gusseisen.
Absolute Festigkeit	OH	OS	OG
Spannungsintensität an der Elastizitätsgrenze für Ausdehnung	OH_1	OS_1	OG_1
Verhältnissmässige Ausdehnung an dieser Grenze	$H_1 h_1$	$S_1 s_1$	$G_1 g_1$
Rückwirkende Festigkeit . .	OH_3	OS_3	OG_3

	Holz.	Schmiedeeisen.	Gusseisen.
Druckintensität an der Elastizitätsgrenze der Zusammendrückung	OH_2	OS_2	OG_2
Verhältnissmässige Zusammendrückung an dieser Grenze.	$H_2 h_2$	$S_2 s_2$	$G_2 g_2$

Empirische Formel für das Gesetz der Ausdehnung und Zusammendrückung eines Stabes.

Die in Figur 5 dargestellten Kurven, in welchen die Abscissen die Intensitäten der Spannungen und Pressungen, die Ordinaten die entsprechenden linearen Ausdehnungen und Zusammendrückungen bedeuten, lassen sich auf folgende Weise annähernd durch Gleichungen ausdrücken:

Zieht man zu irgend einem Punkt m der Kurve Fig. 6, Tafel I., welchem die Coordinaten $\overline{Op} = x$ und $\overline{mp} = y$ entsprechen, eine Berührungslinie t m n, so bildet dieselbe mit O x einen gewissen Winkel $\widehat{tnx} = \varphi$ und es ist

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In der Nähe von O ist der Modulus der Elastizität constant und wird ausgedrückt durch $\frac{x}{y}$ oder auch durch $\frac{dx}{dy}$. Der Modulus der Elastizität kann daher sowohl innerhalb als ausserhalb der Elastizitätsgrenze durch $\frac{dx}{dy} = \text{Cotg}\ \varphi$ ausgedrückt werden und es handelt sich nur darum, eine Funktion von x zu finden, welche genau oder annähernd den Werth von $\frac{dx}{dy}$ darstellt.

Nennt man ε den constanten Modulus der Elastizität für ganz schwache Ausdehnungen und Zusammenpressungen, $\overline{Ok} = a$ die Zugfestigkeit des Materials, $\overline{Oh} = -a'$ die Druckfestigkeit desselben, so muss die für $\frac{dx}{dy}$ zu suchende Funktion von x die Eigenschaften haben, dass

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } x = o & \frac{dx}{dy} = \varepsilon \\ \text{,, } x = +a & \frac{dx}{dy} = o \\ \text{,, } x = -a_1 & \frac{dx}{dy} = o \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wird.

Dieser Bedingung wird entsprochen, wenn man setzt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varepsilon}{a\,a_1}(a - x)\,(a_1 + x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Integrirt man diese Differenzialgleichung und berücksichtigt, dass für $x = o$ auch $y = o$ werden soll, so findet man

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{a\,a_1}{a + a_1}\,\text{lognat}\left(\frac{a_1 + x}{a - x}\,\frac{a}{a_1}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck ist die Gleichung einer Kurve, welche mit der wahren Kurve für $x = o$, $x = a$, $x = -a_1$ übereinstimmt. Ob sie auch für Werthe von x die zwischen $+a$ und $-a_1$ liegen und von o verschieden sind, mit der wahren Kurve übereinstimmt, könnte nur durch Vergleichung mit Versuchsresultaten ermittelt werden.

Den Bedingungen (2) kann man auch entsprechen, wenn man statt (3) setzt:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\varepsilon}{a^m\,a_{1n}}\,(a - x)^m\,(a_1 + x)^n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

wobei m n beliebige Zahlen sind, die sich vielleicht so bestimmen lassen, dass der Ausdruck das wahre Gesetz des Elastizitätsmodulus darstellt.

Abscheerung.

Man denke sich durch einen stabförmigen Körper eine Querebene A gelegt und die zu beiden Seiten dieser Ebene befindlichen Theile B und C des Stabes durch Kräfte in der Weise angefasst, dass sie diese Theile nach Richtungen zu verschieben streben, welche zur Ebene A parallel, aber einander entgegengesetzt sind, so wird dadurch der Molekularzusammenhang des Körpers auf eine besondere Art einem Kraftangriff ausgesetzt, welchen man Abschiebungs- oder Abscheerungsangriff nennen kann. Wenn der Querschnitt des Stabes nicht sehr beträchtlich ist, kann man vermuthen, dass die zum Abscheeren eines Stabes erforderliche Kraft dem Querschnitt des Stabes proportional ist, und dies haben auch Versuche ziemlich genau bestätiget. Bei metallischen Körpern ist überdies die zum Abscheeren jedes Quadratcentimeters des Stabquerschnittes erforderliche Kraft (die Abscheerungs- oder Abschiebungsfestigkeit) nahezu der absoluten oder Zugfestigkeit des Materials proportional. Dieses Festigkeitsverhältniss kommt insbesondere bei Nietbolzen und Kettenbolzen in Betrachtung. Aber auch bei Biegungen wird man zur Annahme von Abschiebungskräften veranlasst.

Biegung eines Stabes, relative Festigkeit der Materialien.

Voraussetzungen. Stäbe können auf verschiedene Weise gebogen werden. Wir betrachten zuerst einen speziellen Fall, der zwar in der Wirklichkeit selten vorkommt, worauf sich aber die verschiedenen Biegungsfälle zurückführen lassen.

Man denke sich, das eine Ende eines in natürlichem Zustande geraden Stabes werde nach horizontaler Richtung eingeklemmt, das andere Ende dagegen freigelassen, jedoch durch ein Gewicht belastet.

Fig. 7 sei der Stab im horizontal eingespannten, jedoch unbelasteten Zustand. Fig. 8 der Stab in belastetem, mithin gebogenem Zustand. Fig. 9 der Querschnitt des Stabes. Um uns eine klare Vorstellung zu verschaffen von dem im Innern des Stabes herrschenden Zustande, denken wir uns, der Stab bestehe aus einer grossen Anzahl von neben- und übereinandergelegten und mit einander verbundenen Fasern, wobei wir uns unter einer Faser eine Reihe von Atomen denken, die im geraden Zustand des Stabes in einer geraden, mit der Axe parallelen Linie liegen, in gebogenem Zustande des Stabes dagegen eine zur äusseren Krümmung a b äquidistante Linie bilden. i_1 k_1 sei die Faser, welche im unbelasteten Zustande durch die Schwerpunkte aller Querschnitte des Stabes geht; i k die gleiche Faser im belasteten Zustande. Wir wollen diese Faser die Axenfaser nennen. Der Gleichgewichtszustand des Stabes wird bekannt sein, wenn wir anzugeben im Stande sind: 1) den Zustand der Spannung oder Pressung in jedem einzelnen Punkte des Stabes, 2) die Gestalten der einzelnen Fasern des Stabes. Will man diese Gleichgewichtsaufgabe ganz scharf zur Lösung bringen, so hat man es mit einer äusserst schwierigen Aufgabe zu thun. Begnügt man sich aber mit einer Annäherung, so hat man es mit einer verhältnissmässig leichten Aufgabe zu thun, die schon unzählige Male behandelt worden ist.

Die folgende annähernde Behandlung beruht auf folgenden Annahmen, über deren Zulässigkeit wir uns später aussprechen werden. Wir nehmen an:

1) dass alle Atome, welche ursprünglich in einem ebenen Querschnitt e_1 g_1 lagen, auch im gebogenen Zustande in einer Ebene e g liegen, die in e auf der Faser a b senkrecht steht. Es ist also e g die Richtung der zum Punkt e der Kurve a b gehörigen Normale;

2) dass die Atome eines und desselben Querschnittes ihre relative Gegeneinanderlagerung nicht ändern, dass mithin die Querschnitte durch die Biegung weder ihre Form noch ihre Grösse verändern;

3) dass alle ursprünglich geraden Fasern im gebogenen Zustande des Stabes zur Faser a e f b äquidistante Linien bilden;

4) dass die Biegung nur so schwach sei, dass die früher Seite 3 und 5 aufgestellten Gesetze über die Ausdehnung und Zusammendrückung von Stäben angewendet werden dürfen.

Diesen Voraussetzungen wird ein eingespannter und belasteter Stab niemals mathematisch genau entsprechen. In der That denken wir uns z. B. einen Stab mit quadratischem Querschnitt, so ist zunächst klar, dass derselbe im gebogenen Zustande der zweiten Voraussetzung nicht entsprechen wird, denn so wie oben bei e f eine Ausdehnung und unten bei g h eine Zusammenziehung entsteht, wird gleichzeitig oben nach der Quere eine Zusammenziehung und unten nach der Quere eine Ausdehnung eintreten. Im gebogenen Zustande wird daher der Querschnitt nicht mehr die Gestalt Fig. 1, Tafel II., sondern die Form Fig. 2 haben. Der ganze Stab wird also in Folge der Biegung oben schmäler, unten breiter werden, als er ursprünglich war. So wie aber einmal eine Aenderung in der Querschnittsform und eine Gegeneinanderverschiebung der Atome eines und desselben Querschnittes eintritt, können auch die Voraussetzungen (1), (3) und (4) nicht mehr streng erfüllt sein. Nimmt man aber gar einen schienenartigen Stab an, d. h. einen Stab von verhältnissmässig grosser Höhe und geringer Dicke, so wird sich der belastete Stab in einem Gleichgewichtszustand befinden können, der von dem vorausgesetzten Zustand weit verschieden ist. Es kann z. B. ein Umschlagen der Schiene in der Art, wie Fig. 3 zeigt, oder es können an der unteren Kante Faltungen eintreten, in der Art, wie Fig. 4 zeigt.

Die vier Voraussetzungen oder Annahmen müssen gestellt werden, weil bei starken Belastungen und bei einem leicht zusammendrückbaren Materiale so komplizirte Molekularverschiebungen und Formänderungen eintreten würden, dass es ganz unmöglich wäre, dieselben durch Rechnung zu bestimmen. Diese sämmtlichen Voraussetzungen haben aber zugleich einen sehr wichtigen praktischen Sinn, denn sie sprechen Bedingungen aus, denen jeder auf relative Festigkeit in Anspruch genommene Bestandtheil entsprechen muss, um als ein solides Glied in irgend einer Konstruktion dienen zu können.

Indem wir also die folgenden Rechnungen unter jenen vier Voraussetzungen machen, werden wir solche Resultate erhalten, die sich jedenfalls auf praktisch brauchbare Konstruktionen anwenden lassen, nur sind wir leider nicht im Stande die Bedingungen oder Grenzen scharf anzugeben, bis zu welchen hin unsere Resultate noch Gel-

tung haben, weil wir nicht im Stande sein werden zu sagen, wann die Verschiebungen der Moleküle eines und desselben Querschnittes merklich zu werden beginnen, wann ein Ueberwerfen oder Zusammenfalten oder Knicken eines Stabes einzutreten beginnt. Freilich in der Mehrzahl der Fälle, welche der Maschinenbau darbietet, weiss man schon mit dem Gefühl die Stabformen und Dimensionen so zu wählen, dass unsere Voraussetzungen zulässig sind.

Wir gehen nun zur Entwicklung der Theorie über. Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die Faserstückchen, welche ursprünglich zwischen den Querschnittsebenen e_1 g_1 und f_1 h_1 liegen, so treffen wir dieselben, nachdem die Biegung eingetreten ist, zwischen den Ebenen e g und f h (wegen Voraussetzung 1), die bei e und f auf der Faserlinie a e f b normal stehen, deren verlängerte Richtungen also in dem Krümmungsmittelpunkt O des Bogenelements e-f sich scheiden.

Es ist klar dass $e\,f > e_1\,f_1$ und $g\,h < g_1\,h_1$. In e f herrscht also Ausdehnung, in g h dagegen Zusammendrückung. Geht man in Gedanken von e f an tiefer herab so begegnet man Faserstückchen, die weniger ausgedehnt sind als e f; geht man dagegen von g h an nach aufwärts, so begegnet man Faserstückchen die weniger zusammengepresst sind als g h; es muss also nothwendig irgendwo zwischen h und f eine Stelle geben, z. B. q, wo weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Dies gilt aber auch für jeden anderen Querschnitt, demnach muss es eine ganze Schicht o p q t geben, wo weder Ausdehnung noch Zusammenpressung vorhanden ist. Diese Schicht wollen wir die neutrale Schicht nennen und die Linie, in welcher diese Schicht durch die Ebene der Figur geschnitten wird: neutrale Faser. Diese fällt im Allgemeinen nicht zusammen mit der Axenfaser i m n k. Aus dem bisher Gesagten erkennt man bereits, dass die Spannungen grösser und grösser werden, je mehr man sich von der neutralen Schicht nach aufwärts entfernt, dass dagegen die Pressungen mehr und mehr zunehmen, je mehr man sich von der neutralen Faser nach abwärts entfernt.

Es ist wohl auch zu vermuthen, dass die Spannungsintensitäten in einer und derselben Faser, z. B. in der Faser a e f b, nicht überall gleich gross sein werden, sondern dass sie von b an bis a hin wachsen. Hierdurch erkennt man, dass es in dem ganzen Stabe Schichten von gleicher Spannung und von gleicher Pressung geben muss, und dass die neutrale Schicht die Grenze bildet zwischen den gespannten und den gepressten Schichten.

Aufstellung der Gleichgewichtsgleichungen. Zieht man durch q, Fig. 8, eine Linie s q r parallel mit e g, so ergeben sich zwei Dreiecke q s f und q r h, in welchen die in verschiedenen Entfernungen von q stattfindenden Ausdehnungen und Zusammendrückungen aller ursprünglich zwischen e_1 g_1 und f_1 h_1, Fig. 7, enthaltenen Faserstückchen zum Vorschein kommen.

Nennen wir:

ε den Modulus der Elastizität des Materials, und behandeln denselben als eine constante Grösse.

$\overline{f\,n} = z$ die Entfernung der Axenfasern von der obersten Faser ab.

$\overline{n\,w} = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens u w von den Axenfasern.

$\overline{n\,q} = \upsilon$ den Abstand der Neutralfaser von der Axenfaser im Querschnitt f h.

$\varrho = O\,m = O\,n$ den Krümmungshalbmesser des Bogenelementchens m n.

x y die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt k, dessen Abscissenaxe horizontal und dessen Ordinatenaxe vertikal gerichtet ist.

S s $\mathfrak{S}$ die Spannungsintensitäten in den Faserstücken m n u w e f.

$\Theta = \widehat{m\,O\,n}$ den Winkel, den die zu m und n gezogenen Normalen bilden.

$m_1\,n_1 = ds_0$ Fig. 7, die ursprüngliche Länge aller zwischen e_1 g_1 und f_1 h_1 enthaltenen Faserstückchen.

Dies vorausgesetzt, ist vermöge des Stabausdehnungsgesetzes

$$\overline{m\,n} = d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) = \varrho\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\overline{u\,w} = d\,s_0 \left(1 + \frac{s}{\varepsilon}\right) = (\varrho + \zeta)\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\overline{e\,f} = d\,s_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon}\right) = (\varrho + z)\,\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$\frac{1 + \frac{s}{\varepsilon}}{1 + \frac{S}{\varepsilon}} = \frac{\varrho + \zeta}{\varrho} = 1 + \frac{\zeta}{\varrho} \quad \text{oder:}$$

$$1 + \frac{s}{\varepsilon} = \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\zeta}{\varrho}\right)$$

Da jederzeit $\frac{S}{\varepsilon}$ und $\frac{\zeta}{\varrho}$ sehr kleine Grössen sind, so kann man die Produkte derselben vernachlässigen, und dann folgt aus dieser letzteren Gleichung:

$$s = S + \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Hierdurch ist die in einer Entfernung ζ oberhalb der Axenfaser herrschende Spannungsintensität ausgedrückt. Diese Spannungsintensität verschwindet für $\zeta = - \upsilon$, d. h. es ist:

$$o = S - \frac{\varepsilon}{\varrho} \upsilon$$

oder:

$$\upsilon = \frac{S \varrho}{\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Diese Gleichung bestimmt die Tiefe der Neutralfaser unterhalb der Axenfaser im Querschnitt f q h. Setzt man in (4) für ζ den Werth $z = n f$, so geht s in $\mathfrak{S}$ über und es ist:

$$\mathfrak{S} = S + \frac{\varepsilon}{\varrho} z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6$$

Theilen wir den Querschnitt f h durch horizontale Linien in unendlich viele unendlich schmale Streifen, und nennen df den Flächeninhalt des bei w befindlichen Streifens, so dürfen wir annehmen, dass in allen Punkten desselben die Spannungsintensität gleich s ist. Es ist demnach $s\,df$ die Kraft, welche alle Fasern des Querschnittes df spannt und $\zeta\, s\, df$ das statische Moment dieser Kraft, in Bezug auf eine durch n gehende, auf der Ebene der Figur senkrechte Axe. Die auf den ganzen Querschnitt f h ausgedehnten Integrale

$$\int s\, df \text{ und} \int \zeta\, s\, df \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

drücken demnach aus: das erste die Summe aller Spannungen und Pressungen, welche im Querschnitt f h vorkommen; das zweite die Summe der Momente aller Spannungen und Pressungen. Setzt man für s den Werth (4) und berücksichtiget, dass sich die Integrationen nur auf ζ, nicht aber auf S und ϱ beziehen, so erhält man:

$$\int s\, df = \int \left[S + \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \right] df = S \int df + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int \zeta\, df$$

$$\int \zeta\, s\, df = \int \zeta \left[S + \frac{\varepsilon}{\varrho} \zeta \right] df = S \int \zeta\, df + \frac{\varepsilon}{\varrho} \int \zeta^2\, df$$

Nennt man Ω den Querschnitt des Stabes, so ist: $\int df = \Omega$. Berücksichtiget man, dass die ζ vom Schwerpunkt n des Querschnittes aus gemessen werden, so erkennt man, dass $\int \zeta\, df = o$ ist und dass $\int \zeta^2\, df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Queraxe ausdrückt. Setzen wir zur Abkürzung

$$\int \zeta^2\, df = z\,E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

so werden die obigen Integrale:

$$\left.\begin{aligned} &\int s\, df = S\,\Omega \\ &\int \zeta\, s\, df = \frac{\varepsilon}{\varrho}\, z\,E \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Der Gleichgewichtszustand des Stabstückes n k erfordert, dass die inneren, am Querschnitt f h wirkenden Elastizitätskräfte mit allen äusseren, auf das Stabstück n k einwirkenden Kräften im Gleichgewicht sind. Nennt man Fig. 5, Tafel II., φ den Winkel, den die zum Punkt n der Axenfaser gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe k x bildet, so ist auch φ der Winkel, den die Richtung der Kraft P mit der Richtung der Normalen f h bildet. Zerlegt man P in zwei Kräfte $P \sin \varphi$ und $P \cos \varphi$, so ist die Richtung der ersteren senkrecht auf f h, die Richtung der letzteren parallel mit f h. Vernachlässigen wir das Gewicht des Stabes, so muss im Gleichgewichtszustand sein:

1) $P \sin \varphi$ gleich der Summe aller Spannungen und Pressungen, welche im Querschnitt f h stattfinden. 2) $P\,x$ gleich der Summe der Momente dieser Spannungen und Pressungen. 3) $P \cos \varphi$ gleich einer gewissen Abschiebungskraft T, welche den Theil f h b c des Stabes von dem Theil a f d h längs des Querschnitts f h abzushieben strebt.

Wir erhalten daher für den Gleichgewichtszustand des Stabes:

$$\left.\begin{aligned} P \sin \varphi &= \Omega\, S \\ P \cos \varphi &= T \\ P\,x &= \frac{\varepsilon}{\varrho}\, z\,E \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Der Differenzialausdruck für den Krümmungshalbmesser einer ebenen Kurve ist:

$$\varrho = \pm \frac{d s^3}{d x d^2 y} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Linie der Abscissenaxe ihre convexe oder ihre concave Seite zuwendet. Im vorliegenden Falle gilt also das untere Zeichen. Da wir eine schwache Biegung voraussetzen, so begehen wir keinen merklichen Fehler, wenn wir in (11) ds gleich dx setzen. Dann aber erhalten wir:

$$\varrho = - \frac{d x^2}{d^2 y} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Hiermit sind nun alle, zur Lösung unseres Problems erforderlichen Gleichungen aufgestellt, und wir gehen nun zur weiteren Behandlung dieser Gleichungen über.

Behandlung der aufgestellten Gleichgewichtsgleichungen Aus der ersten der Gleichungen (10) folgt $s = \frac{P \sin. \varphi}{\Omega}$

Aus der dritten der Gleichungen (10) folgt $\frac{\varepsilon}{\varrho} = \frac{P x}{E z}$ führt man diese Werthe in die Ausdrücke (4), (5), (6) ein, so erhält man:

$$s = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E z} x \zeta \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{\Omega} \sin \varphi + \frac{P}{E} x \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$\upsilon = \frac{z E}{\Omega} \frac{\sin \varphi}{x} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

In diesen Gleichungen ist noch $\sin \varphi$ unbekannt; dieser ergibt sich aus der Gleichung der Axenfaser. Zur Bestimmung derselben hat man wegen (10) und (12)

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{P}{\varepsilon z E} x \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 x - \frac{1}{3} x^3) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

wobei l die Länge des Stabes bezeichnet und die Constante der Integration so bestimmt wurde, dass für $x = o$ auch $y = o$ wird, und dass für $x = l$, $\frac{dy}{dx} = o$ ist. Nun ist aber ganz genau $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\ \varphi$, oder annähernd, weil φ stets sehr klein ist, $\frac{dy}{dx} = \sin \varphi$, demnach vermöge (17)

$$\sin.\ \varphi = \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

Führt man diesen Werth von $\sin \varphi$ in die Ausdrücke (13), (14), (15) ein, so ergiebt sich:

$$s = \frac{P}{E z} x \zeta + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (20)$$

$$\mathfrak{S} = \frac{P}{E} x + \frac{P}{\Omega} \frac{P}{2 \varepsilon z E} (l^2 - x^2) \quad \ldots \quad (21)$$

$$\upsilon = \frac{P}{2 \Omega \varepsilon} \frac{l^2 - x^2}{x} \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

und überdies hat man noch wegen (18)

$$y = \frac{P}{2 \varepsilon z E} \left(l^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Hiermit ist nun unsere Aufgabe vollständig gelöst. Die Gleichung (20) bestimmt die in irgend einem Punkt im Innern des Stabes herrschende Spannung. Die Gleichung (21) bestimmt die Spannung in jedem Punkt der oberen Faser $a b$. Die Gleichung (23) bestimmt die Gestalt der Schwerpunktfaser. Endlich die Gleichung (22) die Gestalt der Neutralfaser.

Interpretation der Resultate. Eliminirt man vermittelst (22) $l^2 - x^2$ aus (20) und (21), so findet man auch

$$s = \frac{P x}{E z} (\zeta + \upsilon) \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man die Spannungszustände im Innern des Stabes deutlich erkennen.

Betrachtet man x und υ als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (22) die Gleichung einer Hyperbel dar, da aber die wirklichen Werthe von υ nach normaler Richtung auf die Axenfaser aufzutragen sind, so bestimmt die Gleichung (22) so zu sagen eine gebogene Hyperbel.

Betrachtet man in (24) s als eine constante Grösse, so bestimmt diese Gleichung für beliebige Werthe von x diejenigen Werthe von $\zeta + \upsilon$, für welche s einen constanten Werth hat, d. h. die Gleichung (24) bestimmt die Linie, in welcher einerlei Spannung herrscht.

Betrachtet man x und $\zeta + \upsilon$ als Coordinaten eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so stellt die Gleichung (24) eine Hyperbel dar. Da aber $\zeta + \upsilon$ von der neutralen Faser aus nach normaler Richtung gegen die Schwerpunktfaser aufzutragen ist, so ist die durch (24) ausgedrückte Linie eine Hyperbel, deren Abscissenaxe nach der neutralen Faser gekrümmt ist.

In Fig. 6 und 7, Tafel II., sind die Linien dargestellt, in welchen gleiche Spannungen herrschen.

Fig. 6 stellt die Linien von gleicher Spannung dar, wenn die Biegung des Stabes unendlich klein ist, also υ gegen ζ vernachlässiget werden kann. Diese Linien sind Hyperbeln, deren Aeste gegen die Coordinatenaxen k i und k l assymptotisch verlaufen. Die Gleichung derselben folgt aus (24), wenn man $\upsilon = o$ setzt; dann wird:

$$\frac{s\,E\,z}{P} = x\,\zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Die Spannungsdifferenzen in zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Linien sind gleich gross, daher sind es auch die Ordinatendifferenzen in je zwei unmittelbar aufeinander folgenden Linien.

Nennt man ζ_0 den Werth von ζ für $x = \overline{k\,i} = l$, so hat man auch:

$$\frac{s\,E\,z}{P} = \zeta_0\,l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

demnach:

$$\zeta\,x = \zeta_0\,l\,, \quad \zeta = \zeta_0 \left(\frac{l}{x}\right) \quad \ldots\ldots \quad (27)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes kann man sehr leicht eine Kurve verzeichnen, die in einer Entfernung ζ_0 von dem Punkt i ihren Anfang nimmt.

Die grösste Spannung findet statt im Punkt a, die grösste Pressung im Punkt d. Nennt man J diese grösste Spannung bei a, so hat man zur Bestimmung derselben (wegen $\zeta = z$ und $x = l$):

$$J = \frac{P\,l}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Fig. 7 zeigt die Kurven von gleicher Spannung, wenn der Stab merklich gebogen wird, und die Neutralfaser o t merklich von der Axenfaser i k abweicht. Diese Kurven ergeben sich, wenn man zuerst vermittelst (23) die Schwerpunktsfaser i k verzeichnet, hierauf vermittelst (22) die Neutralfaser o t darstellt und das Ordinatensystem der Linien von Fig. 6 von der Linie o t aus nach Richtungen aufträgt, welche die Axenfaser normal durchschneiden. Die grösste Spannung findet im Punkt a statt und wird bestimmt, wenn man in (20) $x = l$, $\zeta = z$ setzt. Man findet

$$J = \frac{P\,l}{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

also der Form nach den gleichen Ausdruck, wie in dem Fall einer unendlich schwachen Biegung. Für $x = o$ wird [vermöge (22)] $\upsilon = \infty$, d. h. in der Nähe des Punktes k entfernt sich die Neutralfaser plötzlich unendlich rasch von der Axenfaser. Aehnliches tritt jederzeit in denjenigen Punkten eines gebogenen Stabes ein, in welchem der Krümmungshalbmesser der neutralen Linie unendlich gross wird. So ist z. B. Fig. 8, Tafel II., ein auf zwei Stützen liegender, aber zu beiden Seiten über dieselben hinausragender Stab dargestellt, der an den Enden und in der Mitte belastet ist. In den Punkten β_1 und β_2, wo die Aenderungen der Krümmungsrichtungen stattfinden, sind die Krümmungshalbmesser unendlich und die neutrale Faser des ganzen Stabes besteht in diesem Fall aus den drei Theilen λ λ_1 λ_2, deren Zweige assymptotisch gegen die Normalen α_1 β_1 γ_1 α_2 β_2 γ_2 verlaufen.

Bei den meisten Anwendungen der Elastizitätstheorie hat man es nur mit äusserst schwachen Formänderungen zu thun, so dass die Neutralfaser mit der Schwerpunktfaser zusammenfallend angenommen werden kann. Unter dieser Voraussetzung geben die Gleichungen (20) bis (23)

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{P}{E\,z}\,x\,\zeta \\ \mathfrak{S} &= \frac{P}{E}\,x \\ J &= \frac{P\,l}{E} \\ \upsilon &= o \\ y &= \frac{P}{2\,\varepsilon\,z\,E}\left(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Berechnung der Werthe von E und z. In den aufgefundenen Formeln erscheinen die nur von der Gestalt und Grösse des Querschnittes abhängigen Grössen z und E. z ist der Abstand n f, Fig. 8, Tafel I., eines Punktes f der oberen Faser, a b von der Schwerpunktfaser. z wird mithin bestimmt, indem man nach den gewöhnlichen Regeln den Schwerpunkt einer ebenen Figur sucht. Die Grösse E ist in die Rechnung eingeführt worden, indem wir gesetzt haben $E\,z = \int \zeta^2\,df$, d. h. indem wir das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende horizontale Queraxe gleichgesetzt haben dem Produkt E z. Nun ist $E = \frac{\int \zeta^2\,df}{z}$, es wird demnach der einem bestimmten Querschnitt entsprechende Werth von E gefunden, wenn man das Trägheitsmoment des Querschnittes $\int \zeta^2\,df$ sucht und dasselbe durch z dividirt.

Die Werthe von E und z für verschiedene Querschnittsformen findet man auf Tafel V. der Resultate für den Maschinenbau zusammengestellt. Zur Erläuterung wollen wir solche Berechnungen in einigen speziellen Fällen vornehmen. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment eines Querschnittes mit μ, so ist:

$$E = \frac{\mu}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

für einen rechtwinkligen Querschnitt, Fig. 9, Tafel II., dessen Breite b und Höhe h ist, hat man

$$\mu = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} b\,d\zeta\,\zeta^2 = \frac{1}{12}\,b\,h^3 \text{ und } z = \frac{h}{2}$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{1}{6}\,b\,h^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für einen kreisförmigen Querschnitt, Fig. 10, Tafel II., dessen Durchmesser d ist, hat man:

$$z = \frac{d}{2}; \quad \mu = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \zeta^2}\,d\zeta\,\zeta^2 = \frac{\pi}{64}\,d^4$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für einen Ring, Fig. 11, Tafel II., dessen Durchmesser d und d_1 sind, ist:

$$z = \frac{d}{2}, \quad \mu = \frac{\pi}{64} d^4 - \frac{\pi}{64} d_1{}^4$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} \; \frac{d^4 - d_1{}^4}{d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

In einem Querschnitt von der Form Fig. 12, Tafel II., ist:

$$z = \frac{1}{2} h \qquad \mu = \frac{1}{12} b h^3 - 2 \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{2} (b - b_1) h_1{}^3$$

demnach:

$$E = \frac{\mu}{z} = \frac{1}{6} \left[b h^3 - (b - b_1) h_1{}^3 \right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Relative oder Bruchfestigkeit.

Die grösste Spannung tritt bei a, Fig. 8, Tafel I., ein, die grösste Pressung bei d. Bezeichnen wir diese Maximalspannungen und Pressungen (auf die Einheit des Querschnittes bezogen) mit $\mathfrak{S}_m$ und $\mathfrak{P}_m$ und setzen $\overline{i\,a} = z$, $\overline{i\,d} = z_1$, so ist:

$$\frac{\mathfrak{P}_m}{\mathfrak{S}_m} = \frac{z_1}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nehmen wir an, dass die für die Biegung eines Stabes aufgefundenen Resultate nicht nur für schwache, sondern dass sie auch für beliebig starke und selbst bis zu derjenigen Biegung gelten, bei welcher entweder ein Reissen der Fasern bei a, oder ein Zerquetschen der Fasern bei d eintritt; dann bietet sich die Frage dar, ob das Reissen bei a, oder das Zerquetschen bei d eher eintritt. Nennen wir $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials, $\mathfrak{R}$ seine rückwirkende Festigkeit, und vergleichen den Quotienten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ mit $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} = \frac{z}{z_1}$, so ist leicht zu erkennen, dass bei zunehmender Biegung die Spannung $\mathfrak{S}_m$ die Grenze $\mathfrak{A}$ eher erreicht, als die Pressung $\mathfrak{P}_m$ die Grenze $\mathfrak{R}$, wenn $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} > \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$, dass dagegen die Quetschung zuerst eintritt, wenn $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$, dass endlich das Reissen bei a und das Quetschen bei d

gleichzeitig eintritt, wenn $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$. Es ist aber $\frac{\mathfrak{S}_m}{\mathfrak{P}_m} = \frac{z}{z_1}$ und demnach erhalten wir folgende Regel:

a) Bruch durch Riss, wenn $\frac{z}{z_1} > \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$

b) Bruch durch Quetschung, wenn $\frac{z}{z_1} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$

c) Bruch durch Riss und Quetschung . . . $\frac{z}{z_1} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$

Nun ist für Schmiedeeisen . . . $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \frac{5}{4}$

„ Gusseisen $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{5 \cdot 5}$

„ Holzarten $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = 2$

Der Bruch erfolgt demnach		bei Schmiedeeisen	bei Gusseisen	bei Holz
a) durch Riss bei a, wenn	$\frac{z}{z_1} >$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2
b) „ Quetschung bei d, wenn	$\frac{z}{z_1} <$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2
c) „ beides zugleich, wenn	$\frac{z}{z_1} =$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{5 \cdot 5}$	2

Ist die Querschnittsform des Körpers, dessen Festigkeit bestimmt werden soll, gegeben, so lässt sich das Tragungsvermögen, d. h. die Belastung, bei welcher der Bruch erfolgt, auf folgende Art bestimmen: Man bestimme zuerst den Schwerpunkt des Querschnittes, so ergeben sich zunächst die Werthe von z und z_1 und ergibt sich das Verhältniss $\frac{z}{z_1}$. Ist dies geschehen, so ersieht man aus der vorhergehenden Tabelle, ob der Bruch durch Riss, oder durch Quetschung, oder durch beides zugleich erfolgt.

Ist z. B. der Stab von Gusseisen und $\frac{z}{z_1} = 1$, so erfolgt der Bruch durch Riss, denn es ist in diesem Fall $\frac{z}{z_1} = 1 > \frac{1}{5 \cdot 5}$

Erfolgt der Bruch durch Riss, so ist das Tragungsvermögen:

$$P = \frac{\mathfrak{A}\, E}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Erfolgt der Bruch durch Quetschung, so ist das Tragungsvermögen:

$$P = \frac{z}{z_1} \frac{\mathfrak{R} E}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Allein es ist nicht zu übersehen, dass diese wie alle früher aufgefundenen Formeln nur dann richtig wären, wenn der Modulus der Elastizität einen unveränderlichen Werth hätte, was bei starken Biegungen nicht der Fall ist. Wegen dieser Ungenauigkeit der Gleichungen (2) und (3) ist es zweckmässiger, durch Biegungsversuche die Werthe von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}$ direkt aufzusuchen.

Die Tabelle Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau enthält in der mit $\mathfrak{B}$ überschriebenen Columne die Bruchcoeffizienten, wie sie durch Versuche gefunden wurden. Diese Coeffizienten gelten jedoch nur für Querschnitte, bei welchen $\frac{z}{z_1}$ gleich der Einheit ist, oder nicht weit davon abweicht. Für solche Querschnitte kann man also schreiben:

$$P = \frac{\mathfrak{B} E}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Günstige Querschnittsformen.

Durch die vorausgegangenen Erklärungen lernen wir kennen, unter welchen Umständen das Tragungsvermögen eines Balkens oder Stabes gross oder klein ausfällt. Zunächst ist klar, dass solche Querschnitte günstig sind, bei welchen der Bruch durch Riss und Quetschung gleichzeitig erfolgt. Für diese Querschnitte ist aber

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Für Schmiedeeisen ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}}$ nahe gleich der Einheit, sind also diejenigen Querschnittsformen günstig, welche durch zwei auf einander senkrechte durch den Schwerpunkt gehende Linien in vier congruente Theile getheilt werden. Das Rechteck und die Kreisform sind also für Schmiedeeisen angemessen, weil sich diese Formen in diesem Materiale leicht herstellen lassen. Für Holz ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = 2$, sollte also $z = 2 z_1$ sein. Allein die zusammengesetzten Holzverbindungen abgerechnet, werden jederzeit runde Stämme oder viereckige Balken angewendet, ist also $\frac{z}{z_1} = 1$ und erfolgt der Bruch durch Quetschung.

Für Gusseisen ist $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{5 \cdot 5}$, sollte man also Formen wählen, für welche $\frac{z}{z_1} = \frac{1}{5 \cdot 5}$ ist. Die T-Form, Fig. 13, Tafel II., ist dazu besonders geeignet. Nimmt man bei Gusseisen Querschnitte an, die sich durch zwei auf einander senkrechte Linien in vier congruente Theile theilen lassen, so erfolgt der Bruch durch Riss.

Was den Einfluss der Grösse und der Form des Querschnittes betrifft, so wird dieser insbesondere auch durch den Werth $E = \frac{\mu}{z}$ bestimmt.

Da im Trägheitsmoment μ die mit der biegenden Kraft parallelen Dimensionen im quadratischen, die Breitendimensionen dagegen im einfachen Maase auftreten, so ist daraus zu ersehen, dass diejenigen Querschnitte günstig sind, bei welchen das Material in grosser Entfernung von der neutralen Faser und insbesondere an der Stelle concentrirt ist, wo der Bruch durch Riss oder durch Quetschung eintritt. Das hochgestellte Rechteck, die hochgestellte Ellipse, der hohe kreisförmige oder elliptische Cylinder, ferner die an der Axenfaser durchbrochenen Formen, und bei Gusseisen die T-Form, sind daher günstige Querschnitte.

Will man dagegen einen Körper biegsam machen, wie z. B. Federn, so muss man dem Querschnitt eine geringe Höhe und grosse Breite geben. Das liegende Rechteck ist in diesem Falle angemessen.

Die Gleichung (4) zeigt, dass das Tragungsvermögen der Balkenlänge verkehrt proportional ist.

Die Anstrengung.

Das Verhältniss zwischen der Last, die ein Balken wirklich zu tragen hat, und der Last, welche seinen Bruch veranlasst, wollen wir das Maas seiner Anstrengung nennen. Einzelne spezielle Fälle abgerechnet, dürfen die Theile irgend einer Konstruktion und dürfen insbesondere die Maschinentheile nie stark angestrengt werden, denn die Konstruktionen sollen nicht nur nicht brechen, sondern sie sollen selbst merkliche Formänderungen nicht erleiden. Man sieht hieraus, dass die Konstruktionen in der Regel nicht einmal bis an ihre Elastizitätsgrenze angestrengt werden dürfen. Bei Maschinen beträgt die Anstrengung: bei Seilen $\frac{1}{3}$; Ketten $\frac{1}{4}$; Hebel $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{8}$; Wellen $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{20}$; Rädern $\frac{1}{30}$ bis $\frac{1}{20}$.

Wenn man will, kann man die Anstrengung auch beurtheilen nach dem Verhältniss zwischen der Belastung, die der Konstruktion

wirklich aufgebürdet wird und derjenigen Belastung, welche der Elastizitätsgrenze entspricht. Für die Praxis ist es jedoch ganz gleichgiltig, ob man die Anstrengung nach der einen oder nach der andern Weise beurtheilt, denn es ist ganz gleichgiltig, ob man die Regel aufstellt: ein Körper darf bis auf $\frac{1}{9}$ seines Tragungsvermögens angestrengt werden, oder die Regel: ein Körper dürfe bis zu $\frac{1}{3}$ seiner Elastizitätsgrenze angestrengt werden; wenn nur jedesmal der angemessene Quotient erfahrungsgemäss in Rechnung gebracht wird. Wir werden in der Folge die Anstrengung jederzeit nach dem zuerst aufgestellten Begriffe bemessen.

Berechnung der Querschnittsdimensionen.

Kennt man den Bruchcoeffizienten $\mathfrak{B}$ (Tafel Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau) und ist die Anstrengung bekannt, so wird hierdurch die Spannung bestimmt, welche bei a, Fig. 8, Tafel I., eintreten darf, und wenn man für einen zu construirenden Bestandtheil Querschnitte wählt, die von den besten nicht viel abweichen, so kann man für alle Fälle mit einer für praktische Zwecke hinreichenden Sicherheit die Querschnittsdimensionen eines Stabes vermittelst der Formel

$$P\,l = \mathfrak{S}_m\,E \qquad (1)$$

berechnen. (Die Ausdrücke für E findet man auf Tafel V. der Resultate). Den Kreisquerschnitt und den quadratischen ausgenommen, haben alle übrigen mehr als eine Dimension. Durch diese *Eine* Gleichung (1) können daher nicht alle Dimensionen eines zusammengesetzteren Querschnittes bestimmt werden. Diese theilweise Willkürlichkeit der Dimensionen eines zusammengesetzten Querschnittes kann man sehr oft benutzen, um verschiedenen praktisch wichtigen Nebenbedingungen zu genügen. Wenn z. B. aus einem runden Stamm ein viereckiger Balken gefertiget werden soll, so kann man das Verhältniss $\frac{h}{b}$ zwischen Höhe und Breite des Querschnittes so bestimmen, dass das Tragungsvermögen des Balkens ein Maximum wird, dies ist, wie man sich leicht überzeugt, der Fall, wenn $\frac{h}{b} = \sqrt{2} = 1{\cdot}414 = \frac{10}{7}$ genommen wird. In anderen Fällen ist es wegen der Ausführung, namentlich wegen der Kosten der Modellanfertigungen, oder auch wegen des gefälligen Ansehens, oder wegen Raumersparung etc. angemessen, nicht nur die Querschnittsform der Art nach, sondern

auch ganz bestimmte Verhältnisse zwischen den einzelnen Dimensionen des Querschnittes anzunehmen und dann kann man den Ausdruck für E jederzeit auf die Form bringen $E = a^3 H$, wobei a eine von den Abmessungen des Querschnittes und H eine reine Funktion von den angenommenen Verhältnissen zwischen den Querschnittsdimensionen bezeichnet. So z. B. kann der Ausdruck für die I-Form geschrieben werden wie folgt:

$$E = h^3 \frac{1}{6} \left\{ \frac{b_1}{h} \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 + \frac{b}{h} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 \right] \right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nimmt man also für $\frac{b_1}{h}$, $\frac{h_1}{h}$, $\frac{b}{h}$ passende Werthe an, so ist in E nichts mehr unbestimmt als h und dieser Werth ergibt sich dann aus (1) und (2). Man findet:

$$h = \sqrt[3]{\left\{ \frac{\frac{6\,P\,l}{\mathfrak{S}\,m}}{\frac{b_1}{h} \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 + \frac{b}{h} \left[1 - \left(\frac{h_1}{h} \right)^3 \right]} \right\}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Verschiedene Biegungsweisen.

Wir werden in Folgendem noch mehrere Biegungsaufgaben behandeln, wollen aber dabei von der geringen Abweichung der Neutralfaser von der Axenfaser ganz absehen, wollen uns also so benehmen, wie wenn die Schwerpunktsfaser die Neutrallinie oder die Grenze wäre von den Gebieten, in welchen Spannungen und Pressungen herrschen.

Unter dieser Voraussetzung wollen wir bestimmen:
1) die Gestalt der Schwerpunktfaser,
2) die Stellen, wo die Maximalpressungen eintreten,
3) den Betrag dieser Maximalpressungen.

Es ist $\mathfrak{S}\,E$ die Summe der statischen Momente aller in einem Querschnitte vorkommenden Spannungen und Pressungen, in Bezug auf eine, durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende, in der Ebene des Schnittes liegende aber auf die Richtung der biegenden Kraft senkrechte Drehungsaxe. Bezeichnet man durch M die algebraische Summe der statischen Momente aller äusseren Kräfte, welche jenen Spannungen und Pressungen das Gleichgewicht halten, so ist:

$$\mathfrak{S}\,E = M \quad . \; . \; , \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Dann ist aber vermöge Gleichung (6), Seite 17, wenn man s vernachlässiget:

$$\varrho \mathfrak{S} = z \varepsilon \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Durch Elimination von $\mathfrak{S}$ vermittelst (1) findet man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{\varepsilon E z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

oder auch weil für schwache Biegungen, und wenn $d^2 x = 0$ gesetzt wird $\frac{1}{\varrho} = \pm \frac{d^2 y}{d x^2}$ ist

$$\pm \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{M}{\varepsilon E z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Kennt man M als Funktion von x, so gibt diese Gleichung durch Integration die Gestalt der Schwerpunktsfaser. Aus (1) folgt:

$$\mathfrak{S} = \frac{M}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Bestimmt man diejenigen Werthe von x, für welche M ein Maximum wird, so hat man die Stelle bestimmt, wo das Maximum der Spannung eintritt. Wird dieser Werth von x in (5) eingeführt, so erhält man den Werth der Maximalspannung, d. h. den Werth von $\mathfrak{S}_m$.

Wir wollen diese allgemeine Regel auf mehrere Beispiele anwenden.

Erster Fall. Ein Stab ist an dem einen seiner Enden eingespannt, am andern Ende belastet. Das Gewicht desselben sei p und soll berücksichtiget werden. Fig. 1, Tafel III.

Wählt man das freie Ende o zum Anfangspunkt eines Coordinatensystems und setzt $o\,n = x$, $m\,n = y$, so ist annähernd $p\,\frac{x}{l}$ das Gewicht des Stabstückes $m\,o$ und es ist ferner $p\,\frac{x}{l} \times \frac{x}{2}$ annähernd das Moment dieses Gewichtes in Bezug auf die durch m gehende Axe. Die Momentensumme der Kräfte, die den Stab bei m zu brechen streben, ist demnach $M = P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}$. Die Gleichung der Schwerpunktsfaser ist demnach vermöge (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left(P\,x + \frac{p}{l}\,\frac{x^2}{2}\right)$$

Das Zeichen — ist genommen, weil die Kurve ihre concave Seite der Abscissenlinie zuwendet. Das erste Integrale dieser Gleichung ist:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(\frac{1}{2}\,P\,x^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,x^3\right) + \text{Const}$$

Für $x = \overline{o\,n_1} = l$ (annähernd) ist $\frac{d\,y}{d\,x} = o$ (genau) demnach:

$$o = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left(\frac{1}{2}\,P\,l^2 + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,l^3\right) + \text{Const}$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\,P\,(l^2 - x^2) + \frac{1}{6}\,\frac{p}{l}\,(l^3 - x^3)\right]$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\left(\frac{1}{2}\,P\,l^2 + \frac{1}{6}\,p\,l^2\right)x - \frac{1}{6}\,P\,x^3 - \frac{1}{24}\,\frac{p}{l}\,x^4\right] \quad . \; . \; . \quad (6)$$

Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x = o$ auch $y = o$ wird. Dies ist die Gleichung der Axenfaser. Für $x = l$ wird $y = m_1\,n_1 = f$ und man findet:

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{3}\,P + \frac{1}{8}\,p\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das Biegungsmoment M wird ein Maximum für $x = l$ und ist: $M_m = P\,l + \frac{p\,l}{2}$.

Die Maximalspannung an der Befestigungsstelle ist demnach vermöge (5):

$$\mathfrak{S}_m = \frac{P\,l + \frac{p}{2}\,l}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Zweiter Fall. Der Stab liegt mit beiden Enden auf Unterstützungen, ist in der Mitte belastet und hat ein Gewicht p. Fig. 2, Tafel III.

Es sei $2\,l$ die Entfernung der Stützpunkte, $2\,P$ die Belastung in der Mitte, so ist $P + \frac{1}{2}\,p$ der Druck, welchen jeder Stützpunkt

auszuhalten hat. Nimmt man B als Anfangspunkt der Coordinaten und setzt für irgend einen Punkt m der Axenfaser B n = x, m n = y, so ist das Kraftmoment, welches in dem Querschnitte bei m die Spannungen und Pressungen hervorruft:

$$\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)x - \frac{p}{2\,l}\,x\,\frac{x}{2} = M$$

Demnach erhält man wegen (4):

$$-\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)x - \frac{p}{4\,l}\,x^2}{\varepsilon\,E\,z}$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)x^2 - \frac{p}{12\,l}\,x^3 + \text{Const}\right]$$

Für $x = l$ wird $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$, demnach:

$$0 = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)l^2 - \frac{p}{12\,l}\,l^3 + \text{Const}\right]$$

Die Differenz dieser Ausdrücke gibt:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\left(l^2 - x^2\right) - \frac{p}{12\,l}\left(l^3 - x^3\right)\right]$$

Die nochmalige Integration liefert:

$$y = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\left(l^2\,x - \frac{1}{3}\,x^3\right) - \frac{p}{12\,l}\left(l^3\,x - \frac{1}{4}\,x^4\right)\right] \quad (9)$$

Die Senkung C D = f beträgt:

$$f = \frac{1}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{2}\left(P + \frac{1}{2}\,p\right)\frac{2}{3}\,l^3 - \frac{p}{12\,l}\,\frac{3}{4}\,l^3\right]$$

$$f = \frac{l^3}{\varepsilon\,E\,z}\left[\frac{1}{3}\,P + \frac{10}{96}\,p\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Das Moment M wird innerhalb $x = o$ und $x = l$ erst bei $x = l$ ein Maximum und beträgt dort:

$$M_{max} = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Für die bei D eintretende grösste Spannung ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P + \frac{p}{4}\right) l$$

Dritter Fall. Ein Stab liegt mit seinen Enden auf Stützen, ist in Entfernungen c von denselben mit P und P belastet; sein Eigengewicht beträgt p. Fig. 3, Tafel III.

Setzt man für einen zwischen E und D gelegenen Punkt m $Bn = x$, $mn = y$. Für einen zwischen E und B gelegenen Punkt m_1 dagegen $Bn_1 = x_1$, $m_1 n_1 = y_1$, so sind die Momente M und M_1 welche den Querschnitten bei m und m_1 entsprechen

$$M = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x - P(x - c) - \frac{p}{2l} x \frac{1}{2} x$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{2l} x_1 \frac{1}{2} x_1$$

oder:

$$M = Pc + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4l} x^2$$

$$M_1 = \left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1^2$$

Die Gleichungen der Stabstücke B E und E F sind demnach, vermöge (4):

$$-\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[Pc + \frac{1}{2} p x - \frac{p}{4l} x^2 \right]$$

$$-\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(P + \frac{1}{2} p\right) x_1 - \frac{p}{4l} x_1^2 \right]$$

Die erste dieser Gleichungen gilt von $x = c$ bis $x = l$, die zweite von $x_1 = o$ bis $x_1 = c$.

Im Punkt E, d. h. für $x = x_1 = c$, müssen beide Gleichungen einerlei Ordinate und einerlei Tangente geben, d. h. es muss für $x = x_1 = c$, $y = y_1$ und muss $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ werden.

Die ersten Integrale dieser zwei Gleichungen sind:

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c x + \frac{1}{4} p x^2 - \frac{p}{12 l} x^3\right] + C$$

$$-\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12 l} x_1^3\right] + C_1$$

wobei C und C_1 die Constanten der Integrale bedeuten. Wegen $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx_1}$ für $x = x_1 = c$ ist:

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c^2 + \frac{1}{4} p c^2 - \frac{p}{12 l} c^3\right] + C =$$
$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{c^2}{2} - \frac{p c^3}{12 l}\right] + C_1$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P c^2}{2} = (C_1 - C)\,\varepsilon E z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Eine wiederholte Integration gibt nun weiter:

$$-y = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c \frac{x^2}{2} + \frac{1}{12} p x^3 - \frac{p}{48 l} x^4\right] + C x + B \quad \ldots \quad (12)$$

$$-y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{x_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} x_1^4\right] + C_1 x_1 + B_1 \quad \ldots \quad (13)$$

wobei abermals B und B_1 die Constanten der Integration bezeichnen. Da für $x_1 = o$, auch $y_1 = o$ ist, so ist $B_1 = o$, nun ist aber für $x = x_1 = c$ $y = y_1$ daher:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\frac{P c^3}{2} + \frac{1}{12} p c^3 - \frac{p c^4}{48 l}\right] + C c + B = \\ \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P + \frac{1}{2} p\right)\frac{c^3}{6} - \frac{p}{48 l} c^4\right] + C_1 c \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (14)$$

Endlich ist für $x = l$ $\frac{dy}{dx} = o$, demnach:

$$\frac{1}{\varepsilon E z}\left[P c l + \frac{1}{4} p l^2 - \frac{p}{12 l} l^3\right] + C = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (15)$$

Aus den Ausdrücken (11), (14), (15) folgen, mit Berücksichtigung, dass $B_1 = 0$ ist, die Werthe von C C_1 B. Die Gleichung (14) reduzirt, gibt:

$$\frac{1}{3} P c^3 \left[(C - C_1)\, c + B\right] \varepsilon E z = 0$$

Für $C_1 - C$ den Werth gesetzt, der aus (11) folgt, erhält man:

$$B = -\frac{1}{6} \frac{P c^3}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Nun folgt aus (15):

$$C = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17)$$

und vermittelst dieses Werthes folgt aus (11):

$$C_1 = -\frac{P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}}{E \varepsilon z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

Führt man diese drei Werthe (16), (17), (18) in (12) und (13) ein, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{1}{\varepsilon E z}&\left[\frac{1}{6} P c^3 + \left(P c l + \frac{1}{6} p l^2\right) x\right. \\ &\left. - \frac{1}{2} P c x^2 - \frac{1}{12} p x^3 + \frac{p}{48 l} x^4\right] \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

$$y_1 = \frac{1}{\varepsilon E z}\left[\left(P c l + \frac{1}{6} p l^2 - \frac{P c^2}{2}\right) x_1 - \left(P + \frac{1}{2} p\right) \frac{x_1^3}{6} + \frac{p}{48 l} x_1^4\right] (20)$$

Was das Tragungsvermögen eines in der Art belasteten Balkens betrifft, so ergibt sich dieses aus dem Maximalwerth der Momente M und M_1; der Werth von M_1 wird am grössten für $x_1 = c$, der Werth von M ist für $x = c$ gleich dem Werth von M_1 für $x_1 = c$. Allein der Werth von M ist für $x = c$ der kleinste und wird am grössten für $x = l$, denn $\frac{d M}{d x} = \frac{1}{2} p - \frac{p x}{2 l} = \frac{p}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$

wird gleich Null für $x = l$, die Maximalspannung tritt also bei D ein und ist:

$$P c + \frac{1}{4} p l$$

Es ist demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \left(P c + \frac{1}{4} p l\right) \quad \ldots \ldots, \quad (21)$$

Vierter Fall. Der Stab liegt auf zwei Unterstützungen und ist in einem Punkt, der von diesen Unterstützungen um c und c_1 entfernt ist, mit $2P$ belastet. Das Gewicht des Stabes ist p. Fig. 4, Tafel III.

Setzt man $\overline{B n} = x$, $m n = y$, $A n_1 = x_1$, $n_1 m_1 = y_1$ das Moment für den Punkt m gleich M, jenes für den Punkt m_1 gleich M_1, so hat man:

Belastung des Punktes B $= \frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}$

" " " A $= \frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}$

und man findet nun:

$$\left.\begin{aligned} M &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{2 l} x \frac{x}{2} \\ M_1 &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{2 l} x_1 \frac{x_1}{2} \end{aligned}\right\} \quad . . . (22)$$

Die Gleichungen der Kurvenstücke B D und A D sind demnach:

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) x - \frac{p}{4 l} x^2 = - \varepsilon E z \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) x_1 - \frac{p}{4 l} x_1^2 = - \varepsilon E z \frac{d^2 y_1}{d x_1^2}$$

Die ersten Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\left.\begin{aligned} - \varepsilon E z \frac{d y}{d x} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{x^2}{2} - \frac{p}{12 l} x^3 + C \\ - \varepsilon E z \frac{d y_1}{d x_1} &= \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{x_1^2}{2} - \frac{p}{12 l} x_1^3 + C_1 \end{aligned}\right\} \quad . . (23)$$

wobei C und C_1 die Constanten der Integration bezeichnen.

Zieht man zum Punkt D eine Berührungslinie und nennt α und α_1 den Winkel, welcher dieselbe mit den positiven Richtungen von x und x_1 bildet, so ist $\alpha + \alpha_1 = \pi$, demnach $\tang \alpha + \tang \alpha_1 = 0$.

Allein es ist $\tang \alpha$ der Werth von $\frac{dy}{dx}$ für $x = c$ und $\tang \alpha_1$ der Werth von $\frac{dy_1}{dx_1}$ für $x = c_1$, demnach wegen der Gleichung (23):

$$0 = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{c^2}{2} - \frac{p c^3}{12 l} + C \\ \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{c_1^2}{2} - \frac{p c_1^3}{12 l} + C_1 \end{cases} \quad \ldots \ldots (24)$$

Integrirt man die Gleichungen (23), so folgt ferner:

$$\begin{rcases} -\varepsilon E z y = \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{p}{48 l} x^4 + C x + D \\ -\varepsilon E z y_1 = \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{x_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} x_1^4 + C_1 x_1 + D_1 \end{rcases} \quad \ldots (25)$$

Beide Integrations-Constanten sind jedoch Null, weil für $x = 0$ und $x_1 = 0$ auch y und y_1 verschieden. Dann ist aber für $x = c$ und $x_1 = c_1$, $y = y_1 = f$. Demnach:

$$\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{c^3}{6} - \frac{p}{48 l} c^4 + C c = \left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{c_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} c_1^4 + C_1 c_1 \quad . \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (24) und (26) findet man für C und C_1 nachstehende Werthe:

$$\begin{rcases} C = \dfrac{-\left(\frac{1}{2} p + \frac{P c_1}{l}\right) \frac{c^2}{2} \left(\frac{c}{3} + c_1\right) - \left(\frac{1}{2} p + \frac{P c}{l}\right) \frac{c_1^3}{3} + \frac{p c_1^4}{16 l} + \frac{p c^3}{12 l} \left[\frac{c}{4} + c_1\right]}{c + c_1} \\ C_1 = \dfrac{-\left(\frac{1}{2} p + \frac{P c}{l}\right) \frac{c_1^2}{2} \left(\frac{c_1}{3} + c\right) - \left(\frac{1}{2} p + \frac{P c_1}{l}\right) \frac{c^3}{3} + \frac{p c^4}{16 l} + \frac{p c_1^3}{12 l} \left[\frac{c_1}{4} + c\right]}{c + c_1} \end{rcases} (27)$$

Diese Werthe sind nun in die Gleichung der Kurve zu setzen, nämlich in

$$\begin{rcases} y = -\frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c_1}{l}\right) \frac{x^3}{6} - \frac{p}{48 l} x^4 + C x\right] \\ y_1 = -\frac{1}{\varepsilon E z} \left[\left(\frac{1}{2} p + P \frac{c}{l}\right) \frac{x_1^3}{6} - \frac{p}{48 l} x_1^4 + C_1 x_1\right] \end{rcases} \quad . \; . \quad (28)$$

Die Momente M und M_1 wachsen von B und A an bis D hin und erreichen demnach ihr Maximum in D; dieses ist für beide:

$$P \frac{c c_1}{l} + \frac{1}{2} p c \left[1 - \frac{c}{2 l} \right] = P \frac{c c_1}{l} + \frac{p c c_1}{4 l} = \frac{c c_1}{l} \left[P + \frac{p}{4} \right]$$

Es wird demnach:

$$\mathfrak{S}_m E = \frac{c c_1}{l} \left[P + \frac{p}{4} \right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

und bei D ist der gefährliche Querschnitt.

Fünfter Fall. Fig. 5, Tafel III. Der Stab ist bei A befestiget, bei C unterstützt, bei B belastet.

Es sei:

l der Horizontalabstand der Punkte A und C.

c der Horizontalabstand der Punkte B und C.

$\left. \begin{array}{l} x = C n \\ y = m n \end{array} \right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen B und C.

$\left. \begin{array}{l} x_1 = C n_1 \\ y_1 = m_1 n_1 \end{array} \right\}$ die Coordinaten eines Punktes zwischen A und B.

P die Belastung bei B.

X der unbekannte Druck gegen die Stütze C.

α der Winkel, den die zum Punkt B gezogene Berührungslinie mit der Axe C A bildet.

Y = B D die Ordinate des Punktes B.

Setzt man noch zur Abkürzuug:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{X}{\varepsilon E z} = m \\[2ex] \frac{P}{\varepsilon E z} = n \end{array} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

und vernachlässiget das Gewicht des Stabes, so sind die Gleichungen der Kurvenstücke B C und B A:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - m x, \quad \frac{d^2 y_1}{d x_1^{\,2}} = (n - m) x_1 - n c \quad \ldots \quad (31)$$

Die Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{m x^2}{2} + A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

$$y = -\frac{m x^3}{6} + A x + B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$

$$\frac{d y_1}{d x_1} = (n - m) \frac{x_1^2}{2} - n c x_1 + A_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

$$y_1 = (n - m) \frac{x_1^3}{6} - n c \frac{x_1^2}{2} + A_1 x + B_1 \quad . \; . \; . \quad (35)$$

wobei $A\ B\ A_1\ B_1$ die Constanten der Integrationen bedeuten;

für $x = o$ soll werden $y = o$, daher hat man wegen (33) . $B = o$

„ $x = c$ „ „ $y = Y$, „ „ „ „ (33)

$$Y = -m \frac{c^3}{6} + A c$$

„ $x = c$ „ „ $\frac{d y}{d x} = \operatorname{tang} \alpha$, daher hat man wegen (32)

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{m c^2}{2} + A$$

„ $x_1 = l$ „ „ $y_1 = o$, daher hat man wegen (35)

$$o = (n - m) \frac{l^3}{6} - n c \frac{l^2}{2} + A_1 l + B_1$$

„ $x_1 = c$ „ „ $y_1 = Y$, daher hat man wegen (35)

$$Y = (n - m) \frac{c^3}{6} - \frac{n c^3}{2} + A_1 c + B_1$$

„ $x_1 = c$ „ „ $\frac{d y_1}{d x_1} = \operatorname{tang} \alpha$, daher hat man wegen (34)

$$\operatorname{tang} \alpha = (n - m) \frac{c^2}{2} - n c^2 + A_1$$

„ $x_1 = l$ „ „ $\frac{d y_1}{d x_1} = o$, daher hat man wegen (34)

$$o = (n - m) \frac{l^2}{2} - n c l + A_1$$

Aus diesen Bedingungsgleichungen findet man:

$$m = n \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{c}{l} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{c}{l} \right)^3 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

$$Y = \frac{c^2 l}{2} (m + n) - \frac{c^3}{6} (m + 3 n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} (l - c) \left[m (l + c) - n (l - c) \right] \quad . \; . \; . \quad (38)$$

$$A = \frac{1}{2} m l^2 - \frac{1}{2} n (l - c)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$B = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$A_1 = n c l - (n - m) \frac{l^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$B_1 = - \frac{1}{2} n c l^2 + \frac{1}{3} (n - m) l^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Der Ausdruck (36) bestimmt wegen (30) den Druck X, welchen die Unterstützung C erleidet. Substituirt man den Werth von m, welchen (36) darbietet, in die folgenden Ausdrücke, so erhält man alle übrigen Grössen Y $\tan \alpha$ A B A_1 B_1 ausgedrückt durch die gegebenen Grössen der Aufgabe, und die Gleichungen (33) und (35) geben dann die Formen der Kurvenstücke B C und B A.

Nun ist noch die Frage zu beantworten, an welcher Stelle des Stabes das Maximum der Spannungsintensität eintritt. Dieses Maximum tritt an derjenigen Stelle ein, für welche der Krümmungshalbmesser den kleinsten Werth hat, für welchen demnach

$$m x \text{ oder } (m - n) x_1 + n c$$

am grössten wird.

Es sei $m > n$, was wegen (36) der Fall ist, wenn

$$\frac{1}{2} \left(\frac{c}{l}\right)^3 > \frac{3}{2} \left(\frac{c}{l}\right)$$

oder wenn

$$\left(\frac{c}{l}\right) > \sqrt{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Dann wird $(m - n) x_1 + n c$ am grössten für den grössten Werth von x_1, daher für $x_1 = l$ und dieser grösste Werth ist dann:

$$(m - n) l + n c$$

Der grösste Werth von $m x$ ist dagegen $m c$. Die Differenz dieser beiden Maxima ist:

$$m c - [(m - n) l + n c] = - (m - n) (l - c)$$

ist also, weil $m > n$ und $l > c$ ist negativ. Die Maximalspannung tritt demnach, wenn $m > n$ ist, in A ein.

Es sei dagegen $m < n$ oder $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$ dann wird $(m-n)\,x_{,} + n\,c$ am grössten für den kleinsten Werth von $x_{,}$, also für $x_{,} = c$ und dieses Maximum wird $(m-n)\,c + n\,c = m\,c$, das Maximum von $m\,x$ ist aber ebenfalls gleich $m\,c$. Die Maximalspannung tritt also, wenn $m < n$ oder $\frac{c}{l} < \sqrt{3}$ ist, im Punkt B ein.

Biegung durch Zusammendrückung.

Aufstellung der Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes. Wenn ein langer stabförmiger Körper Fig. 6, Tafel III. auf eine Unterlage A_2 aufrecht gestellt und dann einem Vertikaldruck P ausgesetzt wird, tritt zunächst eine Zusammendrückung des Stabes ein, kann aber auch gleichzeitig eine bleibende Biegung entstehen. Diesen Gleichgewichtszustand wollen wir untersuchen, wobei wir abermals die Voraussetzungen machen, welche Seite 13 für die gewöhnliche Biegung ausgesprochen wurden.

Es sei $A\,A_{,}\,A_2$ Fig. 6 und 7, Tafel III. die Schwerpunktsfaser des im Allgemeinen zusammengedrückten und gebogenen Stabes $C\,B\,C_2\,B_2$.

Zieht man durch irgend einen Punkt m der Schwerpunktsfaser eine Normallinie $m_3\,m\,q$, so wird in derselben irgend ein Punkt m_2 zu finden sein, in welchem weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Da dies von jedem Normalquerschnitt gesagt werden kann, so wird es überhaupt eine stetige Linie $D\,D_{,}\,D_2$ geben, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammenpressung stattfindet, und diese Linie ist die neutrale Linie. Dieselbe muss aber nicht in den Raum fallen, den der Stab einnimmt, sie kann auch ausserhalb dieses Raumes fallen, und dann ist die Neutrallinie nur ein geometrisches Gebilde, welchem keine Realität entspricht. In der Figur liegt die Neutrallinie theils innerhalb, theils ausserhalb des Stabes. An der linken Seite der Linie herrscht Ausdehnung, an der rechten Zusammenpressung.

Wir nehmen $A\,A_2$ als Abscissenaxe und nennen

$\left.\begin{array}{l} A\,n = x \\ m\,n = y \end{array}\right\}$ die Coordinaten eines Punktes m der Schwerpunktfaser.

$m\,m_2 = \upsilon$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktsfaser. Diese Entfernung gemessen in der Richtung der Normale.

$m\,m_{,} = \zeta$ die Entfernung irgend einer zusammengedrückten Faser von der Schwerpunktsfaser, ebenfalls gemessen wie υ.

$\left.\begin{array}{l} m\,m_3 = z \\ m\,q = z_{,} \end{array}\right\}$ die Entfernungen der Schwerpunktsfaser von den Kantenfasern.

$\mathfrak{P}$ die Intensität der Pressung im Punkte m der Schwerpunktsfaser.

$\widehat{n\,m\,q} = \varphi$ Winkel, den die Normale $m\,q$ mit der Ordinatenrichtung bildet. Es ist vollkommen genau $\operatorname{tang}\varphi = \frac{d\,y}{d\,x}$.

Ω den Querschnitt des Stabes.

p die Intensität der Pressung bei m_1.

Dies vorausgesetzt, findet man ganz auf ähnliche Weise, wie in dem Fundamentalproblem der gewöhnlichen Biegung:

$$p = \mathfrak{P} - \frac{\varepsilon}{\varrho}\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$v = \mathfrak{P}\frac{\varrho}{\varepsilon} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$\int p\,d\,f = \mathfrak{P}\,\Omega \quad = \text{Summe der Pressungen.}$$

$$\int \zeta\,p\,d\,f = \frac{\varepsilon}{\varrho}\,z\,E = \text{Summe der Momente.}$$

Zerlegt man P in zwei Kräfte, $P\cos\varphi$ und $P\sin\varphi$, so ist es die erstere derselben, welche die Zusammendrückung der Fasern im Querschnitt $m_3\,q$ hervorbringt, und man erhält demnach:

$$\mathfrak{P}\,\Omega = P\cos\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$P\,y = \frac{\varepsilon}{\varrho}\,z\,E \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Es ist aber auch annähernd:

$$\varrho = -\frac{d\,x^2}{d^2 y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen enthalten die Lösung der Aufgabe.

Eliminirt man aus (1) und (2) $\mathfrak{P}$ und $\frac{\varrho}{\varepsilon}$ vermittelst (3) und (4) so findet man:

$$p = \frac{P\cos\varphi}{\Omega} - \frac{P}{E\,z}\,y\,\zeta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

$$v = \frac{E\,z\cos\varphi}{\Omega\,y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Aus (4) und (5) folgt aber:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P}{\varepsilon z E} y = 0 \quad \text{. (8)}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{P}{\varepsilon z E} = k^2 \quad \text{. (9)}$$

so ist das Integrale von (8):

$$y = \mathfrak{M} \sin k x + \mathfrak{N} \cos k x \quad \text{. (10)}$$

wobei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ die Constanten der Integration bedeuten. Da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist, so muss $\mathfrak{N} = 0$ sein. Daher hat man:

$$y = \mathfrak{M} \sin k x \quad \text{. (11)}$$

und es bedeutet $\mathfrak{M}$ die grösste Ausbiegung bei A_1 Fig. 6, Tafel III.

Setzt man $\overline{A A_2} = c$, so ist für $x = c$, $y = 0$ demnach:

$$\sin k c = 0,$$

Der kleinste von 0 verschiedene Winkel, für welchen das Sinus gleich Null wird, ist π, wir erhalten daher:

$$k c = \pi, \quad k = \frac{\pi}{c} \quad \text{. (12)}$$

Setzt man in (6) $\zeta = 0$, so gibt dieser Ausdruck die im Punkte m der Schwerpunktfaser herrschende Spannungsintensität, und diese ist $\frac{P \cos \varphi}{\Omega}$.

Betrachtet man φ als eine unendlich kleine Grösse, von welcher die zweiten und höheren Potenzen vernachlässiget werden dürfen, so kann man $\cos \varphi = 1$ setzen und dann wird die Pressungsintensität in der Axenfaser constant gleich $\frac{P}{\Omega}$. Nennt man l die Länge des Stabes im natürlichen Zustand, so ist:

$$l \left(1 - \frac{P}{\Omega} \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{. (13)}$$

die Länge der gebogenen und zusammengedrückten Axenfaser. Diese Länge ist aber auch:

$$2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \mathfrak{M}^2 k^2 \operatorname{Cos}^2 k x}$$

Man hat daher die Gleichung:

$$l\left(1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right) = 2\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \mathfrak{M}^2 k^2 \cos^2 k x} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Allein wenn φ unendlich klein ist, ist es auch $\mathfrak{M}$. Man kann daher schreiber:

$$\sqrt{1 + \mathfrak{M}^2 k^2 \cos^2 k x} = 1 + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 k^2 \cos^2 k x$$

demnach:

$$\int_0^{\frac{c}{2}} dx \sqrt{1 + \mathfrak{M}^2 k^2 \cos^2 k x} = \int_0^{\frac{c}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 k^2 \cos^2 k x\right] dx$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 k^2 \int_0^{\frac{c}{2}} \cos^2 k x \, dx$$

$$= \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^2 k \frac{k c}{4} = \frac{c}{2}\left[1 + \frac{1}{4} k^2 \mathfrak{M}^2\right]$$

die Gleichung (14) wird demnach:

$$l\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] = c\left[1 + \frac{1}{4} k^2 \mathfrak{M}^2\right]$$

und hieraus folgt:

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l}{c}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1}$$

oder wenn man für c seinen Werth $c = \frac{\pi}{k}$ aus (12) einführt:

$$\mathfrak{M} = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Hiermit ist nun die grösste Ausbiegung des Stabes berechnet. Allein dieser Ausdruck gibt nicht immer reelle Werthe, denn wenn P klein ist, ist auch vermöge (9) k klein. Im Gleichgewichtszustand kann also nur dann eine Biegung vorhanden sein, wenn P oder k so gross ist, dass der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck positiv ist, d. h. wenn

$$\frac{l\,k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\frac{1}{\varepsilon}\right] > 1$$

Nennt man Q denjenigen Werth von P, welcher den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gleich Null macht, so ist Q die grösste Belastung, welche der Stab gerade aufrecht stehend tragen kann, ohne eine Biegung anzunehmen. Mit Berücksichtigung von (9) ist für diesen Werth von Q

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\, z\, E}}\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right] = 1$$

oder auch wenn man $\frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}$ gegen die Einheit vernachlässiget:

$$\frac{l}{\pi}\sqrt{\frac{Q}{\varepsilon\, z\, E}} = 1$$

demnach:

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Diese Gleichung (16) kann auch direkt aus (12), nämlich aus $k = \frac{\pi}{c}$ erschlossen werden. Es ist nämlich wegen (9) $k^2 = \frac{P}{\varepsilon\, z\, E}$ demnach:

$$\frac{P}{\varepsilon\, z\, E} = \frac{\pi^2}{c^2}$$

$$P = \pi^2\,\frac{1}{c^2}\,\varepsilon\, z\, E$$

Diese Gleichung bestimmt also die Belastung, für welche eine gewisse Zusammenbiegung eintritt. Setzt man für c seinen grössten Werth, so erhält man diejenige Belastung, welche die kleinste Zusammenbiegung bewirkt. c wird aber am grössten und wird unendlich nahe gleich $l\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]$ wenn die Biegung verschwindet. Setzt

man demnach in obige Gleichung für $c = l\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]$ und $P = Q$ so erhält man:

$$Q = \frac{\pi^2\,\varepsilon\,z\,E}{l^2\left[1 - \frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}\right]^2}$$

oder auch weil $\frac{Q}{\Omega\,\varepsilon}$ gegen 1 vernachlässiget werden kann:

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2}$$

Allein diese kleinste Belastung Q, welche im Stande ist eine Biegung hervorzubringen, ist gleich der grössten Belastung, die der Körper ohne sich zu biegen, also aufrecht stehend, tragen kann.

Fassen wir nun alle Ergebnisse unserer Untersuchung zusammen, so erhalten wir Folgendes:

1) Der Stab ist im Gleichgewichtszustand nur zusammengedrückt und nicht gebogen, so lange die Belastung P gleich oder kleiner ist, als:

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

2) Die grösste Belastung, welche ein Stab aufrecht stehend zu tragen vermag, ist:

$$Q = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

3) Ist die Belastung P grösser als dieser Werth von Q, so ist der Stab im Gleichgewichtszustand nicht nur comprimirt, sondern auch gebogen. Die grösste Ausbiegung M ist, wegen (15)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{2}{k}\sqrt{\frac{l\,k}{\pi}\left[1 - \frac{P}{\Omega}\,\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1} \\ \text{wobei}\quad k &= \sqrt{\frac{P}{\varepsilon\,z\,E}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

4) Im gebogenen Zustand ist die Gleichung der Schwerpunktfaser vermöge (11)

$$y = \mathfrak{M}\,\sin k\,x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

5) Die Intensität p der Pressung in irgend einem Punkte des gebogenen Stabes ist vermöge (6):

$$p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

6) Die Entfernung υ der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser ist vermöge (7)

$$\upsilon = \frac{E z \cos \varphi}{\Omega y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

7) Zur Bestimmung des Winkels φ hat man die Gleichung:

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{d y}{d x} = \mathfrak{M}\, k \cos k x$$

Vermittelst der Gleichung (22) kann die Gestalt der Neutralfaser bestimmt werden, wenn vorerst die Axenfaser vermittelst (20) ermittelt ist.

Biegung eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Wir wollen uns die Aufgabe vorlegen, den Gleichgewichtszustand zu bestimmen, der in einem ursprünglich krummen Stab eintritt, wenn auf denselben äussere Kräfte einwirken; beschränken uns jedoch auf den Fall, dass die Axenlinie des Stabes im ursprünglichen Zustande eine ebene Kurve ist, und dass die Angriffspunkte und die Richtungen aller äusseren Kräfte in der Ebene der Axenkurve liegen. Wir können uns zu diesen Untersuchungen der Figuren 7 und 8, Tafel I., bedienen, wenn wir uns so benehmen, wie wenn die Axenlinie $l_1\, n_1\, m_1\, k_1$ krumm gezeichnet, und $e_1\, g_1$ $f_1\, h_1$ die zu den Punkten m_1 und n_1 gehörigen Normalen wären.

Nennen wir für den natürlichen Zustand des Stabes, Fig. 7, Tafel I.:

ds_0 die Länge des Bogenelements $m_1\, n_1$.

ϱ_0 den Krümmungshalbmesser des Bogenelements $m_1\, n_1$.

$d\,\Theta_0$ den unendlich kleinen Winkel, unter welchem sich die Normalen $e_1\, g_1$ $f_1\, h_1$ im Krümmungsmittelpunkt schneiden.

$n_1\, v_1 = \zeta$ die Entfernung irgend eines Faserstückchens $u_1\, v_1$ von der Schwerpunktfaser.

$n_1\, f_1 = z$, $n_1\, h_1 = z_1$ die Entfernungen der obersten und der untersten Faser von der Schwerpunktfaser.

Nennen wir ferner für den durch die äusseren Kräfte deformirten Stab, Fig. 8, Tafel I.:

ϱ den Krümmungshalbmesser des Bogenelements m n.

$d\Theta$ den unendlich kleinen Winkel m o n, den die Richtungen der zu m und n gezogenen Normalen einschliessen.

Ω den Querschnitt des Stabes.

$$\left.\begin{array}{l} n\,v = \zeta \\ n\,f = z \\ n\,h = z_{\prime} \end{array}\right\} \text{wie im natürlichen Zustand des Stabes.}$$

S die im Faserelement m n herrschende Spannungsintensität.

Für den Fall, dass m n nicht ausgedehnt, sondern zusammengedrückt ist, ist S eine Pressung und daher negativ in Rechnung zu bringen.

$\overline{n\,q} = \upsilon$ die Entfernung der Neutralfaser von der Schwerpunktfaser.

σ die im Faserelement u v herrschende Spannungsintensität.

x y die Coordinaten eines Punktes n der Schwerpunktfaser in Bezug auf ein durch einen beliebigen Punkt k gelegtes rechtwinkeliges Coordinatensystem.

φ den Winkel, den die zum Punkt n gezogene Berührungslinie mit der x-Axe bildet. Dann ist genau $\tan\varphi = \frac{dy}{dx}$

ε den Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem der Stab besteht.

M die Summe der statischen Momente aller äusseren auf das Stabstück n k in dem Sinne einwirkenden Kräfte, dass dieselben eine Biegung hervorrufen, wodurch eine Zunahme der Krümmung entsteht, oder ϱ kleiner als ϱ_0 wird. Diese Momente sind zu nehmen in Bezug auf eine durch n gehende, auf der Ebene der Axenlinie senkrechte Drehungsaxe.

K die algebraische Summe aller äusseren auf das Stabstück n k einwirkenden Kräfte, deren Richtungen parallel sind zu der zum Punkt n der Axenlinie gehörenden Tangente. Diese Kräfte sind also die zur Tangente an n parallelen Componenten, welche durch Zerlegung der wirklich einwirkenden äusseren Kräfte erhalten werden, und sie sind positiv oder negativ in Rechnung zu bringen, je nachdem sie eine Ausdehnung oder eine Zusammendrückung der zwischen e g und f h enthaltenen Faserstückchen hervorzubringen streben.

Dies vorausgesetzt hat man nun:

$$\overline{m_{\prime}\,n_{\prime}} = ds_0 = \varrho_0\, d\,\Theta_0\,, \qquad \overline{u_{\prime}\,v_{\prime}} = (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0\,,$$

$$\overline{m\,n} = \varrho\, d\Theta = d\,s_0 \left(1 + \frac{S}{\varepsilon}\right) \quad \overline{u\,v} = (\varrho + \zeta)\, d\,\Theta$$

Hieraus folgt: $\overline{u\,v} - \overline{u_1\, v_1} = (\varrho + \zeta)\, d\,\Theta - (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 =$

$$\left(1+\frac{\zeta}{\varrho}\right)\varrho\, d\,\Theta - \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\varrho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1+\frac{\zeta}{\varrho}\right) ds_0 \left(1+\frac{S}{\varepsilon}\right) - \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0$$

$\overline{u\,v} = \overline{u_1\, v_1}$ ist aber die Ausdehnung der Faser, deren natürliche Länge gleich $\overline{u_1\, v_1} = (\varrho_0 + \zeta)\, d\,\Theta_0 = \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\varrho_0\, d\,\Theta_0 = \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right) ds_0$ war, und da die bei v wirkende Spannungsintensität σ ist, so hat man auch $\overline{u\,v} - \overline{u_1\, v_1} = \overline{u_1\, v_1}\ \frac{\sigma}{\varepsilon}$, wir erhalten daher:

$$\left(1+\frac{\zeta}{\varrho}\right) d\,s_0 \left(1+\frac{S}{\varepsilon}\right) - \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0 = \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right) d\,s_0\ \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

oder:

$$\left(1+\frac{\zeta}{\varrho}\right)\left(1+\frac{S}{\varepsilon}\right) = \left(1+\frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)$$

In allen Fällen der Anwendung sind $\frac{\zeta}{\varrho}\ \frac{\zeta}{\varrho_0}\ \frac{S}{\varepsilon}\ \frac{\sigma}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen, deren Produkte vernachlässiget werden können. Unter dieser Voraussetzung folgt aus der letzten Gleichung:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\zeta \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Hierdurch ist nun die Spannungsintensität in einer Entfernung ζ oberhalb der Axenfaser berechnet. Setzen wir in diesen Ausdruck $\zeta = -\,\upsilon$, so muss σ gleich Null werden, denn die Neutralfaser ist ja diejenige Faser, in welcher weder Spannungen noch Pressungen vorkommen. Wir erhalten demnach aus (1):

$$\upsilon = \frac{S}{\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\varepsilon} \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Für den Fall, dass S eine Pressung ist, muss dieselbe negativ in Rechnung gebracht werden, fällt also auch υ negativ aus und liegt dann die Neutralfaser oberhalb der Axenfaser.

Theilen wir den Querschnitt f h, Fig. 8., durch Linien, die zur Ebene der Figur senkrecht sind, in unendlich viele unendlich schmale Streifen und nennen d f den Flächeninhalt des bei w befindlichen Streifens, so ist σ d f die Kraft, welche die Fasern dieses Querschnittes d f spannt, ferner $\int \sigma$ d f die Summe aller spannenden Kräfte, endlich $\int \sigma \zeta$ d f die Summe der Momente derselben. Setzen wir in diese Integrale für σ den Ausdruck (1), so folgt

$$\int \sigma \, df = \int \left[S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] df$$

$$\int \zeta \sigma \, df = \int \left[S + \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \zeta \right] \zeta \, df$$

wobei die Integrationen auf den ganzen Querschnitt f h auszudehnen sind. Da sich diese Integrationen auf ζ und nicht auf ϱ beziehen und der Voraussetzung gemäss n der Schwerpunkt des Querschnittes ist, so hat man $\int \zeta \, df = 0$ und ist $\int \zeta^2 \, df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes. Bezeichnen wir dasselbe mit μ, so werden obige Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \int \sigma \, df &= S \, \Omega \\ \int \sigma \zeta \, df &= \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Der Gleichgewichtszustand erfordert aber 1) dass die Summe K der äusseren auf Spannung wirkenden Kräften gleich ist der Summe aller im Querschnitt f h vorkommenden inneren Spannungen; 2) dass die Summe der Momente M aller äusseren Kräfte gleich ist der Summe der Momente aller im Querschnitt f h vorkommenden Spannungen.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes sind demnach:

$$\left. \begin{aligned} S \, \Omega &= K \\ \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \mu &= M \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

Führt man den Werth von S und von $\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right)$, welche sich aus diesen Ausdrücken ergeben in (1) und (2) ein, so erhält man:

$$\sigma = \frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu} \zeta \quad \dots \dots \dots \dots \quad (5)$$

$$v = \frac{K}{\Omega} \frac{\mu}{M} \quad \dots \dots \dots \dots \quad (6)$$

Diese Gleichungen (4), (5), (6) enthalten die Lösung unserer Aufgabe. Die erste der Gleichungen (4) bestimmt die im Allgemeinen variable Spannungsintensität, welche in einem beliebigen Punkt der Schwerpunktfaser herrscht. Die zweite der Gleichungen bestimmt die Gestalt der Axenfaser im gebogenen Zustande des Stabes. Die Gleichung (6) bestimmt die Gestalt der Neutralfaser; endlich die Gleichung (5) die Spannungsintensität in irgend einem Punkt im Innern des Stabes.

Wir wollen noch die Wirkungsgrösse berechnen, die erforderlich ist, um irgend eine Biegung des Stabes zu bewirken.

Wenn die Biegung beginnt, ist die Spannungsintensität im Faserstückchen $\overline{u_1 v_1}$ gleich Null; wenn die Biegung geschehen ist, beträgt diese Spannungsintensität σ. In irgend einem Augenblick während des Vorganges der Biegung hat die Spannungsintensität im Faserelement $\overline{u_1 v_1}$ einen gewissen Werth σ_1 und in diesem Moment ist die Ausdehnung desselben $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{\sigma_1}{\varepsilon}$. Schreitet die Biegung im nächsten Zeitelement weiter fort, so nimmt die Spannungsintensität um $d\sigma_1$ zu und wächst die Ausdehnung um $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d\sigma_1}{\varepsilon}$. Die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um alle Faserstückchen des Querschnittes $d f$ um $d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d\sigma_1}{\varepsilon}$ auszudehnen, ist daher $\sigma_1 \, d f \, d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{d\sigma_1}{\varepsilon}$. Integrirt man diesen Ausdruck in Bezug auf σ_1 von $\sigma_1 = 0$ bis $\sigma_1 = \sigma$, so erhält man die Wirkungsgrösse, welche erforderlich ist, um das Faserprisma, dessen Länge $d s_0$ und Querschnitt $d f$ ist, aus dem natürlichen Zustand in denjenigen zu versetzen, in welchem eine Spannungsintensität σ eintritt und der Krümmungshalbmesser von $\overline{m n}$ gleich ϱ wird. Diese Wirkung ist demnach:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \sigma^2$$

oder wenn man für σ aus (5) seinen Werth setzt:

$$d s_0 \, d f \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu} \zeta\right)^2$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach ζ und dehnt das Integrale über den ganzen Querschnitt aus, so erhält man die Wirkung, welche erforderlich ist, um die zwischen den Ebenen $e_1\, g_1 \;\; f_1\, h_1$, Fig. 7, eingeschlossene Parthie des Stabes aus dem ursprünglichen Zustand in denjenigen zu versetzen, in welchem der Krümmungshalbmesser ϱ eintritt. Dieses Integrale ist:

$$d\,s_0 \; \frac{1}{2\,\varepsilon} \int \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\left(\frac{K}{\Omega} + \frac{M}{\mu}\,\zeta\right)^2 d\,f$$

Erlauben wir uns $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ gegen die Einheit zu vernachlässigen, so begehen wir in allen Fällen der Anwendung keinen merklichen Fehler, gelangen aber hierdurch zu einem viel einfacheren Endresultat. Unter dieser Voraussetzung wird das obige Integrale:

$$\frac{d\,s_0}{2\,\varepsilon} \int \left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 + 2\,\frac{K}{\Omega}\,\frac{M}{\mu}\,\zeta + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \zeta^2\right] d\,f$$

Es ist aber $\int d\,f = \Omega$, $\int \zeta\, d\,f = o$, $\int \zeta^2\, d\,f = \mu$. Demnach erhalten wir:

$$\frac{d\,s_0}{2\,\varepsilon}\left[\left(\frac{K}{\Omega}\right)^2 \Omega + \left(\frac{M}{\mu}\right)^2 \mu\right] = \frac{d\,s_0}{2\,\varepsilon}\left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right)$$

Integriren wir endlich nach s_0 innerhalb derjenigen Punkte der Axenfaser, die das Bogenstück bestimmen, für welches die Wirkungsgrösse berechnet werden soll, so erhalten wir endlich für die totale Wirkung W, welche erforderlich ist, um ein bestimmtes Bogenstück des ursprünglich krummen Stabes zu biegen, folgenden Ausdruck:

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon} \int \left(\frac{K^2}{\Omega} + \frac{M^2}{\mu}\right) d\,s_0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

In diesem Ausdruck sind aber K^2 und M Funktionen von s_0.

Setzt man für M den Werth. der aus der zweiten der Gleichungen (4) folgt, so erhält man auch:

$$W = \frac{1}{2\,\varepsilon} \int \left[\frac{K^2}{\Omega} + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)^2 \mu\right] d\,s_0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Die folgenden einfachen Beispiele werden die Anwendung dieser Resultate verständlich machen.

1) Ein im natürlichen Zustande gerader Stab, Fig. 1, Tafel III., sei einerseits eingespannt, andererseits mit P belastet. Es tritt eine Biegung ein, und man soll die Wirkung berechnen, welche dieser Biegung entspricht. Nennen wir $On = x$ $mn = y$ die Coordinaten eines Punktes m der Axenlinie, so ist $Px = M$ das Biegungsmoment für den Punkt m. Ist die Biegung sehr schwach, so dürfen wir K vernachlässigen, weil in diesem Fall die Axenfaser keine merkliche Ausdehnung erleidet. Setzen wir in (7) $M = Px$, $K = o$, $\mu = Ez$, und erlauben uns wegen der vorausgesetzten schwachen Biegung $ds_0 = dx$ zu setzen, so erhalten wir:

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int_0^l \frac{P^2 x^2}{E z}\, dx = \frac{P^2}{6\,\varepsilon\, E z}\, l^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Heissen wir $\mathfrak{S}_m$ die Maximalspannung, welche bei a eintritt, so ist $\mathfrak{S}_m E = P l$. Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von P in (9) ein, so folgt auch:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{S}_m^2}{\varepsilon}\,\frac{E l}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

2) Ein ursprünglich gerader Stab von einer Länge l werde um einen Cylinder vom Halbmesser R herumgewickelt. Die Wirkungsgrösse, welche diesem Vorgang entspricht, soll berechnet werden.

Da in diesem Fall die Axenfaser nicht gedehnt wird, so ist zunächst $K = o$ zu setzen. Da ferner der Stab ursprünglich gerade war, so ist $\frac{1}{\varrho_0} = o$ und weil der Stab kreisförmig gebogen wird, so ist $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{R}$ eine Constante. Wir erhalten daher vermöge (8):

$$W = \frac{1}{2\varepsilon}\int \frac{\varepsilon^2 \mu}{R^2}\, ds_0 = \frac{\varepsilon\,\mu\, l}{2\, R^2}$$

Verwindung oder Torsion eines Stabes.

Erklärungen. Denken wir uns, ein stabförmiger Körper werde am einen Ende festgehalten und am anderen durch ein drehend wirkendes Kräftepaar angegriffen, so entsteht in dem ganzen Stabe eine Verwindung, bis die inneren Kräfte mit dem Kräftepaar ins Gleichgewicht gekommen sind.

Nennen wir auch hier wiederum eine Reihenfolge von Atomen, die in einer zur Richtung des Stabes parallelen geraden Linie liegen,

eine Faser, so können wir uns denken, der Stab bestehe in seinem natürlichen Zustande aus einem Bündel von geradlinigen, neben einander liegenden und unter einander verbundenen Fasern, dagegen in verwundenem Zustande aus einem Bündel von um einander gewundenen aber unter einander verbundenen Fasern.

Der Gleichgewichtszustand des Stabes wäre vollkommen bekannt, wenn man im Stande wäre anzugeben: 1) die Gestalt jeder einzelnen Faser; 2) die Kräfte, welche jedes Faserstückchen in seiner Gleichgewichtslage erhalten. Allein diese genaue Ermittelung des Gleichgewichtes ist mit so vielen Schwierigkeiten verbunden, dass wir uns mit einer Annäherung begnügen müssen, und diese erhalten wir dadurch, dass wir über den Zustand der verwundenen Fasern folgende naturgemäss scheinende Annahmen machen.

Wir nehmen an: 1) die Atome, welche ursprünglich in einem und demselben Querschnitt lagen, ändern ihre relative Gegeneinanderlagerung während der Verwindung nicht; 2) jede Faser erhält durch die Verwindung die Gestalt einer Schraubenlinie. Nehmen wir überdies an, der Querschnitt des Stabes sei so beschaffen, dass er durch zwei auf einander senkrecht stehende, durch den Schwerpunkt gehende Linien in vier congruente Theile getheilt wird, so folgt aus obigen Annahmen, dass die Axen- oder Schwerpunktfaser durch das Verwinden des Stabes keine Krümmung erhält und dass die übrigen Fasern Schraubenlinien bilden, deren Steilheit mit ihrer Entfernung von der Axe fort und fort wächst.

Daraus folgt aber ferner, dass die Länge der Fasern mit ihrer Entfernung von der Axenfaser wächst; allein da die äusseren Kräfte der Voraussetzung gemäss nur drehend wirken, so können die verwundenen Fasern weder alle ausgedehnt, noch alle zusammengedrückt sein, sondern es muss ein Theil derselben ausgedehnt, ein anderer Theil zusammengedrückt sein, und da die Axenfaser am kürzesten, die peripherischen Fasern am längsten sind, so muss in der Axenfaser selbst und von ihr an bis auf eine gewisse Entfernung Zusammendrückung, von da an bis zur Oberfläche hinaus dagegen Ausdehnung herrschen, und somit gibt es eine cylindrische Schicht, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammendrückung stattfindet. Diese Schicht zu bestimmen, ist für einen cylindrischen Stab nicht schwierig, wir wollen jedoch ihre Bestimmung unterlassen, weil ihre Kenntniss für praktische Zwecke von keiner Wichtigkeit ist.

Denkt man sich durch den Stab, senkrecht auf seine Axe eine Ebene gelegt, und richtet seine Aufmerksamkeit auf die Art und Weise, wie die diesseits und jenseits dieser Ebene liegenden Atome während der Verwindung des Stabes ihre Lage gegeneinander verändern,

so wird man erkennen, dass der Vorgang eine Gegeneinanderverschiebung ist, die an der Axe beginnt und von da an mit der Entfernung fort und fort wächst. Diese den Verschiebungen entsprechenden Kräfte liegen in der Querschnittsebene, stehen senkrecht auf den Radien und es ist naturgemäss anzunehmen, dass ihre Intensitäten der Grösse der Verschiebungen proportional sind.

Beweis des Satzes, daß die Schwerpunktfaser eines Stabes bei einer Drehung desselben gerade bleibt. Es sei Fig. 9, Tafel III., A der seiner Lage nach noch nicht bekannte Punkt, um welchen die Drehung eines Querschnittes erfolgt. m der von A entfernteste Punkt der Peripherie des Querschnittes. T die Intensität der Verschiebungskraft bei m. t die Intensität der Verschiebungskraft an einem Punkt n, dessen Entfernung von A gleich x ist. So hat man, wenn $\overline{Am} = k$ gesetzt wird:

$$t = \frac{T}{k} x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Nimmt man bei n ein unendlich kleines Flächentheilchen df an, so ist t d f die auf A n senkrecht wirkende Verschiebungskraft dieses Flächentheilchens. Zerlegt man diese Kraft in eine horizontale und in eine vertikale, so ist erstere $t\,df\sin\varphi$, letztere $t\,df\cos\varphi$. Nennt man $\overline{Ap} = \xi$ $\overline{mp} = \upsilon$ die Coordinaten des Punktes n in Bezug auf das Axensystem $A\,\xi$ und $A\,\upsilon$, so ist $\cos\varphi = \frac{\xi}{x}$ $\sin\varphi = \frac{\upsilon}{x}$, demnach wird:

$$t\,df\sin\varphi = t\,df\frac{\upsilon}{x}, \qquad t\,df\cos\varphi = t\,df\frac{\xi}{x}$$

oder wenn man für t seinen Werth aus (1) einführt:

$$t\,df\sin\varphi = \frac{T}{k}\upsilon\,df \qquad t\,df\cos\varphi = \frac{T}{k}\xi\,df$$

Es sind demnach die Summen aller Horizontalkräfte und aller Vertikalkräfte sämmtlicher Verschiebungskräfte eines Querschnittes:

$$\frac{T}{k}\int\upsilon\,df \qquad \frac{T}{k}\int\xi\,df$$

Allein für den Gleichgewichtszustand müssen diese Summen verschwinden, weil der Vorausetzung gemäss nur eine Torsion stattfindet. Man hat daher, weil $\frac{T}{k}$ nicht verschwindet:

$$\int \xi \, df = 0 \quad \int \upsilon \, df = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichungen drücken aber aus, dass der Punkt A, um welchen die Drehung erfolgt, mit dem Schwerpunkt des Querschnittes zusammenfällt; denn nennt man X und Y die Coordinaten des Schwerpunktes des Querschnittes in Bezug auf das Axensystem $A\xi$ und $A\upsilon$, so hat man nach den bekannten Regeln, die zur Bestimmung des Schwerpunktes einer Fläche dienen

$$X = \frac{\int \xi \, df}{\int df} \quad Y = \frac{\int \upsilon \, df}{\int df}, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wenn also $\int \xi \, df = 0$ und $\int \upsilon \, df = 0$ ist, so hat man $X = 0$ $Y = 0$, d. h. der Schwerpunkt fällt in den Anfangspunkt der Coordinaten, was zu beweisen war.

Berechnung der Torsionsfestigkeit. Es sei in Fig. 9, Tafel III., df ein kleines Flächentheilchen des Querschnittes, $An = x$ die Entfernung desselben von der Axe; T die Intensität der Verschiebungskraft in dem von der Axe entferntesten Punkte m des Querschnittes; k die Entfernung dieser Stelle von der Axe, so ist die Intensität der Verschiebungskraft im Punkt n gleich $T\frac{x}{k}$; ist ferner die Verschiebungskraft für den Querschnitt df gleich $T\frac{x}{k}df$, ist sodann das Moment dieser Kraft $\frac{T}{k}x^2 df$ und ist endlich die Summe der Momente aller im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräfte $\int \frac{T}{k}x^2 df = \frac{T}{k}\int x^2 df$. Da das äussere Kräftepaar, welches das Verwinden des Stabes bewirkt, mit den in jedem Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften im Gleichgewicht ist, so hat man, wenn das Moment der äusseren Kräfte mit M bezeichnet wird:

$$M = \frac{T}{k}\int x^2 df \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist $\int x^2 df$ das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, auf der Ebene des Querschnittes senkrechte Axe. Bezeichnet man dieses Moment mit μ, setzt also

$$\int x^2 df = \mu \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so wird der Ausdruck (1):

$$M = \frac{T}{k} \mu \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Da wir in diesem Abschnitt über die Elastizität und Festigkeit alle Längen in Centimetern und die Kräfte in Kilogrammen ausdrücken, so ist T die auf einen Quadratcentimeter bezogene Verschiebungskraft in der von der Axe entferntesten Faser, und ist ferner M das in Kilogrammen und Centimetern ausgedrückte Torsionsmoment der äusseren den Stab verwindenden Kraft.

Wenden wir obige Gleichung auf einige spezielle Fälle an.

Für einen cylindrischen Stab von einem Durchmesser d ist das Trägheitsmoment:

$$\mu = \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \, 2 \, x \, \pi \, d x = \frac{\pi}{32} d^4 \text{ und } k = \frac{d}{2}$$

demnach

$$M = \frac{T \pi}{16} d^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

Für einen quadratischen Stab hat man, wenn b die Seite des Quadrates bezeichnet:

$$\mu = \frac{1}{6} b^4 \text{ und } k = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

demnach wird:

$$M = T \frac{b^3}{3\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Für einen Stab, dessen Querschnitt ein Rechteck ist, findet man, wenn die Seiten des Rechteckes mit b und h bezeichnet werden:

$$\mu = \frac{1}{12} b h \left(b^2 + h^2\right)$$

$$k = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + h^2}$$

demnach:

$$M = \frac{T}{6} b h \sqrt{b^2 + h^2} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Diese Theorie der Torsion ist so unvollkommen, dass man den Ergebnissen derselben nicht unbedingtes Vertrauen schenken kann; es ist daher angemessen, dieselbe durch Versuche zu prüfen. Derlei Versuche sind schon viele gemacht worden, und sie haben in der

That die Richtigkeit der Resultate so weit bestätiget, als dieses durch Versuche möglich ist.

Nimmt man an, dass die Resultate nicht nur für schwache Verwindungen, sondern auch noch für die allerstärksten, also selbst für diejenigen Verwindungen gelten, bei welchen der Molekularzusammenhang aufgelöst wird, so kann die Gleichung (3) zur Bestimmung desjenigen Werthes von T benutzt werden, welcher der Torsionsfestigkeit entspricht. Wenn man nämlich durch einen wirklichen Verwindungsversuch das Torsionsmoment M bestimmt, welches die Auflösung des Zusammenhanges bewirkt, sodann diesen Werth, sowie auch die Werthe von μ und k in die Gleichung (3) einführt und daraus T sucht, so ist dies der Festigkeitscoeffizient für Torsion und für das Material, aus welchem der Stab besteht. Ist die Gleichung (3) in dieser Ausdehnung richtig, so muss man bei einerlei Material für T immer den gleichen Werth finden, welches auch die Dimensionen des Stabes sind. Dies haben auch annähernd die Versuche gezeigt und die mit T überschriebene Columne der Tafel Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau enthält den Torsionsfestigkeits-Coeffizienten für verschiedene Materialien.

Da in der Gleichung (3) die Länge des Stabes nicht erscheint, so ist die Intensität der Verschiebungskraft und ist auch die Torsionsfestigkeit von der Länge des Stabes nicht abhängig. Aus Gleichung (4) sieht man, dass für einen cylindrischen Stab das einer bestimmten Torsionsintensität entsprechende Torsionsmoment dem Kubus des Durchmessers des Cylinders proportional ist. Will man den Durchmesser berechnen, den ein cylindrischer Stab erhalten muss, damit er einem gegebenen Torsionsmoment mit Sicherheit zu widerstehen vermag, so darf man in der Gleichung (4) für T nur einen aliquoten Theil des Torsionscoeffizienten in Rechnung bringen und findet dann:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16\ M}{T\ \pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Wir werden in der Folge erfahren, dass die Maschinenaxen so construirt werden, dass unter der Einwirkung der Kraft die Verschiebungsintensität bei Schmiedeeisen nur 210, bei Gusseisen nur 90 beträgt. Da nun die Torsionscoeffizienten für diese Materiale nach Tafel 36 der Resultate des Maschinenbaues für Schmiedeeisen 7000 für Gusseisen 3000 betragen, so sind diese Wellen nur bis auf $\frac{210}{7000} = \frac{1}{33}$ und $\frac{90}{3000} = \frac{1}{33}$ ihrer Torsionsfestigkeit angestrengt.

Berechnung des Torsionswinkels. Es erübrigt uns nun noch, den Torsionswinkel Θ, Fig. 10, Tafel III., d. h. den Winkel zu berechnen, um welchen der von den Torsionskräften ergriffene Querschnitt des Stabes gegen das festgehaltene Ende verdreht wird. Zu diesem Zweck machen wir die wahrscheinliche Hypothese, dass der Winkel α, den die Faser, in welcher die Verschiebungskraft T herrscht, mit der Axe des Stabes bildet, dem Werth von T proportional sei; setzen also:

$$\alpha = \frac{T}{G} \quad \text{. (8)}$$

wobei G eine nur von der Natur des Materials abhängige Grösse bedeutet, und wobei α in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden soll. Denkt man sich den Cylinder, in welchem die Faser liegend gedacht werden kann, in eine Ebene ausgebreitet, so ergibt sich ein Dreieck A B C, Fig. 10, Tafel III., in welchem A C die Länge l des Stabes $\sphericalangle B A C = \alpha$ und $B C = k \Theta$ ist, wobei Θ den in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Torsionswinkel bedeutet. Man hat daher:

$$\frac{k \Theta}{l} = \tang \alpha \quad \text{. (9)}$$

oder auch annähernd, weil jederzeit α sehr klein ist, also für $\tang \alpha$ auch α gesetzt werden kann:

$$\frac{k \Theta}{l} = \alpha \quad \text{. (10)}$$

Aus (8) und (10) folgt:

$$\frac{T}{G} = \frac{k \Theta}{l}$$

mithin

$$\Theta = \frac{T l}{k G}$$

Führen wir hier den aus (3) für T folgenden Werth ein, so ergibt sich:

$$\Theta = \frac{M l}{G \mu} \quad \text{. (11)}$$

Will man den Torsionswinkel Θ nach Graden ausdrücken, und bezeichnet diese mit Θ°, so hat man:

$$\Theta^{\circ} = \frac{M l}{G \mu} \frac{360}{2 \pi} \quad \text{. (12)}$$

Für einen cylindrischen Stab von einem Durchmesser d ist: $\mu = \frac{\pi}{32} d^4$, demnach wird:

$$\Theta^0 = 16 \frac{M}{G} l \frac{360}{d^4 \pi^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Diese Resultate (11), (12), (13) sind nur als hypothetische anzusehen, weil dieselben auf der Annahme (8) beruhen, dass der Winkel α dem Werth von T proportional sei. Zahlreiche Versuche über die Torsion von Stäben haben aber gezeigt, dass diese Resultate wenigstens für nicht zu starke Verwindungen annähernd richtig sind.

Setzt man in (13) $\frac{d^2\pi}{4} = 1$, $l = 1$, $\Theta^0 = 360$, so folgt aus denselben:

$$G = M,$$

d. h. die Grösse G, welche man den Modulus der Elastizität für Torsion zu nennen pflegt, drückt das Torsionsmoment aus, welches erforderlich wird, um einen Stab, dessen Querschnitt und Länge gleich der Einheit ist, um 360° zu verwinden, vorausgesetzt, dass das durch (13) ausgedrückte Gesetz selbst für eine so starke Verwindung richtig wäre.

Die Resultate des Maschinenbaues geben Seite 36 die für verschiedene Materialien durch Versuche gefundenen Werthe des Modulus der Elastizität G für Torsion.

Festigkeit der Gefäße.

Cylindrische Gefäße. Man denke sich, ein cylindrisches Gefäss Fig. 1, Tafel IV., enthalte eine eingepresste Flüssigkeit, die auf jeden Quadratcentimeter der innern Umfangsfläche einen gewissen sehr starken Druck ausübt. Das Gefäss sei aber auch aussen von einer Flüssigkeit umgeben, die auf jeden Quadratcentimeter der äussern Oberfläche mit einem jedoch schwächeren Druck wirkt. Da wir annehmen, der innere Druck sei beträchtlich stärker als der äussere, so muss in dem Gefäss durch die Wirkung der Kräfte eine Ausweitung entstehen, welche zur Folge hat, dass in jedem kleinen Volumtheilchen im Innern der Gefässwand nach radialer Richtung o r, Fig. 1, Tafel IV., eine Zusammenpressung, nach einer auf die Axe des Gefässes senkrechten Richtung $t t_1$ eine Materialausdehnung entsteht, und es ist für die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes vor allem andern nothwendig, diese Spannungen und Pressungen zu bestimmen.

Es sei für den natürlichen Zustand des Gefässes, wenn nämlich keine Kräfte wirken, r_0 der innere, r_1 der äussere Halbmesser des Cylinders, x der Halbmesser eines Kreises, der zwischen dem innern und äussern Begrenzungskreis des Cylinders liegt. Nennen wir ferner p_0 die innere, p_1 die äussere Pressung auf einen Quadratcentimeter. Durch die Einwirkung dieser Pressungen wird der Cylinder ausgeweitet bis ein Gleichgewichtszustand zwischen diesen Pressungen und den Molekularkräften eintritt, was zur Folge hat, dass die Halbmesser r_0 r_1 x in ϱ_0 ϱ_1 ξ übergehen. Nennen wir nun für dieses erzwungene Gleichgewicht y die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannung, welche in der Entfernung ξ nach tangentialer Richtung stattfindet, z die auf einen Quadratcentimeter bezogene nach radialer Richtung in der Entfernung ξ stattfindende Pressung, und erlauben uns die Annahme, dass jede der Kräfte y und z so wirke, wie wenn die andern nicht vorhanden wären, so können wir diese Ausdehnungen und Pressungen nach unserem Erfahrungsgesetze Seite 3 berechnen. Das Material, welches ursprünglich zwischen den Cylindern, deren Halbmesser x und $x + dx$ eingeschlossen war, befindet sich nach erfolgter Ausweitung zwischen zwei Cylindern, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\xi$ sind. Es ist demnach

$$2\pi\xi - 2\pi x = 2\pi(\xi - x)$$

die Ausdehnung, $dx - d\xi$ die Zusammendrückung dieses Materials.

Nennen wir ε den Modulus der Elastizität des Materials, so können wir nach dem oben erwähnten Erfahrungsgesetz schreiben:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi(\xi - x) &= 2\pi x \frac{y}{\varepsilon} \\ dx - d\xi &= dx \frac{z}{\varepsilon} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\xi &= dx\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Nennt man df die Aenderung, welche in der Fläche

$$(x + dx)^2\pi - x^2\pi$$

durch die Wirkung der Pressungen eintritt, so ist:

$$d\,f = \left[(\xi + d\,\xi)^2\,\pi - \xi^2\,\pi\right] - \left[(x + d\,x)^2\,\pi - x^2\,\pi\right]$$

oder weil $d\,x$ und $d\,\xi$ Differenziale sind:

$$d\,f = 2\,\pi\,(\xi\,d\,\xi - x\,d\,x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Führt man für ξ und $d\,\xi$ die obigen Werthe (2) ein, so findet man:

$$\frac{d\,f}{2\,\pi\,x\,d\,x} = \frac{1}{\varepsilon}\,(y - z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Verhältniss linker Hand des Gleichheitszeichens ist die auf einen Quadratcentimeter bezogene Flächenänderung, welche in der Entfernung x eintritt, oder es ist die verhältnissmässige Flächenausdehnung.

Lamé hat in seinem Werke Théorie de l'élasticité nachgewiesen, dass diese verhältnissmässige Ausdehnung in jedem Punkt der Cylinderwand einen und denselben constanten Werth hat. Den analytischen Weg, durch welchen dieser Satz gewonnen wurde, können wir hier nicht betreten, müsssen uns also begnügen, denselben, ohne ihn selbst zu beweisen, als eine Wahrheit anzunehmen. Unter der Voraussetzung, dass $\frac{1}{\varepsilon}\,(y - z)$ eine Constante ist, können wir ihren Werth leicht finden, denn es ist für $x = r_0$ $z = p_0$ und wird y gleich einem bestimmten Werth $\mathfrak{A}$, nämlich gleich der Tangentialspannung am innern Umfang des Cylinders. Jene Constante kann daher ausgedrückt werden durch $\frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)$. Weil also

$$\frac{1}{\varepsilon}\,(y - z) = \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)$$

ist, so erhält man statt (4):

$$\frac{d\,f}{2\,\pi\,x\,d\,x} = \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)$$

Durch Integration folgt hieraus:

$$f = \frac{1}{\varepsilon}\,(\mathfrak{A} - p_0)\,2\,\pi\,\frac{x^2}{2} + \text{Const}$$

oder wenn man dieses Integrale innerhalb der Grenze $x = r_0$ bis $x = x$ nimmt:

$$f = \frac{\pi}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0) \quad (x^2 - r_0^2) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; , \quad (5)$$

Dieses f ist aber die Ausdehnung, die in dem Material von r_0 bis x eintritt. Es ist demnach auch:

$$f = (\xi^2 - \varrho_0^2)\, \pi - (x^2 - r_0^2)\, \pi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Man hat daher vermöge (5) und (6):

$$(\xi^2 - \varrho_0^2) - (x^2 - r_0^2) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)\, (x^2 - r_0^2) \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Setzt man in die erste der Gleichungen (2) $x = r_0$ $y = \mathfrak{A}$ $\xi = \varrho_0$, so muss dieselbe erfüllt werden; man hat daher $\varrho_0 = r_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$

Führt man diesen Werth von ϱ_0, so wie den Werth von ξ den die erste der Gleichungen (2) darbietet in (7) ein, so gibt dieselbe nach einigen einfachen Reduktionen und wenn man die zweiten Potenzen von $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$ vernachlässiget

$$y = \frac{\mathfrak{A} - p_0}{2} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2} \frac{r_0^2}{x^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Führt man diesen Werth von y in die Gleichung $\frac{1}{\varepsilon} (y - z) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{A} - p_0)$ ein, so findet man auch noch

$$z = \frac{\mathfrak{A} + p_0}{2} \frac{x_0^2}{x^2} - \frac{1}{2} (\mathfrak{A} - p_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Somit ist nun die Tangentialspannung y, als auch die radiale Presung z in der Entfernung x bestimmt.

Nun ist $2 \int_{r_0}^{r_1} y \, dx$ die Summe aller Spannungen in zwei diametral gegenüberstehenden Wanddicken; sind ferner $2\, r_0\, p_0$ und $2\, r_1\, p_1$ die inneren und äusseren Pressungen der Flüssigkeit, wodurch jene Materialspannungen hervorgerufen werden; man hat daher:

$$2 \int_{r_0}^{r_1} y \, dx = 2\, (r_0\, p_0 - r_1\, p_1)$$

Setzt man für y seinen Werth aus (7) und verrichtet die Integration, so ergibt sich ein Ausdruck, aus welchem durch ganz gewöhnliche Reduktionen gefunden wird:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Bezeichnet man durch D den inneren Durchmesser des Cylinders und durch δ die Wanddicke, setzt also $r_1 - r_0 = \delta$. $2\,r_0 = D$, so folgt aus (10):

$$\delta = \frac{D}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1\right) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

In der Regel sind p_0 und p_1 sehr klein gegen $\mathfrak{A}$ und dann kann man auch statt (11) einen Annäherungswerth aufstellen. Es ist nämlich ganz genau:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1 = \left(1 + 2\,\frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

ist dagegen annähernd:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{A} + p_0}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}} - 1 = \frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0}$$

demnach ist annähernd:

$$\delta = \frac{D}{2}\,\frac{p_0 - p_1}{\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Die Formel (10) hat zuerst Lamé aufgefunden, ohne von irgend einer Hypothese auszugehen.

Setzt man in (11) oder in (12) für $\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit des Materials, aus welchem der Cylinder besteht, so geben diese Gleichungen diejenige Wanddicke, bei welcher der Cylinder unter der Einwirkung der Kräfte p_0 und p_1 berstet. Nimmt man diese Pressungen p_0 und p_1 so an, dass $\mathfrak{A} + 2\,p_1 - p_0 = 0$ wird, nimmt also

$$p_0 = \mathfrak{A} + 2\,p_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

so wird δ unendlich, d. h. ein Cylinder, wie dick auch seine Wand genommen werden mag, wird unter der Einwirkung eines inneren

Druckes von der Grösse (13) zum Bersten gebracht. Gewöhnlich ist der äussere Druck p_1 der Druck der Atmosphäre, ist also im Verhältniss zum Werth der Festigkeitscoeffizienten sehr klein, so dass $2 p_1$ gegen $\mathfrak{A}$ beinahe vernachlässiget werden kann, man also sagen kann: wenn der Druck der Flüssigkeit im Innern auf einen Quadratcentimeter so gross wird, als die absolute Festigkeit des Materials per ein Quadratcentimeter, so muss der Cylinder bersten, wie gross auch seine Wanddicke sein mag. Es ist für

	Gusseisen	Schmiedeeisen	Kanonenmetall	Stahl
$\mathfrak{A}$	1300	4000	2600	10000

Da der Druck einer Atmosphäre auf 1 Quadratcentimeter nahe 1 Kilogramm beträgt, so sind diese Zahlen die in Atmosphären ausgedrückten inneren Pressungen, welche cylindrische Gefässe aus jenen Metallarten auszuhalten vermögen. In einem gusseisernen Cylinder kann man also Luft nicht bis zu 2000 Atmosphären comprimiren, wohl aber in einem Cylinder aus den übrigen der oben genannten Metalle.

Bei hydraulischen Pressen ist gewöhnlich die Wanddicke des Presscylinders gleich dem Halbmesser des inneren Cylinders, oder $\delta = \frac{D}{2}$. Gusseisen kann man höchstens bis zur Hälfte seiner absoluten Festigkeit in Anspruch nehmen, es darf also $\mathfrak{A}$ höchstens $\frac{1300}{2}$ $= 650$ werden. Der äussere Druck p_1 der Atmosphäre ist sehr nahe $= 1$ Kilogramm. Setzen wir in (12) $\delta = \frac{D}{2}$, $\mathfrak{A} = 650$, $p_1 = 1$, so folgt $p_0 = \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + 3\, p_1) = 326$. Die innere Pressung des Wassers darf also bei solchen Construktionsverhältnissen und bei ganz gutem Guss nicht mehr als 326 Atmosphären betragen, damit das Material nicht über die Hälfte seiner Festigkeit in Anspruch genommen wird.

Kugelförmige Gefäße. Es sei auch hier für den natürlichen Zustand r_0 der innere, r_1 der äussere, x irgend ein zwischen r_0 und r_1 liegender Halbmesser der Kugelwand. Im ausgedehnten Zustande des Gefässes seien diese Halbmesser ϱ_0 ϱ_1 ξ. Die in einer Entfernung ξ herrschende Tangentialspannung sei y, die daselbst herrschende radiale Pressung gleich z.

Das Material, welches ursprünglich innerhalb zweier Kugelflächen, deren Halbmesser x und $x + d\,x$ sind, enthalten war, befindet sich

nach erfolgter Ausdehnung innerhalb der Kugelflächen, deren Halbmesser ξ und $\xi + d\,\xi$ sind. Die lineare Zusammenpressung nach radialer Richtung ist demnach $d\,x - d\,\xi$, die lineare Ausdehnung einer Kreisperipherielänge $2\,\pi\,x$ ist $2\,\pi\,(\xi - x)$. Man hat daher auch hier:

$$2\,\pi\,(\xi - x) = 2\,\pi\,x\,\frac{y}{\varepsilon}$$

$$d\,x - d\,\xi = d\,x\,\frac{z}{\varepsilon}$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right) \\ d\,\xi &= d\,x\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei ε den Modulus der Elastizität bezeichnet.

Nennen wir $d\,\mathfrak{V}$ die Volumenänderung, welche in dem Materiale eintritt, das zwischen den Kugelflächen enthalten ist, deren Halbmesser x und $x + d\,x$ sind, so ist

$$d\,\mathfrak{V} = \frac{4}{3}\,\pi\left[(\xi + d\,\xi)^3 - \xi^3\right] - \frac{4}{3}\,\pi\left[(x + d\,x)^3 - x^3\right]$$

oder weil $d\,\xi$ und $d\,x$ Differenziale sind:

$$d\,\mathfrak{V} = 4\,\pi\left(\xi^2\,d\,\xi - x^2\,d\,x\right)$$

setzt man für ξ und $d\,\xi$ die Werthe (1), so folgt:

$$d\,\mathfrak{V} = 4\,\pi\,x^2\,d\,x\left[\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)^2\left(1 - \frac{z}{\varepsilon}\right) - 1\right]$$

Da in allen Anwendungen $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{z}{\varepsilon}$ sehr kleine Grössen sind, so kann man die Quadrate und Produkte und höheren Potenzen derselben vernachlässigen, und dann folgt aus disem Ausdruck:

$$\frac{d\,\mathfrak{V}}{4\,\pi\,x^2\,d\,x} = \frac{(2\,y - z)}{\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dieser Quotient ist die verhältnissmässige Volumsänderung in der Entfernung x.

Wir machen auch hier die hypothetische Annahme, dass die verhältnissmässige Volumsänderung für jeden Ort der Wanddicke den

gleichen Werth habe, dass mithin $\frac{2\,y - z}{\varepsilon}$ eine constante Grösse sei. Nennen wir p_0 die innere, p_1 die äussere Pressung, per Quadratcentimeter, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität an der inneren Kugelfläche, so ist für $y = \mathfrak{A}$, $z = p_0$, demnach:

$$\frac{2\,y - z}{\varepsilon} = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} = \text{Const}$$

die Gleichung (2) wird demnach:

$$\frac{d\,\mathfrak{V}}{4\,\pi\,x^2\,d\,x} = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}$$

Durch Integration folgt:

$$\mathfrak{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,x^3\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon} + \text{Const}$$

Nimmt man das Integrale von $x = r_0$ bis $x = x$, so erhält man $\mathfrak{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3)$ und dieses ist die Volumenänderung, welche in dem Raum von $x = r_0$ bis $x = x$ entstanden ist. Dieses $\mathfrak{V}$ ist aber auch:

$$\mathfrak{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,(\xi^3 - \varrho_0^3) - \frac{4}{3}\,\pi\,(x^3 - r_0^3)$$

Demnach hat man durch Gleichsetzung dieser beiden Werthe von $\mathfrak{V}$ und Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors $\frac{4}{3}\,\pi$:

$$(\xi^3 - \varrho_0^3) - (x^3 - r_0^3) = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{\varepsilon}\,(x^3 - r_0^3) \quad . \; . \; . \; (3)$$

Nun ist aber wegen (1):

$$\xi = x\left(1 + \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

$$\varrho_0 = r_0\left(1 + \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}\right)$$

Führt man diese Werthe in (3) ein, entwickelt und vernachlässiget dabei die zweite und höhere Potenz von $\frac{y}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon}$, so folgt:

$$y = \frac{2\,\mathfrak{A} - p_0}{3} + \frac{\mathfrak{A} + p_0}{3}\,\frac{r_0^3}{x^3} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Hiermit ist wiederum die in der Entfernung x eintretende Spannungsintensität bestimmt.

Die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes zwischen den Flüssigkeitspressungen und den Materialspannungen ergibt sich nun wiederum auf folgende Weise: Legen wir durch den Mittelpunkt des Kugelgefässes eine Ebene, welche dasselbe in zwei Hälften theilt, so werden diese durch die innere Pressung mit einer Kraft $r_0^2 \pi p_0$ auseinander, durch die äussere Pressung mit einer Kraft $r_1^2 \pi p_1$ gegeneinander gedrückt; die Differenz ist $\pi (r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1)$ und muss gleich sein der Summe aller Materialspannungen, die in dem Schnitt des sphärischen Gefässes mit jener Ebene vorkommen.

Man hat daher:

$$\int_{r_0}^{r_1} 2 \pi x \, d x \, y = \pi (r_0^2 p_0 - r_1^2 p_1)$$

Führt man für y seinen Werth aus (4) ein, verrichtet die Integration und sucht hierauf den Werth von $\frac{r_1}{r_0}$, so findet man:

$$\frac{r_1}{r_0} = \sqrt[3]{\frac{2 (\mathfrak{A} + p_0)}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Auch für diesen Ausdruck kann ein Annäherungswerth aufgefunden werden.

Es ist genau:

$$\sqrt[3]{\frac{2 (\mathfrak{A} + p_0)}{2 \mathfrak{A} + 2 p_1 - p_0}} = \left(1 + 3 \frac{p_0 - p_1}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Angenommen, dass der in der Klammer enthaltene Bruch eine sehr kleine Gröse ist, hat man annähernd:

$$\sqrt[3]{\frac{2 (\mathfrak{A} + p_0)}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}} = 1 + \frac{p_0 - p_1}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0}$$

und nun findet man, wenn man die Wanddicke mit δ und den innern Durchmesser mit D bezeichnet, mithin $r_1 - r_0 = \delta$ $2 r_0 = D$ setzt:

$$\delta = \frac{D}{2} \frac{p_0 - p_1}{2 \mathfrak{A} + 3 p_1 - p_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die Formel (5) bestimmt genau, die Formel (6) annähernd die Wanddicke, die ein sphärisches Gefäss erhalten muss, wenn unter der Einwirkung der äusseren und inneren Kräfte die Materialspannung $\mathfrak{A}$ an der inneren Fläche einen gewissen Werth haben soll. Setzt man für $\mathfrak{A}$ den Werth der absoluten Festigkeit des Materials, so geben die Formeln diejenige Wanddicke, bei der unter der Einwirkung der Pressungen p_0 und p_1 das Zerreissen des Materials eintritt. Diese Wanddicke wird unendlich für $2\mathfrak{A} + 3p_1 - p_0 = 0$, oder für

$$p_0 = 2\mathfrak{A} + 3p_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

d. h. ein sphärisches Gefäss platzt bei jeder Wanddicke, wenn die Spannung im Innern zweimal so gross wird, als die Festigkeit des Materials, vorausgesetzt, dass der äussere Druck p_1 vernachlässiget werden darf. Dieses Ergebniss verglichen mit dem Seite 65 für cylindrische Gefässe gefundenen, so sieht man, dass ein kugelförmiges Gefäss im Maximum einen doppelt so grossen Druck aushält, als ein cylindrisches.

Wir haben uns bei Herleitung der Gleichung für δ so benommen, wie wenn die innere Pressung grösser wäre als die äussere. Die für δ gefundenen Ausdrücke gelten aber auch im umgekehrten Fall, wenn nämlich die äussere Pressung grösser ist als die innere, nur verwandelt sich dann $\mathfrak{A}$ in eine Pressung und ist negativ zu nehmen.

Bei ganz gleicher Wanddicke und gleicher Dichte eines Materials würde bei einem cylindrischen oder sphärischen Gefässe durch einen äusseren Druck nicht leicht eine Zerdrückung entstehen, allein so wie die Wand an einer Stelle schwächer ist, wird sie daselbst leicht durch einen äusseren Druck eingebogen, wodurch eine vollständige Verdrückung entstehen kann. Diese Rundgefässe haben daher gegen einen inneren Druck eine grössere Stabilität als gegen einen äusseren.

Nicht cylindrische oder sphärische Gefässe. Ist die Form einer Gefässwand weder cylindrisch noch sphärisch, so wird eine solche Form unter der Einwirkung von pressenden Flüssigkeiten nicht nur ausgeweitet oder zusammengedrückt, sondern in den meisten Fällen in der Weise deformirt, dass Formen entstehen, die mit den ursprünglichen nicht mehr geometrisch ähnlich sind. Dieses ist z. B. der Fall bei Gefässen mit flachen Wänden. Die Festigkeitstheorie dieser Gefässe erfordert sehr weitläufige und schwierige Rechnun-

gen, die hier nicht am Platze wären. Diese nicht cylindrischen und nicht sphärischen Gefässe sind bei starken Pressungen möglichst zu vermeiden.

Berechnung der Wirkungsgrößen, welche zur Ausdehnung, Zusammendrückung, Verwindung und Biegung von Stäben nothwendig sind.

Ausdehnung. Es sei ε der Modulus der Elastizität des Materials, aus welchem ein Stab besteht; l seine Länge; a sein Querschnitt; K die Kraft, welche den Stab um x zu verlängern vermag, so haben wir nach dem Ausdehnungsgesetz:

$$K = \frac{a\,\varepsilon}{l}\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Die Wirkung, welche nothwendig ist, um den Stab von $x = o$ bis $x = \lambda$ auszudehnen, ist: $\int_o^\lambda K\,dx = W$. Wir erhalten daher vermöge (1):

$$W = \frac{a\,\varepsilon}{l}\int_o^\lambda x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{a\,\varepsilon}{l}\,\lambda^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Nennen wir die der Ausdehnung λ entsprechende Zugkraft P, so haben wir vermöge (1):

$$P = \frac{a\,\varepsilon}{l}\,\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Führt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von λ in (2) ein, so erhält man einen Ausdruck, der leicht in folgende Form gebracht werden kann:

$$W = \frac{1}{2}\,a\,l\,\frac{\left(\frac{P}{a}\right)^2}{\varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Nun ist aber $a\,l$ das Volumen des Stabes $\frac{P}{a}$ die Spannungsintensität nach erfolgter Ausdehnung. Setzt man abkürzend $a\,l = \mathfrak{V}$, $\frac{P}{a} = \mathfrak{S}$, so erhält man auch:

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{V} \frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon} \quad , \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Ausdehnung eines Stabes erfordert demnach eine Wirkungsgrösse, die dem Volumen des Stabes und ferner noch einem Quotienten proportional ist, den man erhält, wenn man das Quadrat der Spannungsintensität am Ende der Ausdehnung durch den Modulus der Elastizität dividirt. Nimmt man an, das Ausdehnungsgesetz (1) gelte selbst bis zum Riss des Stabes, so ist für den Moment des Risses $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}$ gleich der absoluten Festigkeit des Materials, und die Wirkung, welche das Abreissen durch Ausdehnung erfordert, wird:

$$W = \frac{1}{2} \mathfrak{V} \frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$$

Allein $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ hat für jedes Material einen besonderen Werth, den man Seite 36 der Resultate für den Maschinenbau angegeben findet. Nennen wir den Quotienten $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ (Quadrat der absoluten Festigkeit, dividirt durch den Modulus der Elastizität) den Arbeitsmodulus für Ausdehnung, so kann man sagen, die Wirkung, welche das Abreissen eines Stabes erfordert, ist dem Volumen des Stabes und dem Arbeitsmodulus proportional.

Die Werthe von $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ sind für Gusseisen, Eichenholz, Schmiedeeisen, Kanonenmetall, Gussstahl beziehungsweise:

1 bis 1·7, 4·3, 7·4, 10, 40

während sich die absoluten Festigkeiten dieser Materiale verhalten wie:

1 bis 1·3, 0·7, 4, 2·6, 10

Die Verhältnisse der zum Abreissen erforderlichen Wirkungsgrössen sind also sehr verschieden von den Verhältnissen der absoluten Festigkeiten.

Wenn das Abreissen eines Stabes durch die lebendige Kraft einer Masse bewerkstelligt werden soll, muss dieselbe offenbar gleich sein jener Wirkungsgrösse. Diese drückt also auch die Widerstandsleistung gegen die Einwirkung lebendiger Kräfte aus. Man sieht aus obigen Zahlen, wie unvortheilhaft das Gusseisen ist, wenn es sich darum handelt, eine Konstruktion so herzustellen, dass sie der Einwirkung von gewissen lebendigen Kräften widerstehen soll; dass

dagegen Eichenholz und Schmiedeeisen, vorzugsweise aber Kanonenmetall und Gussstahl Vorzügliches leisten. Wenn nicht die Materialpreise so hoch wären, würde man gut thun, solche Maschinen, die der Einwirkung von lebendigen Kräften zu widerstehen haben, aus Kanonenmetall oder Gussstahl herzustellen. Indessen schon das Schmiedeeisen ist sieben mal besser als Gusseisen, daher es kommt, dass auch in der Praxis die Anwendung des Gusseisens so sehr eingeschränkt, dagegen die Benutzung des Schmiedeeisens so sehr ausgedehnt wird.

Biegung eines Stabes. Nehmen wir an, ein Stab sei an dem einen Ende befestiget und werde durch eine auf das andere Ende wirkende Kraft gebogen. Die Kraft K, welche auf das freie Ende drücken muss, wenn sich dasselbe um ξ senken soll, beträgt nach Gleichung (7), Seite 31, wenn $p = 0$ gesetzt wird:

$$K = \frac{3\,\varepsilon\,E\,z}{l^3}\,\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft entwickeln muss, damit die Senkung bis λ fortschreitet, ist:

$$W = \int_0^\lambda K\,d\xi = \frac{3\,\varepsilon\,E\,z}{l^3}\int_0^\lambda \xi\,d\xi = \frac{3\,\varepsilon\,E\,z}{2\,l^3}\,\lambda^2 \quad . \; . \; . \; (2)$$

Nennt man P die der Senkung λ entsprechende Kraft, so ist wegen (1):

$$P = \frac{3\,\varepsilon\,E\,z}{l^3}\,\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Eliminirt man aus (2) und (3) λ, so findet man:

$$W = \frac{P^2\,l^3}{6\,\varepsilon\,E\,z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Nennt man $\mathfrak{S}$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Maximalspannung, die an der Befestigungsstelle durch die Einwirkung von P entsteht, so ist:

$$\mathfrak{S}\,E = P\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

Durch Elimination von P folgt:

$$W = \frac{1}{6}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\frac{E\,l}{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Es ist.	$\frac{E\,l}{z}$	demnach	W
für einen rechteckigen Stab .	$\frac{1}{3}\,\mathfrak{V}$	. . .	$\frac{1}{18}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}$
„ „ cylindrischen Stab .	$\frac{1}{4}\,\mathfrak{V}$	. . .	$\frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}$
„ „ ellyptischen Stab . .	$\frac{1}{5}\,\mathfrak{V}$	. . .	$\frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}^2}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}$

(7)

wobei $\mathfrak{V}$ das Volumen des Stabes bezeichnet.

Die gleichen Resultate findet man auch dann, wenn man annimmt, dass der Stab auf zwei Stützen gelegt und durch eine in seiner Mitte wirkende Kraft gebogen wird, bis eine Maximalspannung $\mathfrak{S}$ eintritt. Nimmt man auch hier wiederum an, dass das Gesetz (1) bis zum Bruch richtig ist und setzt für $\mathfrak{S}$ den Bruchcoefficienten $\mathfrak{B}$, so drücken die Formeln (6) und (7) die Wirkungen aus, welche erforderlich sind, um stabförmige Körper durch Biegung zu brechen. Diese Bruchwirkung ist jedoch nur für ganz einfache, nicht ausgehöhlte Formen dem Volumen proportional; für einen Hohlcylinder wird z. B. $\frac{E}{z} = \frac{\pi}{16}\,\frac{d^4 - d_1{}^4}{d^2}$, und demnach:

$$W = \frac{1}{24}\,\frac{\mathfrak{S}}{\varepsilon}\,\mathfrak{V}\left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$$

woraus man sieht, dass die Bruchwirkung nicht jederzeit dem Volumen proportional ausfällt.

Drehung eines Stabes. Wird ein Stab an einem Ende befestiget und am anderen Ende durch ein Kraftmoment M gedreht, so entsteht in dem Stabe eine Verwindung, wobei der Querschnitt, an welchem das Kraftmoment wirkt, gegen den befestigten Querschnitt um einen (in Theilen des Halbmessers = 1 ausgedrückten) Bogen Θ verdreht wird, der nach Gleichung (11), Seite 59, beträgt:

$$\Theta = \frac{M\,l}{G\,\mu} \quad \text{. (1)}$$

Die Arbeit, welche erforderlich ist, um den Stab aus seinem natürlichen Zustand um einen Bogen α zu verwinden ist:

$$W = \int_0^\alpha M\,d\,\Theta$$

demnach, wenn man für M seinen Werth aus (1) einführt:

$$W = \int_0^\alpha \frac{G \mu \Theta}{l} d\Theta = \frac{1}{2} \frac{G \mu}{l} \alpha^2 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Heisst man M_1 das Moment, welches dem Winkel α entspricht, so hat man wegen (1):

$$\alpha = \frac{M_1 l}{G \mu}$$

Führt man diesen Werth in (2) ein, so wird:

$$W = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 l}{G \mu}$$

Nennt man T die Intensität der Verschiebungskraft in der von der Axe entferntesten Faser, so ist nach (3), Seite 57

$$M_1 = \frac{T \mu}{k}$$

daher wird

$$W = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G} \left(\frac{l \mu}{k^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für einen massiven cylindrirchen Stab von einem Durchmesser d ist das Trägheitsmoment μ des Querschnittes gleich $\frac{\pi}{32} d^4$ und ist $k = \frac{d}{2}$ und dann wird aus (2):

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} \mathfrak{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{V}$ das Volumen des Stabes bedeutet.

Für einen Stab mit quadratischem Querschnitt ist $\mu = \frac{1}{6} b^4$, $k = \frac{b}{\sqrt{2}}$ wobei b die Seite des Quadrates bezeichnet, und es folgt aus (2):

$$W = \frac{1}{6} \frac{T^2}{G} \mathfrak{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Für einen Hohlcylinder ist: $\mu = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_1^4)$, wobei d der äussere, d_1 der innere Durchmesser, und $k = \frac{d}{2}$, demnach wird:

$$W = \frac{1}{4} \frac{T^2}{G} \mathfrak{V} \left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Setzt man in diesen Formeln für T die Coeffizienten der Torsionsfestigkeit, so erhält man die Wirkungsgrössen, welche dem Abwinden entsprechen. Die Tafel Seite 36 (der Resultate) gibt für verschiedene Materialien den Werth von $\frac{T^2}{G}$ für das Abwinden.

Wenn wir die Resultate vergleichen, welche wir für die Wirkungsgrössen gefunden haben, die dem Ausdehnen, Biegen und Drehen entsprechen, so ersieht man, dass in allen Fällen diese Wirkungsgrösse dem Arbeitsmodulus (Quadrat des Festigkeitscoeffizienten, dividirt durch den Modulus der Elastizität), und bei einfachen nicht ausgehöhlten Formen dem Volumen des Stabs proportional ist.

Körper von gleicher Festigkeit.

Es gibt Körperformen, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Einwirkungen von äusseren Kräften in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen zu werden. Man nennt solche Körperformen Körper von gleicher Festigkeit, weil bei denselben die Wahrscheinlichkeit, dass eine Trennung der Atome eintritt, für jeden Querschnitt gleich gross ist. Derlei Formen sollen nun bestimmt werden.

Absolute Festigkeit. Wenn ein aus einem homogenen Material bestehender Stab nach horizontaler Richtung eingespannt und gedehnt wird, treten in dem ganzen Stab gleich grosse Spannungen ein, wenn alle Querschnitte des Stabes gleich gross sind und stetig in einander übergehen.

Ist dagegen ein sehr langer stabförmiger Körper in vertikaler Richtung am oberen Ende festgehalten, am unteren Ende belastet, so werden die Querschnitte eines solchen Stabes von unten nach oben hin nach einem gewissen Gesetze zunehmen müssen, wenn in allen Querschnitten gleich grosse Spannungen eintreten sollen.

Nennt man P die an dem Stab hängende Last, Fig. 2, Tafel IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem der Stab besteht; $\mathfrak{A}$ die Spannung, welche in jedem Quadratcentimenter jedes Querschnittes eintreten soll; Ω den Querschnitt des Stabes in einer Höhe x oberhalb des untersten Punktes. G das Gewicht des Stabtheiles von der Länge x, so ist: $G + P$ die den Querschnitt Ω spannende Kraft und $\frac{G + P}{\Omega} = \mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in diesem Querschnitt. Geht man zu einem nächsten Querschnitt über, der vom unteren Ende um $x + dx$ entfernt ist, so

beträgt das Gewicht des Stabtheils von der Länge dx $\gamma \Omega dx$, ist demnach die spannende Kraft in diesem nächsten Querschnitt $G + \gamma \Omega dx + P$, der Querschnitt selbst ist aber an dieser Stelle $\Omega + d\Omega$, demnach die Spannungsintensität $\frac{G + \gamma \Omega dx + P}{\Omega + d\Omega} = \mathfrak{A}$. Aus diesen zwei Werthen von $\mathfrak{A}$ folgt:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = \frac{\gamma}{\mathfrak{A}} dx$$

Demnach durch Integration:

$$\Omega = \mathfrak{C} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

wobei $e = 2{\cdot}718$ die Basis der natürlichen Logarithmen und $\mathfrak{C}$ die Integrationsconstante bedeutet. Nun ist für den untersten Querschnitt $x = 0$ und $\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}}$, demnach $\mathfrak{C} = \frac{P}{\mathfrak{A}}$, daher

$$\Omega = \frac{P}{\mathfrak{A}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{A}} x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

Diese Regel ist von keinem praktischen Werth, denn es würde zu schwierig und zu kostspielig sein, sehr lange Stäbe oder Stangen, z. B. Schachtgestänge nach dieser komplizirten Form herzustellen, welche der Gleichung (2) entspricht.

Wenn vertikale Gestänge von so beträchtlicher Länge hergestellt werden sollen, dass ihr Gewicht gegen die angehängte Last nicht vernachlässigt werden kann, begnügt man sich in der Praxis mit einer Annäherung, die darin besteht, dass man das ganze Gestänge aus einzelnen Stangen herstellt, von denen jede in allen ihren Theilen gleich grosse Querschnitte hat, und den Querschnitt der aufeinander folgenden Stangen so bestimmt, dass die Spannungsintensitäten in den obersten Querschnitten der einzelnen Stangen des ganzen Gestängs gleich gross ausfallen.

Diese Querschnitte werden auf folgende Weise bestimmt:

Es seien a_1 a_2 a_3 die Querschnitte, l_1 l_2 l_3 die Längen der von unten nach aufwärts gezählten Stangen des ganzen Gestänges, Fig. 3, Taf. IV., γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem die Stangen bestehen, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität in dem obersten Querschnitt jeder einzelnen Stange. Q die unten am Gestänge hängende Last.

Dies vorausgesetzt hat man:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{a_1}(Q + a_1 l_1 \gamma) = \frac{1}{a_2}(Q + a_1 l_1 \gamma + a_2 l_2 \gamma)$$
$$= \frac{1}{a_3}(Q + a_1 l_1 \gamma + a_2 l_2 \gamma + a_3 l_3 \gamma) = \ldots\ldots$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1 \gamma} \\ a_2 &= \frac{Q + a_1 l_1 \gamma}{\mathfrak{A} - l_2 \gamma} \\ a_3 &= \frac{Q + a_1 l_1 \gamma + a_2 l_2 \gamma}{\mathfrak{A} - l_3 \gamma} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

woraus die Querschnitte der einzelnen Stangen berechnet werden können. Durch successive Substitutionen der Werthe von a_1 in a_2, von a_1 und a_2 in a_3 und so fort findet man auch:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{Q}{\mathfrak{A} - l_1 \gamma} \\ a_2 &= \frac{Q\,\mathfrak{A}}{(\mathfrak{A} - l_1 \gamma)(\mathfrak{A} - l_2 \gamma)} \\ a_3 &= \frac{Q\,\mathfrak{A}^2}{(\mathfrak{A} - l_1 \gamma)(\mathfrak{A} - l_2 \gamma)(\mathfrak{A} - l_3 \gamma)} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (2)$$

Bruchfestigkeit. Wird ein Stab, der überall gleiche Querschnitte hat, durch eine äussere Kraft gebogen, so entsteht in einem bestimmten Punkt der Oberfläche eine grösste Spannungsintensität; der Stab ist demnach in diesem Querschnitt schwächer als in jedem andern, und ist demnach keine Form von gleicher Festigkeit, sondern eine solche Form erfordert veränderliche Querschnitte.

Nennt man M das Moment der äusseren Kräfte, welches die in einem bestimmten Querschnitt eintretenden Spannungen und Pressungen hervorruft, $\mathfrak{S}$ die in diesem Querschnitt vorkommende grösste Spannungsintensität, so hat man: $M = \mathfrak{S}\, E$, wobei der Werth von E aus Tafel V. der Resultate des Maschinenbaues zu nehmen ist. Drückt man E durch die Querschnittsdimensionen und M theils durch die äusseren Kräfte, theils durch die Position des Querschnitts aus und betrachtet $\mathfrak{S}$ als eine constante Grösse, so bestimmt obige Gleichung eine Form von gleicher Festigkeit. Wir wollen mehrere Beispiele behandeln.

Erstes Beispiel. Ein stabförmiger Körper wird am einen Ende festgehalten, am andern belastet, Fig. 4., Tafel IV., seine Breite oder Dicke

sei unveränderlich b, seine Höhe hingegen veränderlich. An der Befestigungsstelle sei die Höhe gleich h, in einer Entfernung x vom freien Ende gleich y. Nun sind für die Querschnitte $A\,B$ und $A_1\,B_1$ die Werthe von M gleich $P\,l$ „ $P\,x$
die Werthe von E $\frac{1}{6}\,b\,h^2$ „ $\frac{1}{6}\,b\,y^2$

Soll nun der Körper überall gleiche Festigkeit gewähren, so muss der Werth von $\mathfrak{S}$ für alle Punkte von A bis C unveränderlich bleiben, wir haben daher vermöge $M = \mathfrak{S}\,E$:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2 \qquad P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Vermittelst der ersten dieser Gleichungen bestimmt man die Querschnittsdimension von $A\,B$. Durch Division dieser beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel in C liegt. Ein stabförmiger Körper von gleicher Dicke muss also ein parabolisches Längenprofil erhalten, wenn derselbe überall einerlei Festigkeit gewähren soll.

Diese parabolische Form ist für gusseiserne Körper von grösseren Dimensionen ganz zweckmässig, denn sie ist in Gusseisen leicht herzustellen, und erfordert nicht viel Material. Allein für Körper aus Holz oder aus Schmiedeisen ist diese Form nicht geeignet, weil ihre Herstellung verhältnissmässig viele Arbeit verursacht, und überdies bei Holz die Abfälle beinahe werthlos sind. Für diese beiden Materialien ist es in der Regel angemessen, eine ebenflächige Form zu wählen, die von der parabolischen nicht viel abweicht. Eine solche Annäherungsform erhält man auf folgende Weise. Nimmt man $\frac{x}{l} = \frac{1}{4}$, so wird vermöge (2) $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ oder für $x = \frac{1}{4}\,l$ muss $y = \frac{1}{2}\,h$ gemacht werden, um einen Punkt der Parabel zu finden.

Nimmt man also Fig. 5, Tafel IV., $C\,A_1 = \frac{1}{4}\,C\,A = \frac{1}{4}\,l$, $A_1\,B_1 = \frac{1}{2}\,A\,B = \frac{1}{2}\,h$, so ist B_1 ein Punkt der Parabel, die der gleichen Festigkeit entspricht. Verbindet man B mit B_1 durch eine gerade Linie, verlängert dieselbe und zieht $C\,D$ parallel mit $A\,B$, so erhält man ein Trapez $A\,C\,B\,D$, und dies ist offenbar eine Form, welche annähernd gleiche Festigkeit gewährt. Von A bis A_1 ist der parabolische, von

A_1 bis C der trapezförmige Körper fester, bei A B und A_1 B_1 sind beide gleich fest.

Zweites Beispiel. Constante Höhe, veränderliche Dicke. Lassen wir die Höhe constant, und nehmen die Dicke veränderlich, so erhalten wir mit Berücksichtigung von Fig. 6, Tafel IV., $P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\, b\, h^2$ $P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\, z\, h^2$. Die erste dieser Gleichungen bestimmt wiederum den Querschnitt an der Befestigungsstelle, und durch Division dieser zwei Gleichungen ergibt sich zur Bestimmung des Horizontalschnittes die Gleichung: $\frac{x}{l} = \frac{z}{b}$, woraus hervorgeht, dass dieser Horizontalschnitt ein geradliniges Dreieck ist.

Drittes Beispiel. Geometrisch-ähnliche Querschnitte. Stellen wir die Forderung, dass alle Querschnitte des Körpers geometrisch-ähnliche Rechtecke sein sollen, dann haben wir mit Berücksichtigung von Fig. 7, Tafel IV.:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\, b\, h^2, \quad P\,x = \frac{\mathfrak{S}}{6}\, z\, y^2,$$

Die erste Gleichung bestimmt die Dimensionen an der Befestigungsstelle. Durch Division dieser Gleichungen folgt: $\frac{l}{x} = \frac{b\,h^2}{z\,y^2}$ oder auch:

$$\frac{l}{x} = \frac{h^3}{y^3}\,\frac{\frac{b}{h}}{\frac{z}{y}}$$

Allein weil wir die Forderung stellen, dass alle Querschnitte geometrisch-ähnliche Rechtecke sein sollen, so ist $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$, demnach folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Wegen $\frac{b}{h} = \frac{z}{y}$ ist aber $\frac{y}{h} = \frac{z}{b}$, demnach:

$$\frac{z}{b} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Jede dieser zwei Gleichungen (1) und (2) entspricht einer kubischen Parabel. Der Stab müsste also im Grundriss und in der

Ansicht nach kubischen Parabeln verjüngt werden, um überall die gleiche Festigkeit darzubieten. Diese Form empfiehlt sich aber nicht für die Ausführung, denn ihre Herstellung verursacht sehr viele Arbeit, und überdies ist auch diese Form sehr unschön. Man thut auch hier am besten, eine Annäherungsform zu wählen. Setzt man in (1) und (2) $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$ so findet man $\frac{y}{h} = \frac{1}{2}$ $\frac{z}{b} = \frac{1}{2}$.

Macht man Fig. 8, Tafel IV., $\overline{C A_1} = \frac{1}{8} \overline{C A}$, $\overline{A_1 B_1} = \frac{1}{2} \overline{A B}$ $\overline{E_1 F_1} = \frac{1}{2} \overline{E F}$ und verzeichnet die Trapeze A C B D, E F G H, so bestimmen diese eine geeignete Annäherungsform, die leicht ausgeführt werden kann, beinahe gleiche Festigkeit darbietet und auch beinahe nicht mehr Material erfordert, als die komplizirte Form mit zwei kubischen Parabeln.

Viertes Beispiel. Rotationsfläche von gleicher Festigkeit. Für eine Rotationsfläche, Fig. 9, Tafel IV., hat man:

$$\left.\begin{aligned} P\,l &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\, d^3 \\ P\,x &= \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\, y^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die erste dieser Gleichungen gibt $d = \sqrt[3]{\frac{32}{\mathfrak{S}\pi} P\,l}$. Durch Division der beiden Gleichungen findet man:

$$\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dies ist abermals eine kubische Parabel, also eine sehr schwierig auszuführende und sehr hässliche Form.

Für $\frac{x}{l} = \frac{1}{8}$ wird $\frac{y}{d} = \frac{1}{2}$.

Bildet man also einen abgestumpften Kegel, Fig. 10, Tafel IV., der in einer Entfernung $\frac{1}{8}\,l$ vom dünnen Ende halb so dick ist, als an der Basis, so ist dies eine Annäherungsform an die kubische Parabel.

Körperformen von gleicher Festigkeit gegen Biegung durch Zusammendrückung.

Für einen Stab, der durch eine Kraft, welche nach der Richtung der Axe wirkt, zusammengedrückt und gebogen wird, haben wir nach Seite 42 und 43 folgende Resultate:

$$\left.\begin{array}{l} p = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} - \frac{P}{E z} y \zeta \\ \\ \frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{P}{\varepsilon z E} y = o \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Die Bedeutung der einzelnen Grössen ist Seite 41 angegeben. Nennt man Π die Intensität der Pressung, welche in dem Punkt q herrscht, Fig. 6 und 7, Tafel III., und setzt $m\,q = z_1$, so muss der ersten der Gleichungen (1) entsprochen werden, wenn man p gleich Π und ζ gleich $- z_1$ setzt. Man erhält daher:

$$\Pi = \frac{P \cos \varphi}{\Omega} + \frac{P}{E} \frac{z_1}{z} y \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Ist die Biegung sehr schwach, so darf man sich erlauben, $\cos \varphi$ gleich 1 zu setzen, und dann wird:

$$\Pi = \frac{P}{\Omega} + P \frac{z_1}{z} \frac{y}{E} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

Wenn wir nun die Bedingung stellen, dass der Körper in allen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen sein soll, so muss Π für jeden Punkt der Linie $B\,B_1\,B_2$ ein und denselben Werth haben. Verlangen wir überdies, dass alle Querschnitte des Körpers geometrisch-ähnliche Figuren sind, so ist $\frac{z_1}{z}$ für alle Querschnitte constant. Der Werth von Π fällt also in diesem Falle wegen (3) constant aus, wenn $\frac{y}{E}$ für jeden Querschnitt ein und denselben Werth $\left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{P z_1}$ hat.

Setzen wir:

$$\frac{1}{P} \left(\Pi - \frac{P}{\Omega}\right) \frac{z}{z_1} = \frac{y}{E} = k \quad \ldots \ldots (4)$$

so wird die zweite der Gleichungen (1):

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{P k}{\varepsilon z} \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

In dieser Gleichung ist aber in unserem Falle z eine Funktion von x. Weil wir voraussetzen, dass alle Querschnitte geometrisch-ähnliche Figuren sind, so können wir der Grösse E die Form geben:

$$E = m z^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

und es ist dann m eine von der Grösse des Querschnittes unabhängige Grösse, oder eine Grösse, die für *alle* Querschnitte des Stabes einerlei Werth hat. Wir erhalten nunmehr wegen (4):

$$y = k E = k m z^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Wäre die Gleichung der Axenfaser schon bekannt, so würde man vermittelst dieses Ausdruckes diejenige Begrenzungslinie des Stabes finden, welche einer durchaus gleichen Festigkeit entspricht. Allein die Gleichung der Axenfaser ist noch nicht bekannt, und ist selbst von der Begrenzungslinie des Stabes abhängig, man muss demnach beide Linien direkt zu bestimmen suchen. Dies geschieht auf folgende Weise. Aus (7) folgt durch Differenziation:

$$d y = k m 3 z^2 d z, \quad d^2 y = 3 k m (z^2 d^2 z + 2 z d z^2)$$

Führt man diesen Werth in (5) ein, so folgt:

$$3 k m \frac{z^2 d^2 z + 2 z d z^2}{d x^2} = -\frac{P k}{\varepsilon z}$$

oder:

$$z^3 \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 z^2 \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = -\frac{P}{3 m \varepsilon}$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{P}{3 m \varepsilon} = \lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

so wird:

$$z^3 \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 z^2 \left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = -\lambda^2 \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Das Integrale dieser Gleichung gibt die Begrenzungslinie, welche einer gleichen Festigkeit entspricht.

Setzt man, um die Integration zu bewerkstelligen:

$$\left(\frac{d z}{d x}\right)^2 = u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

so wird:

$$\frac{d^2 z}{d x^2} = \frac{1}{2} \frac{d u}{d z}$$

und die Gleichung (9) wird:

$$\frac{1}{2} z^3 \frac{d u}{d z} + 2 z^2 u = - \lambda^2$$

oder:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{z^2 d u}{\lambda^2 + 2 u z^2} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Setzt man hier weiter:

$$\lambda^2 + 2 u z^2 = v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

demnach:

$$d v = 2 z^2 d u + 4 u z d z, \quad z^2 d u = \frac{d v - 4 u z d z}{2}$$

so wird die Gleichung (11):

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v - 4 u z d z}{2 v} = o$$

oder wenn für u sein Werth aus (12) eingeführt wird, findet man nach einigen einfachen Reduktionen:

$$\frac{d z}{z} + \frac{1}{2} \frac{d v}{v + \lambda^2} = o$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$\text{lognat } z + \text{lognat } (v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}} = \text{Const}$$

oder:

$$z = \frac{A}{(v + \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

wobei A die Constante der Integration bedeutet.

Setzt man für v seinen Werth aus (12), so wird:

$$z^2 = \frac{A^2}{2 (\lambda^2 + u z^2)}$$

und hieraus folgt:

$$u = \frac{1}{z^4} \left(\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2 \right)$$

oder wegen (10):

$$\frac{d z}{d x} = \frac{\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 z^2}}{z^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 14)$$

Nennt man 2 l die ganze Länge des Stabes, r den Werth von z für $x = l$, so ist für $z = r$ $\quad \frac{d z}{d x} = o$,

demnach:

$$\sqrt{\frac{A^2}{2} - \lambda^2 r^2} = o \quad \text{oder} \quad \frac{A^2}{2} = \lambda^2 r^2$$

folglich:

$$\frac{dz}{dx} = \lambda \frac{\sqrt{r^2 - z^2}}{z^2}, \quad \text{oder} \quad dx = \frac{1}{\lambda} \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$x = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{z\sqrt{r^2 - z^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \text{ Arc sin } \frac{z}{r}\right) + \text{Const}$$

oder weil für $x = o$ $z = o$ wird, so ist $\text{Const} = o$, demnach

$$x = \frac{r^2}{2\lambda}\left[\text{Arc sin } \frac{z}{r} - \frac{z}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\right] \quad . \ . \ . \ . \quad (15)$$

für $x = l$ wird $z = r$, demnach

$$l = \frac{r^2}{2\lambda} \text{ Arc sin } 1 = \frac{r^2}{2\lambda}\frac{\pi}{2} = \frac{r^2 \pi}{4\lambda} \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (16)$$

Durch Division von (15) und (16) folgt:

$$\frac{x}{l} = \frac{2}{\pi}\left[\text{Arc sin} \frac{z}{r} - \frac{z}{r}\sqrt{1 - \left(\frac{z}{r}\right)^2}\right] \quad . \ . \ . \quad (17)$$

Die Gleichung (16) gibt endlich, wenn man für λ seinen Werth aus (8) einführt:

$$16 \, l^2 \frac{P}{3 \, m \, \varepsilon} = r^4 \pi^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (18)$$

Nennt man E_1 den Werth von E, welcher dem mittleren Querschnitt des Stabes entspricht, so ist wegen (6) $m = \frac{E_1}{r^3}$, demnach wird (18):

$$P = \frac{3}{16} \pi^2 \varepsilon \frac{r \, E_1}{l^2} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (19)$$

Diese Gleichung bestimmt das Tragungsvermögen des Stabes, oder bestimmt, wenn P gegeben ist, den mittleren Querschnitt des Stabes. Für einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt ist:

$$E_1 = \frac{\pi}{32}(2 \, r)^3 = \frac{\pi \, r^3}{4}$$

und dann findet man:

$$P = \frac{3}{64} \pi^3 \varepsilon \frac{r^4}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Nennt man d den Durchmesser des Stabes in der Mitte, $L = 2\,l$ die totale Länge des Stabes, so wird:

$$P = \frac{3}{4} \frac{\pi^3}{64} \varepsilon \frac{d^4}{L^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Vergleicht man diesen Werth von P mit jenem, der für einen cylindrischen Stab gefunden wurde, so sieht man, dass das Tragungsvermögen des Stabes von gleicher Festigkeit gleich ist $\frac{3}{4}$ von jenem eines cylindrischen von gleicher Dicke.

Aus (7) folgt $z = \sqrt[3]{\frac{y}{k\,m}}$. Führt man diesen Werth von z in (17) ein, so ergibt sich eine Beziehung zwischen x und y und dies ist die Gleichung der gebogenen Axenfaser.

Die Gleichung (17) gibt:

für $\frac{z}{r} =$	0·75	0·50	0·25
$\frac{x}{l} =$	0·224	0·058	0·0106

Hieraus erkennt man, dass man eine Stabform findet, welche annähernd einerlei Festigkeit darbietet, wenn man an den Enden des Stabes Querschnitte annimmt, welche dem mittleren Querschnitt geometrisch ähnlich, aber linear halb so gross sind und diese Endquerschnitte mit dem mittleren durch gerade Linien verbindet. Es ist nämlich für $\frac{z}{r} = 0·5$, $\frac{x}{l} = 0·058$, also x beinahe gleich Null.

Aequivalenz der Querschnitte.

Wir sagen, zwei Querschnitte seien äquivalent (gleichwerthig), wenn dieselben unter gleichen Umständen einerlei Festigkeit gewähren.

Hinsichtlich der absoluten Festigkeit sind alle Querschnitte von gleicher Grösse äquivalent.

Hinsichtlich der Bruchfestigkeit sind zwei Querschnitte äquivalent, wenn für dieselben die E-Funktionen (Tafel V. der Resultate für den Maschinenbau) gleichen Werth haben.

Ein runder und ein viereckiger Querschnitt sind demnach hinsichtlich des Bruches äquivalent, wenn:

$$\frac{1}{6} b h^2 = \frac{\pi}{32} d^3$$

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{32} 6 \left(\frac{h}{b}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Diese Regel ist bequem, wenn für einen runden Querschnitt ein äquivalenter rechteckiger gesucht werden soll. Es sei z. B. für einen Cylinder von 10 Centimeter Durchmesser ein Rechtecht zu suchen, in welchem sich die Höhe h zur Breite b wie 2 : 1 verhält. Dann hat man $d = 10$, $\frac{h}{b} = 2$ und die Gleichung (1), so wie die Tabelle Seite 30 der Resultate des Maschinenbaues gibt:

$$\frac{h}{d} = 1{\cdot}056, \quad h = 10{\cdot}56 \text{ und } b = \frac{10{\cdot}56}{2} = 5{\cdot}28$$

Ein runder und ein ellyptischer Querschnitt haben einerlei relative Festigkeit, wenn:

$$\frac{\pi}{32} d^3 = \frac{\pi}{32} b h^2$$

wobei h die mit der biegenden Kraft parallele Axe des ellyptischen Querschnittes bezeichnet.

Hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\left(\frac{h}{b}\right)}$$

Die Last Q, welche ein Stab aufrecht stehend zu tragen vermag, ist Seite 46 gefunden worden:

$$Q = \varepsilon \pi^2 E \frac{z}{l^2}$$

Zwei Stäbe aus einerlei Material und von gleicher Länge werden also gleich sicher tragen, wenn für dieselben die Werthe von $z\,E$ übereinstimmen, d. h. wenn die Trägheitsmomente der Querschnitte gleich gross sind.

Ein runder und ein rechtekiger Querschnitt haben daher einerlei Tragfähigkeit, wenn:

$$\frac{\pi}{32} d^3 \frac{d}{2} = \frac{1}{6} b h^2 \frac{h}{2}$$

wobei h die kleinere von den Dimensionen des Rechteckes bezeichnet. Aus dieser Gleichung folgt:

$$\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{32}\, 6 \left(\frac{h}{b}\right)}$$

Ein runder und ein elliptischer Querschnitt geben gleiche Tragkraft wenn:

$$\frac{\pi}{32}\, d^3 \frac{d}{2} = \frac{\pi}{32}\, b \cdot h^2 \frac{h}{2}$$

woraus folgt: $\frac{h}{d} = \sqrt[4]{\frac{h}{b}}$ wobei b die kleinere Axe des elliptischen Querschnittes bedeutet.

Allgemeinster Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande krummen Stabes.

Betrachten wir nun den allgemeinsten Fall des Gleichgewichtes eines im natürlichen Zustande gekrümmten Stabes, indem wir annehmen: 1) die Axenlinie des Stabes sei im natürlichen Zustande desselben eine Linie von doppelter Krümmung; 2) die äusseren, auf den Stab einwirkenden Kräfte seien in beliebiger Anzahl vorhanden, und ihre Angriffspunkte befinden sich an beliebigen Orten.

Es sei Fig. 1, Tafel V., A M B ein Stück der Axenlinie des Stabes im natürlichen Zustande desselben, M, N, P drei unendlich wenig von einander entfernte Punkte der Axenlinie. Denken wir uns durch diese drei Punkte eine Ebene F gelegt, so ist dieselbe die Krümmungsebene des Bogenstückes M N P. Legen wir durch die Punkte M und N Normalebenen E E_1 (d. h. Ebenen, die in den Punkten M und N senkrecht stehen, auf den Berührungslinien, welche in diesen Punkten an die Axenlinie gezogen werden können), so schneiden sich dieselben in einer auf der Krümmungsebene senkrecht stehenden Linie H O K, und die Entfernung des Durchschnittspunktes O dieser Linie mit der Krümmungsebene F von M oder N bestimmt den Krümmungshalbmesser des Kurvenstückes M N. Nennt man diesen Krümmungshalbmesser ϱ_0, so ist $\varrho_0 = O\,M = O\,N$.

Es sei Fig. 2, Tafel V., der Querschnitt des Stabes durch die durch M gelegte Normalebene E, O M z die Linie, in welcher die Ebene E dieses Querschnittes durch die Krümmungsebene F geschnitten wird; M x eine auf M z senkrechte Linie, die also parallel ist zur Durchschnittslinie H O K der durch M und N gelegten Normalebenen E E_1.

Wir nehmen auch bei dieser Aufgabe an, dass durch die Formveränderungen, welche die äusseren Kräfte veranlassen, die relative Lage aller Atome eines und desselben Querschnittes nicht verändert werde, und dass alle Atome, welche im natürlichen Zustande des Stabes in einer durch das Atom M gelegten Normalebene liegen, auch nach erfolgter Formänderung in einer Ebene liegen, die gefunden wird, wenn man durch das gleiche Atom M eine Normalebene zum deformirten Axenelement legt.

Nehmen wir einstweilen an, dass durch die Einwirkung der äusseren Kräfte weder eine Ausdehnung oder Zusammenpressung der Axenfaser, noch eineTorsion der durch M und N gehenden Querschnitte, sondern nur allein eine Biegung eintritt, in Folge deren die Durchschnittslinie H O K der durch M und N gehenden Normalebenen E E_1 nach H_1 O_1 K_1 rückt, so ist die auf diese Linie senkrechte z_1 M O_1, die Linie, in welcher die Krümmungsebene des gebogenen Axenelementes die durch das Atom M gehende Normalebene E scheidet. Ziehen wir M x_1 senkrecht auf M z_1, nennen den Winkel x M $x_1 = \beta$ und M $p = \xi$ m $p = \zeta$ M $p_1 = \xi_1$ m $p_1 = \zeta_1$ die Coordinaten irgend eines Atoms m des durch M gehenden Normalquerschnitts des Stabes, ϱ den Krümmungshalbmesser des gebogenen Axenelementes M N und $d\varphi$ den Winkel, den im gebogenen Zustande die durch M und N gehenden Normalebenen miteinander bilden, endlich $d s_0$ die ursprüngliche Länge des Faserelementes M N.

Dies vorausgesetzt ist:

$$d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

die ursprüngliche Länge des durch den Punkt m gehenden, zwischen den Normalebenen enthaltenen Faserelementes.

$$d s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right)$$

die Länge des gleichen Faserelementes nach erfolgter Biegung.

Demnach:

$$d s_0 \left(1 + \frac{\zeta_1}{\varrho}\right) - d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) = d s_0 \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

die in Folge der Biegung in dem Faserelement eingetretene Verlängerung. Nennen wir σ die Spannungsintensität, welche diese Ausdehnung in dem Faserelement, dessen ursprüngliche Länge

$$d s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

war, hervorgebracht hat, ε den Modulus der Elastizität des Materials, so ist nach dem Stabausdehnungsgesetz:

$$d\, s_0 \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) = d\, s_0 \left(1 + \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)\frac{\sigma}{\varepsilon}$$

In allen Fällen der Anwendung sind die Querschnittsdimensionen eines Stabes gegen die Krümmungshalbmesser sehr klein, kann man demnach $\frac{\zeta}{\varrho_0}$ gegen die Einheit vernachlässigen und dann folgt aus obigem Ausdruck:

$$\sigma = \varepsilon \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Bisher haben wir angenommen, dass die äusseren Kräfte nur eine Biegung, nicht aber eine Dehnung des Axenelementes M N veranlassen. Findet auch eine Dehnung statt und beträgt die Intensität der dehnenden Kraft S, so ist die Spannungsintensität des Faserelementes bei m:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{\zeta_1}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Zwischen den Coordinaten $\zeta\ \xi$ und $\zeta_1\ \xi_1$ bestehen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \zeta \cos\beta + \xi \sin\beta \\ \xi_1 &= \xi \cos\beta - \zeta \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Führt man diesen Werth von ζ_1 in (2) ein, so folgt:

$$\sigma = S + \varepsilon \left(\frac{\zeta \cos\beta + \xi \sin\beta}{\varrho} - \frac{\zeta}{\varrho_0}\right)$$

oder

$$\sigma = S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nennt man d f den unendlich kleinen Querschnitt eines bei m befindlichen Faserelementes, so ist $\int \sigma\, d f$ die Summe aller Spannungen und sind $\int \sigma\, d f\, \xi$, $\int \sigma\, d f\, \zeta$ die Summen der Momente aller Spannungen, in Bezug auf die Axen M x und M z und wir erhalten:

$$\int \sigma\, d f = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} d f$$

$$\int \sigma\, \xi\, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} \xi\, df$$

$$\int \sigma\, \zeta\, df = \int \left\{ S + \varepsilon \left[\zeta \left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) + \xi \frac{\sin\beta}{\varrho} \right] \right\} \zeta\, df$$

Berücksichtiget man 1) dass für diese Integrationen nur allein ζ und ξ variabel, ϱ und ϱ_0 dagegen constant sind; 2) dass der Voraussetzung gemäss M der Schwerpunkt des Querschnittes ist, nennt Ω diesen Querschnitt und setzt zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \int \zeta^2\, df &= \binom{m}{\zeta} \\ \int \xi^2\, df &= \binom{m}{\xi} \\ \int \zeta\, \xi\, df &= \binom{m}{\xi\zeta} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so werden obige Integrale:

$$\left.\begin{aligned} \int \sigma\, df &= S\,\Omega \\ \int \sigma\, \xi\, df &= \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \binom{m}{\xi\zeta} + \frac{\sin\beta}{\varrho} \binom{m}{\xi} \right] \\ \int \sigma\, \zeta\, df &= \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \binom{m}{\zeta} + \frac{\sin\beta}{\varrho} \binom{m}{\xi\zeta} \right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Zerlegen wir jede von den äusseren Kräften, welche auf das bei M beginnende und bis an sein Ende B fortgehende Stabstük einwirken, in drei Seitenkräfte X Y Z und zwar so, dass die Richtungen von X und Z parallel sind mit den Coordinatenaxen M x M z und dass Y parallel wirkt mit der zum Punkt M des Axenelementes gezogenen Berührungslinie; nennen ferner x y z die Coordinaten des Angriffspunktes einer dieser Kräfte, so sind $\Sigma\,(Yz - Zy)$ $\Sigma\,(Yx - Xy)$ die Summen der Momente dieser äusseren Kräfte in Bezug auf die Axen M x und M z, und zwar sind diese Momente so berechnet, dass sie bei m eine Dehnung hervorzubruingen streben. Endlich ist $\Sigma\,(Xz - Zx)$ die Summe der Momente dieser Kräfte in Bezug auf die Axe M y (die mit der Tangente an den Punkt M zusammenfällt).

Für den Fall, dass das Ende des Stabstückes, dessen Gleichgewichtszustand wir untersuchen, nicht ganz frei, sondern festgehalten oder eingespannt wäre, so kann man das Stabende doch so behandeln, wie wenn es vollkommen frei wäre, vorausgesetzt, dass man am Stabende gewisse Kräfte $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ und Momente $\binom{M}{x}\binom{M}{y}\binom{M}{z}$

einwirken lässt, und zwar die Kräfte nach Richtungen, die mit den Axen M x M y M z parallel sind, die Momente in Bezug auf Axen, die durch den Schwerpunkt der Endfläche des Stabes parallel zu M x M y M z gelegt sind.

Um die Gleichgewichtsgleichungen aufstellen zu können, haben wir noch die Torsion des Stabes zu berücksichtigen. Durch die Torsion des Stabes wird bewirkt, dass das zwischen den Normalebenen E und E_1 enthaltene, bei m befindliche Faserelement eine schwache Verlängerung und dass seine Richtung gegen die Normalebene E eine Neigung erhält. Allein wenn wir annehmen, dass alle Formänderungen sehr schwach sind, so wird der Einfluss der Torsion auf die Spannung σ verschwindend klein, kann man also die Ausdrücke (6) auch noch gelten lassen, wenn eine schwache Torsion vorhanden ist. Die aus der Torsion entstehenden Abschiebungskräfte müssen jedoch in Rechnung gebracht werden, denn sie sind es, welche den auf die Drehung um die Axe M y wirkenden äusseren Kräften das Gleichgewicht halten.

Nennen wir $\left(\begin{smallmatrix} m \\ y \end{smallmatrix}\right)$ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf die Axe y, G den Modulus der Elastizität für Torsion, $d\Theta$ den Winkel, um welchen die Normalebene E_1 gegen die Normalebene E gedreht wird, so ist nach Gleichung (11), Seite 59 der Torsionstheorie:

$$G\begin{pmatrix} m \\ y \end{pmatrix}\frac{d\Theta}{ds} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

das Torsionsmoment, welches allen im Querschnitt vorkommenden Verschiebungskräften entspricht.

Da nun die zwischen den Ebenen E und E_1 herrschenden Spannungen und die in der Ebene von E wirkenden Abschiebungskräfte im Gleichgewicht sein müssen mit allen äusseren Kräften, die auf das Stabstück einwirken, das bei M beginnt und bis ans Ende fortgeht, so hat man folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\, Y &= \Omega\, S \\
\Sigma\,(Y z - Z y) &= \varepsilon\left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)\begin{pmatrix} m \\ \zeta \end{pmatrix}+\frac{\sin\beta}{\varrho}\begin{pmatrix} m \\ \xi\,\zeta \end{pmatrix}\right] \\
\Sigma\,(Y x - X y) &= \varepsilon\left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_0}\right)\begin{pmatrix} m \\ \xi\,\zeta \end{pmatrix}+\frac{\sin\beta}{\varrho}\begin{pmatrix} m \\ \xi \end{pmatrix}\right] \\
\Sigma\,(X z - Z x) &= G\begin{pmatrix} m \\ y \end{pmatrix}\frac{d\Theta}{ds}
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Dabei sind aber in der Summe Σ auch die Kräfte $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Z}$ und Momente $\binom{M}{x}$ $\binom{M}{y}$ $\binom{M}{z}$ mit eingeschlossen.

Die erste dieser Gleichungen bestimmt die Spannungsintensität S des Axenfaserelementes M N, die zweite und dritte dieser Gleichungen bestimmen den Winkel β und den Krümmungshalbmesser ϱ.

Sind diese Grössen bestimmt, so kann man vermittelst Gleichung (4) die Spannungsintensität σ für einen beliebigen Punkt m des Querschnittes bei M bestimmen; die vierte der Gleichungen bestimmt endlich den Torsionswinkel.

Um die Gestalt der deformirten Axenfaser zu finden, müssen allerdings auch noch die Differenzialausdrücke für den Krümmungshalbmesser in Rechnung gebracht werden, was in vielen Fällen zu äusserst verwickelten Rechnungen führt, in manchen Fällen geben aber schon die Gleichungen (8) die Lösung der Aufgabe. Bevor wir jedoch zu den Anwendungen übergehen, wollen wir noch mehrere Punkte des Problems erklären.

Betrachtet man in (4) σ als eine Constante, so ist diese Gleichung in Bezug auf ξ und ζ eine Gleichung des ersten Grades, woraus man sieht, dass alle Punkte eines und desselben Querschnittes, in welchem einerlei Spannung herrscht, eine gerade Linie bilden. Nennt man α den Winkel $x M x_3$, den eine durch M zu dieser geraden Linie von gleicher Spannung parallel gezogene Gerade mit der Axe M x bildet, so ist:

$$\operatorname{tang}(\pi - \alpha) = -\frac{\frac{\sin\beta}{\varrho}}{\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}} = -\frac{\sin\beta}{\cos\beta - \frac{\varrho}{\varrho_0}}$$

oder:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\beta}{\cos\beta - \frac{\varrho}{\varrho_0}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Suchen wir eine in der Ebene des Normalschnittes, also in der Ebene der x z liegende Linie, welche eine solche Richtung hat, dass sich die statischen Momente der äusseren Kräfte in Bezug auf diese Linie als Drehungsaxe genommen aufheben. Nennen wir γ den Winkel, den diese Linie mit der Richtung M z bildet, und legen durch M ein Coordinatensystem $M x_2$ $M y_2$ $M z_2$, so dass $M y_2$ mit M y $M z_2$ mit obiger Linie übereinstimmt, die mit M z einen Winkel γ bildet, so hat man zunächst zur Bestimmung der Coordinaten x_2 y_2 z_2 eines Punktes in Bezug auf dieses System:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x \cos\gamma - z \sin\gamma \\ y_2 &= y \\ z_2 &= z \cos\gamma + x \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Zerlegen wir ferner die Kräfte X Y Z nach dieser neuen Coordinatenaxe, so ist:

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= X \cos\gamma - Z \sin\gamma \\ Y_2 &= Y \\ Z_2 &= Z \cos\gamma + X \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hieraus findet man für die Summe der Momente in Bezug auf die Axe $O\,z_2$:

$$\Sigma\,(Y_2\,x_2 - X_2\,y_2) = \Sigma\,[Y\,(x \cos\gamma - z \sin\gamma) - (X \cos\gamma - Z \sin\gamma)\,y]$$

oder:

$$\Sigma\,(Y_2\,x_2 - X_2\,y_2) = \cos\gamma\,\Sigma\,(Y\,x - X\,y) - \sin\gamma\,\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)$$

Diese Summe verschwindet, wenn:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Vermöge der zweiten und dritten der Gleichungen (8) ist nun auch:

$$\frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} = \frac{\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)}$$

Berücksichtiget man den Ausdruck (9), so wird:

$$\frac{\Sigma\,(Y\,x - X\,y)}{\Sigma\,(Y\,z - Z\,y)} = \frac{\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)} \quad \ldots\ldots, \quad (13)$$

Wegen (12) und (13) wird:

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi}\right)}{\left(\frac{m}{\zeta}\right) + \operatorname{tang}\alpha\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Wenn der Querschnitt so geformt ist, dass er durch vier unter 45^0 gegeneinander geneigte Ebenen in acht congruente Parthien getheilt

werden kann und wenn ferner die initiale Krümmung des Stabes von der Art ist, dass die Krümmungsebene des Stabes mit einer Hauptaxe der Figur übereinstimmt, so ist $\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) = o$ und $\left(\frac{m}{\xi}\right) = \left(\frac{m}{\zeta}\right)$ und dann wird vermöge (14):

$$\text{tang}\ \gamma = \text{tang}\ \alpha$$

d. h. unter diesen beiden Voraussetzungen steht die Richtung der Linie in Bezug auf welche sich die Momente der äusseren Kräfte aufheben, senkrecht auf der Linie, in welcher einerlei Spannung herrscht.

Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.

Die folgende Tabelle enthält die Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität derjenigen Materialien, welche im Maschinenbau vorzugsweise verwendet werden.

Columne $\mathfrak{A}$ Coeffizienten für die absolute Festigkeit per 1 Quadrat-Centimeter.

Columne $\mathfrak{B}$ Brechungs - Coeffizienten per 1 Quadrat-Centimeter.

Columne T Coeffizienten für den Bruch durch Abwinden.

Columne ε Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Ausdehnung, Zusammenpressung und Biegung der Körper.

Columne G Modulus der Elastizität der Materialien zur Berechnung der Torsion von Stäben.

Columne $\frac{\mathfrak{A}^2}{\varepsilon}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abreissen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{\mathfrak{B}^2}{\varepsilon}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abbrechen der Körper erforderlich sind.

Columne $\frac{T^2}{G}$ Coeffizienten zur Berechnung der Wirkungsgrössen, welche zum Abwinden von Stäben erforderlich sind.

Die Coeffizienten sind sämmtlich die mittleren Werthe der zahlreichen Versuchsresultate über die Festigkeit der Materialien.

Zusammenstellung der Coeffizienten für die Festigkeit und Elastizität der Materialien.

Material.	𝔄	𝔅	T	ε	G	$\frac{𝔄^2}{\varepsilon}$	$\frac{𝔅^2}{\varepsilon}$	$\frac{T^2}{G}$
Eichenholz . .	720	700	280	120000	48000	4·3	4	1·6
Eschenholz . .	1195	900	478	112000	44800	13	7·2	5·1
Tannenholz . .	854	600	240	100000	40000	7·2	3·6	1·44
Buchenholz . .	803	720	321	93000	37200	6·9	5·6	2·8
Schmiedeeisen (dünn)	4350	7000	7000	2500000	1000000	7·4	20	47
Schmiedeeisen, dickere Stäbe	3300	4000	4500	1500000	600000	7·2	10·6	33.7
Eisendrath . .	7000	—	—	1800000	720000	27	—	—
Gusseisen . . .	1000 1300	3000	3000	1000000	400000	1·0 1·7	9	22·5
Gussstahl . . .	10000	16000	10000	2000000	960000	40	128	104
Stahl, mittlere Qualität . . .	7500	—	7500	3000000	1200000	18	—	46·8
Stahl, ordinäre Qualität . . .	3600	—	3600	2000000	800000	6	—	16
Kanonenmetall	2600	—	2300	700000	360000	10	—	14·7
Kupfer, gehämmert	2500	—	—	1310000	—	5	—	—
Kupfer, gegossen	1300	—	2000	—	—	—	—	—
Messing	1300	2270	2100	645000	258000	2·6	7·9	17·1
Zinn	333	—	658	320000	—	—	—	—
Blei	128	—	458	540000	—	0·03	—	—
Zink	199	—	—	—	—	—	—	—
Glas	248	—	—	9000	—	7·0	—	—
Kalbleder . . .	129	—	—	391	—	43	—	—
Gegerbtes Schafleder . .	110	—	—	381	—	32	—	—
Weisses Rossleder	272	—	—	748	—	99	—	—
Dünnes Rossleder	218	—	—	476	—	100	—	—
Corduan Rossleder	114	—	—	252	—	51	—	—
Kuhleder . . .	271	—	—	683	—	108	—	—
Hanfseile . . .	510	—	—	—	—	—	—	—

Erfahrungsresultate über die Elastizitätsgrenze.

Nennt man:

$\mathfrak{A}$ die absolute Festigkeit,

$\mathfrak{R}$ die rückwirkende Festigkeit,

$\mathfrak{A}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Spannungskraft an der Elastizitätsgrenze der Ausdehnung,

$\mathfrak{R}_1$ die auf einen Quadratcentimeter bezogene Zusammendrückungskraft an der Elastizitätsgrenze,

a_1 die lineare Ausdehnung eines Stabes an der Elastizitätsgrenze,

r_1 die lineare Zusammendrückung eines Stabes an der Elastizitätsgrenze,

so hat man der Erfahrung zufolge annähernd nachstehende Resultate:

Material.	$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{A}}$	$\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{A}}$	$\frac{\mathfrak{R}_1}{\mathfrak{A}}$	a_1	r_1
Schmiedeeisen	$\frac{4}{5}$	0·4	0·4	$\frac{1}{1250}$	$\frac{1}{1250}$
Eisenblech	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{1222}$	$\frac{1}{1222}$
Eisendraht	$\frac{4}{5}$	0·4	0·4	$\frac{1}{843}$	$\frac{1}{843}$
Gusseisen	5·5	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{1562}$	$\frac{1}{521}$
Tannenholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{666}$
Fichtenholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{536}$	$\frac{1}{714}$
Kiefernholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{444}$	$\frac{1}{592}$
Lerchenholz	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{533}$
Eichenholz	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{469}$	$\frac{1}{563}$

ZWEITER ABSCHNITT.

Die Maschinenbestandtheile.

(Längeneinheit: Ein Centimeter. Gewichtseinheit: Ein Kilogramm.)

Allgemeine Grundsätze. Die allgemeinen Grundsätze, welche bei der Construktion der Maschinenbestandtheile beachtet werden müssen, sind bereits in den „Prinzipien des Maschinenbaues", Seite 303 bis 312, ausführlich erklärt worden; wir haben es daher in diesem Abschnitte nur mit dem speziellen Studium der einzelnen Bestandtheile zu thun. Die Regeln, welche wir in diesem Abschnitt aufstellen, werden vorzugsweise durch die im ersten Abschnitt behandelte Lehre von der Festigkeit und Elastizität der Materialien begründet, sie erhalten jedoch durch die Seite 309 der „Prinzipien des Maschinenbaues" erklärte Methode der Verhältnisszahlen eine besondere Gestaltung, wodurch ihre Anwendung in hohem Grade erleichtert wird. Die wesentlichsten Ergebnisse der Untersuchungen dieses Abschnittes findet man in den Resultaten für den Maschinenbau von Seite 38 bis 92 zusammengestellt und für den praktischen Gebrauch erklärt.

Das Construktions-Material. Wir haben im ersten Abschnitte die Lehre von der Festigkeit und Elastizität der Materialien unter der Voraussetzung entwickelt, dass das Material in jedem Punkt des Körpers von gleicher Beschaffenheit sei und dass es den Raum mit Stetigkeit erfüllt.

Diese Eigenschaft besitzen die Constructions-Materialien zwar annähernd, aber nie vollkommen, und es entsteht daher die Frage, welchen Einfluss unter verschiedenen Umständen die Unvollkommenheit der Materialien auf die Festigkeit und Elastizität ausübt? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zweierlei Material-Unvollkommenheiten unterscheiden. 1) Ungleiche Festigkeit des Materials an einzelnen Stellen des Körpers; 2) unganze Stellen, d. h. Lücken, Poren, Flächenrisse, Linienrisse. Der Einfluss dieser Material-Unvoll-

kommenheiten auf die Festigkeit richtet sich nach ihrer Ausdehnung, Form, Richtung und insbesondere nach dem Ort, wo dieselben vorkommen. Befindet sich die in irgend einer Hinsicht schadhafte Stelle in der Nähe der Neutralfaser, so wird dadurch die Festigkeit des Körpers nur sehr wenig geschwächt, weil überhaupt das in der Nähe der Neutralfaser befindliche Material zur Festigkeit nur sehr wenig beiträgt. Am bedenklichsten ist es dagegen, wenn diese schadhaften Stellen da vorkommen, wo das Material am stärksten angestrengt wird, d. h. wo die Maximalspannungen eintreten.

Die Lage der Form des unganzen oder schadhaften Materials hat ebenfalls einen sehr grossen Einfluss auf die Festigkeit. Bei Körpern, welche auf rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen sind, können Längenrisse ein Bersten veranlassen, sind dagegen Querrisse nicht bedenklich. Bei allen übrigen Festigkeitsarten sind dagegen Längenrisse ungefährlich, Querrisse dagegen höchst bedenklich, insbesondere wenn sie an Stellen vorkommen, wo die Maximalspannungen eintreten. Einige spezielle Beispiele werden geeignet sein, diese allgemeinen Regeln zu erklären.

1) Wenn in einem Stabe, der auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen ist, Längenrisse vorkommen, so wird dadurch seine Festigkeit nicht im mindesten geschwächt, kommen dagegen Flächenrisse vor, die nach der Quere gerichtet sind, so ist der Zustand bedenklich.

2) Wird ein Stab gebogen und kommen in demselben Längenrisse vor, so wird dadurch seine Festigkeit nur wenig geschwächt. Kommen im Innern, in der Nähe der Neutralfaser, oder überhaupt an Stellen, wo die Spannungen am kleinsten sind, oder wo Pressungen eintreten, Querrisse vor, so wird dadurch das Tragungsvermögen nur wenig geschwächt. Querrisse an den am stärksten gespannten Stellen sind jedoch sehr gefährlich. Ist ein Stab der Zusammendrückung ausgesetzt, so sind Längenrisse bedenklich, Querrisse dagegen unbedenklich.

3) Ist ein Stab der Torsion ausgesetzt, so sind nur Querrisse an der Oberfläche oder in grösserer Entfernung von der Axe gefährlich, Längenrisse vermögen dagegen die Torsionsfestigkeit nicht merklich zu schwächen.

4) In den Wandungen cylindrischer Gefässe sind in der Regel Längenrisse gefährlich, nach dem Umfang gerichtete Risse schwächen dagegen die Festigkeit eines Gefässes nur wenig.

Damit solche gefährliche Risse oder unganze Stellen nicht eintreten, müssen bei der Herstellung der Körper geeignete Prozeduren beobachtet werden.

Bei Holzconstruktionen kommt es auf die Wahl des Materials an. Gesunde Fasern und wenig Aststellen geben Festigkeit. Wenn hölzerne Balken, die Aststellen zeigen, zum Tragen gebraucht werden, ist es zweckmässig, sie so zu legen, dass die Aststellen gerade oder nahe in die neutrale Schicht und nicht in die Schicht zu liegen kommen, wo die stärkste Spannung stattfindet.

Bei gusseisernen Körpern, welche grosse Querschnittsdimensionen erhalten müssen, muss man Querschnittsformen wählen, in welchen keine grösseren Dicken vorkommen. Ein dicker Cylinder z. B. von Gusseisen wird in der Regel im Innern Lücken oder sonst unganze Stellen enthalten. Die Ursache hiervon liegt in dem Umstande, dass die Erstarrung des Eisens an der Oberfläche beginnt und erst später im Innern eintritt. Zuerst entsteht eine starre Rinde, während das Innere noch flüssig ist. Erstarrt später der Inhalt, so zieht sich dabei das Material zusammen und füllt den Raum innerhalb der Rinde nicht mehr aus. Die Entstehung von unganzen Stellen ist daher unvermeidlich. Wichtig ist es ferner beim Giessen, dass an den höchsten Stellen der Form Luftlöcher gemacht werden, damit die Luft und die Gase entweichen können, denn bleiben diese eingeschlossen, so verursachen sie an der Oberfläche des Körpers Poren und Blasenräume, die die Festigkeit schwächen.

Insbesondere bei Herstellung von grösseren Körpern aus Schmiedeeisen kommt es auf geeignete Prozeduren an. Werden solche Körper unmittelbar aus grösseren Eisenklumpen geschmiedet, so sind unganze Stellen nicht zu vermeiden, denn solche Eisenmassen enthalten im Innern immer schlackige Substanzen, die durch das Schmieden eines voluminösen Klumpens nicht ausgetrieben werden. Grössere Körper können aus Schmiedeeisen nur dadurch fehlerfrei hergestellt werden, indem man sie aus dünneren Stangen oder Platten, die keine schlackigen Stellen enthalten können, zusammenschweisst; dabei hat man zu sorgen, dass die Flächen, in welchen sich die zusammenzuschweissenden Körper berühren, nach der Schweissung selbst dann keine gefährlichen unganzen Stellen verursachen, wenn die Schweissung unvollkommen erfolgen sollte.

In der Regel soll die Berührungsfläche der zusammenzuschweissenden Körper der Längenrichtung und nicht der Querrichtung des Körpers parallel sein. Folgende Beispiele werden diese Regel erklären.

1) Wenn eine dicke Stange hergestellt werden soll, die auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen wird, erhält man ein gutes Resultat, wenn man aus mehreren dünnen Stangen ein Bündel bildet und dasselbe zusammenschweisst. Geht die Schweissung nicht voll-

kommen vor sich, so wird dadurch die absolute Festigkeit nicht geschwächt.

2) Körper, die auf Bruchfestigkeit in Anspruch genommen werden, werden am sichersten hergestellt, wenn man sie aus Platten zusammenschweisst, deren Ebenen sowohl der Längenrichtung als auch der Richtung der biegenden Kraft parallel sind.

3) Torsionswellen aus Schmiedeeisen werden am besten hergestellt, wenn man aus langen Stangen Bündel bildet und sie zusammenschweisst. Im vorhergehenden wie im vorliegenden Falle kann eine unvollkommene Durchführung der Schweissung unmöglich einen erheblichen Nachtheil veranlassen.

4) Cylindrische Gefässe dürfen nicht aus einem cylindrischen Bündel von Stäben zusammengeschweisst werden, sondern man muss lange Stäbe nach Schraubenwindungen zusammenbiegen und zuletzt zusammenschweissen. Auf diese Art werden z. B. schmiedeeiserne Flintenläufe (Drathläufe), wie Kanonenläufe ganz gut hergestellt.

Stahl-Federn.

Schicht-Federn.

Cylindrische oder konische Schraubenfedern werden zum Tragen von Lasten in der Regel nur in solchen Fällen angewendet, wenn die Federn nur einen sehr beschränkten Raum einnehmen sollen. Ist man im Raum nicht beschränkt, so werden meistens Schicht-Federn, d. h. solche Federn gebraucht, die durch eine Aufeinanderschichtung von schwach gekrümmten Stahlschienen von gleicher Breite und geringer Dicke entstehen. Insbesondere bei den Eisenbahnfahrzeugen sind derlei Federn im Gebrauch.

Zur Entwickelung der Theorie dieser Federwerke gehen wir von einer Anordnung aus, welcher folgende Eigenschaften zukommen:

1) Der Querschnitt jeder einzelnen Schiene sei ein Rechteck.
2) Alle Schienen haben einerlei Breite aber ungleiche Dicken.
3) Im natürlichen unbelasteten Zustand seien alle Schienen nach einem und demselben jedoch ziemlich grossen Halbmesser kreisbogenförmig gekrümmt.
4) In der Mitte und an den Enden sei jede Schiene etwas dicker als in den übrigen Stellen, so zwar, dass sich die Schienen, wenn sie aufeinandergeschichtet werden, nur in der Mitte und an den Enden, in den zwischenliegenden Stellen aber nicht berühren. Es sei Fig. 3, Tafel V., ein solches Federwerk.

Nennen wir P_1 die Kraft, welche auf jedes Ende der obersten Schiene einwirkt, P_2 P_3 P_4 die Pressungen der ersten Schiene gegen das Ende der zweiten, der zweiten Schiene gegen das Ende der dritten und so fort,

l_1 l_2 l_3 . . l_n die Abstände der Schinenenden von der Ebene OY der Fassung, welche die Schienen zusammenhält,

n die Anzahl der Schienen,

δ_1 δ_2 δ_3 δ_n die Metalldicken der Schienen an den Stellen, wo sie sich nicht berühren,

b die gemeinschaftliche Breite aller Schienen,

$x_1 = Op$ $y_1 = m_1 p$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m_1 der Schwerpunktslinie der obersten Schiene in Bezug auf das Coordinatensystem YOX,

x_2 y_2 . . x_3 y_3, ... die Coordinaten von beliebigen Punkten der Schwerpunktslinien der folgenden Schienen,

R den Halbmesser, nach welchem im natürlichen Zustande alle Schienen gekrümmt sind,

ϱ_1 ϱ_2 ϱ_3 die Krümmungshalbmesser, welche im belasteten Zustande des Schienenwerkes den Punkten entsprechen, deren Coordinaten x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, . . sind,

ε den Modulus der Elastizität des Schienen-Stahles.

Legen wir durch das Schienenwerk in einem Abstand x eine zur Axe OY parallele Ebene, und betrachten die Spannungszustände und Krümmungen in den Punkten m_1 m_2 m_3 . . ., in welchen alle Schwerpunktslinien der Schienen von dieser Ebene geschnitten werden, so sind:

$$\left.\begin{array}{l}
P_1(l_1-x)-P_2(l_2-x)=P_1 l_1-P_2 l_2-(P_1-P_2)x \\
P_2(l_2-x)-P_3(l_3-x)=P_2 l_2-P_3 l_3-(P_2-P_3)x \\
P_3(l_3-x)-P_4(l_4-x)=P_3 l_3-P_4 l_4-(P_3-P_4)x \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_{n-1}\left(l_{n-1}-x\right)-P_n\left(l_n-x\right)=P_{n-1} l_{n-1}-P_n l_n-\left(P_n-P_{n-1}\right)x \\
\qquad P_n\left(l_n-x\right)=P_n\left(l_n-x\right)
\end{array}\right\} \quad (1)$$

die Momente der äusseren Kräfte, welche die Spannungen und Pressungen in den Querschnitten bei m_1 m_2 hervorrufen. Diese Ausdrücke gelten jedoch nur für solche Punkte, die nicht den Endstücken der Schienen angehören.

Die Momente der in den Querschnitten bei m_1 m_2 herrschenden Spannungen und Pressungen sind aber nach Gleichung (4), Seite 50

$$-\varepsilon\,\mu_1\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{R}\right),\quad -\varepsilon\,\mu_2\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{R}\right),\quad -\varepsilon\,\mu_3\left(\frac{1}{\varrho_2}-\frac{1}{R}\right),\ \ldots$$

wobei die Zeichen — genommen sind, weil durch die Belastung die Krümmung der Schienen abnimmt. Wir erhalten daher für den Gleichgewichtszustand folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l}
P_1\,l_1 - P_2\,l_2 - (P_1 - P_2)\,x = \varepsilon\,\mu_1\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_1}\right)\\
P_2\,l_2 - P_3\,l_3 - (P_2 - P_3)\,x = \varepsilon\,\mu_2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_2}\right)\\
P_3\,l_3 - P_4\,l_4 - (P_3 - P_4)\,x = \varepsilon\,\mu_3\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_3}\right)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_{n-1}\,l_{n-1} - P_n\,l_n - (P_n - P_{n-1})\,x = \varepsilon\,\mu_1\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_{n-1}}\right)\\
P_n\,l_n - P_n\,x = \varepsilon\,\mu_n\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\varrho_n}\right)
\end{array}\right\}\ \ldots\ (2)$$

In diesen Ausdrücken bedeuten $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \ldots$ die Trägheitsmomente der Querschnitte der einzelnen Schienen. Da die Querschnitte der Voraussetzung zufolge Rechtecke sind, so hat man:

$$\mu_1 = \frac{1}{12}\,b\,\delta_1^{\,3} \qquad \mu_2 = \frac{1}{12}\,b\,\delta_2^{\,3} \qquad \mu_2 = \frac{1}{12}\,b\,\delta_3^{\,3} \quad \ldots\ (3)$$

Zur Berechnung der in den Querschnitten an der Befestigungs-Ebene O Y herrschenden Spannungen $\mathfrak{S}_1\ \mathfrak{S}_2\ \mathfrak{S}_3\ \ldots$ haben wir noch folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
P_1\,l_1 - P_2\,l_2 = \frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_1\,b\,\delta_1^{\,2}\\
P_2\,l_2 - P_3\,l_3 = \frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_2\,b\,\delta_2^{\,2}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_{n-1}\,l_{n-1} - P_n\,l_n = \frac{1}{6}\,\mathfrak{S}_{n-1}\,b\,\delta_{n-1}^{2}
\end{array}\right\}\ \ldots\ (4)$$

Vermitttelst dieser Gleichungen können die Bedingungen ausfindig gemacht werden, die die Federwerke erfüllen sollen, um den praktischen Zwecken gute Dienste leisten zu können. In dieser Hinsicht stellen wir die Forderungen:

1) dass alle Schienen gleich stark in Anspruch genommen sein sollen, so dass die Wahrscheinlichkeit eines Bruches für jede Schiene gleich gross ist;
2) dass die Krümmungen der Schienen im belasteten Zustand des Federwerkes vollkommen übereinstimmende Linien sind, was zur Folge hat, dass sich im belasteten Zustand je zwei unmittelbar auf einander folgende Schienen continuirlich berühren, wenn die Verdickungen in der Mitte und an den Enden der Schienen beseitiget werden.

Auf diese Weise erhält man gleich feste und nicht klaffende Schienen.

Diesen beiden Bedingungen wird entsprochen 1) wenn alle Spannungen $\mathfrak{S}_1\ \mathfrak{S}_2\ \mathfrak{S}_3 \ldots$ gleich gross sind, 2) wenn alle Krümmungshalbmesser $\varrho_1\ \varrho_2\ \varrho_3 \ldots$ für jeden bestimmten Werth von x übereinstimmen.

Vermöge der Gleichungen (4) haben alle Spannungen gleiche Werthe, wenn:

$$\frac{6}{\delta_1^2}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{6}{\delta_2^2}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{6}{\delta_3^2}(P_3 l_3 - P_4 l_4) \quad . \ (5)$$

und vermöge der Gleichungen (2) stimmen alle Krümmungshalbmesser überein, wenn:

$$\frac{12}{b\,\delta_1^3}(P_1 l_1 - P_2 l_2) = \frac{12}{b\,\delta_2^3}(P_2 l_2 - P_3 l_3) = \frac{12}{b\,\delta_3^3}(P_3 l_3 - P_4 l_4) \ . \ (6)$$

und

$$\frac{12}{b\,\delta_1^3}(P_1 - P_2) = \frac{12}{b\,\delta_2^3}(P_2 - P_3) = \frac{12}{b\,\delta_3^3}(P_3 - P_4) \quad . \ . \ (7)$$

Hieraus folgt:

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 \ \ldots\ldots = \delta_n \ \ldots\ldots \quad (8)$$

$$(P_1 - P_2) = (P_2 - P_3) = (P_3 - P_4) \ldots\ldots = p \ . \ . \ (9)$$

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = P_2 l_2 - P_3 l_3 = P_3 l_3 - P_4 l_4 \ . \ . \ . = \frac{1}{6}\mathfrak{S}_1\, b\, \delta_1^2 \ (10)$$

wobei in der Gleichung (9) durch p irgend eine constante Pressung bezeichnet ist.

Addirt man alle n-Gleichungen (10), so findet man:

$$P_1 l_1 = \frac{n}{6}\mathfrak{S}_1\, b\, \delta_1^2 \quad \ldots\ldots \ (11)$$

Addirt man aber von diesen n - Gleichungen nicht alle, sondern nur $k-1$ - Gleichungen, so findet man:

$$P_1 l_1 - P_k l_k = (k-1)\frac{1}{6} \mathfrak{S}_1 b \delta_1^2 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Addirt man $k-1$ von den Gleichungen (9), so findet man:

$$P_1 - P_k = (k-1)\, p$$

oder:

$$P_k = P_1 - (k-1)\, p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Setzt man in (12) für $\mathfrak{S}_1$ den Werth, welcher aus (11) folgt, und für P_k den Werth, welchen die Gleichung (13) darbietet, so erhält man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - (k-1)\frac{p}{P_1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

hierdurch ist die Länge der k^{ten} - Schiene berechnet.

Die Grösse p ist innerhalb gewisser Grenzen willkürlich. p kann nie negativ werden, der kleinste Werth von p oder von $\frac{p}{P_1}$ ist also gleich Null. $\frac{p}{P_1}$ kann aber wegen (14) nie grösser werden, als $\frac{1}{n}$, weil keine Schiene länger als die oberste werden soll. Setzen wir:

$$p = \frac{1}{\gamma}\frac{P_1}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

wobei γ jede beliebige ganze oder unganze Zahl bezeichnet, die jedoch nie kleiner als die Einheit genommen werden darf, so haben wir einen Ausdruck, der den Werth von p in seine zulässigen Grenzen einschränkt. Vermittelst dieses Werthes von $\frac{p}{P_1} = \frac{1}{\gamma n}$ wird der Ausdruck (14):

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n}\frac{1}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Rechteckfederwerke.

Nehmen wir $\gamma = 1$ (d. h. den kleinsten von den erlaubten Werthen), so wird $l_k = l_1$, d. h. wir erhalten dann ein Federwerk, in

welchem alle Schienen einerlei Länge haben. Solche Federn wollen wir „Rechteckfedern“ nennen, Fig. 4, Tafel V., weil die Grundform eines solchen Federwerkes ein Rechteck ist, wenn man die Schienen im ungebogenen Zustande aufeinanderlegt. Im belasteten Zustande sind die Schienen eines Rechteckfederwerkes nach gewissen elastischen Kurven gekrümmt, daher sind diese Schienen in verschiedenen Entfernungen von der Befestigungsstelle ungleich stark und an der Befestigungsstelle selbst am stärksten in Anspruch genommen, weil dort der Krümmungshalbmesser am kleinsten ausfällt. Aus (15) folgt, dass für $\gamma = 1$ $p = \frac{p_1}{n}$ wird, d. h. bei diesen Rechteckfedern ist der Unterschied der Pressungen je zweier unmittelbar auf einander folgenden Federn constant und gleich dem n-ten Theil der Last, die am Ende der obersten Schiene wirkt.

Trapezfederwerke.

Gehen wir an die andere von den erlaubten Grenzen, indem wir $\gamma = \infty$ setzen, dann wird vermöge (16):

$$l_k = l_1 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \quad \ldots \quad (17)$$

Setzen wir statt k $k + 1$, so erhalten wir:

$$l_{k+1} = l_1 \left(1 - \frac{k}{n}\right) \quad \ldots \quad (18)$$

demnach:

$$l_k - l_{k+1} = \frac{l_1}{n} \quad \ldots \quad (19)$$

d. h. wir erhalten ein Federwerk, bei welchem der Längenunterschied zweier unmittelbar auf einander folgenden Schienen einen constanten Werth hat, der gleich ist dem n-ten Theil von der Länge der obersten Schiene. Legt man die nach dieser Regel angeordneten Schienen im ungebogenen Zustand aufeinander, so erhalten wir ein Federwerk, dessen Grundform ein Trapez ist, das wir desshalb ein „Trapezfederwerk“ nennen wollen, Fig. 5, Tafel V. Für $\gamma = \infty$ wird $p = 0$, d. h. bei einem Trapezfederwerk presst die erste Schiene die zweite so stark, wie die zweite die dritte, wie diese die vierte Da $p = P_1 - P_2 = P_2 - P_3$ so verschwinden diese Differenzen, wenn $p = 0$ ist, allein dann verschwinden in den Gleichungen (2) alle von x abhängenden Glieder, werden also die Krümmungshalbmesser unabhängig von x und werden für die verschiedenen

Schienen gleich gross. Daraus folgt, dass bei Trapezfederwerken die Schienen im belasteten Zustande kreisbogenförmig gekrümmt sind. Sind nun die Schienen im unbelasteten Zustande ebenfalls kreisbogenförmig gekrümmt, so entsteht in jedem Punkte jeder Schiene eine und dieselbe Krümmungsänderung, was zur Folge hat, dass die Spannungsintensität in jedem Punkte jeder Schiene einen und denselben Werth erhält. Diese Trapezfederwerke haben also die wichtige Eigenschaft, dass sie in allen Theilen gleich stark in Anspruch genommen oder Anordnungen von durchaus gleicher Festigkeit sind.

Hyperbelfederwerke.

Die Federwerke, welche sich ergeben, wenn man für γ einen zwischen 1 und ∞ liegenden Werth nimmt, nähern sich einem Rechteckfederwerk, wenn der angenommene Werth von γ nicht viel grösser als die Einheit ist, nähern sich dagegen einem Trapezfederwerk, wenn der Werth von γ beträchtlich grösser als die Einheit ist. Im Allgemeinen haben alle Federwerke, für welche γ zwischen 1 und unendlich liegt, die Eigenschaft, dass nach dem durch die Gleichung (16) ausgedrückten Gesetz die Endpunkte der Schienen in Hyperbeln liegen, wenn man die Schienen gerade ausstreckt und aufeinander schichtet. Daher wollen wir diese Federwerke „Hyperbelfedern" nennen, Fig. 6, Tafel V. Im belasteten Zustande bilden die Schwerpunktslinien der Schienen elastische Kurven, und die Spannungsintensitäten wachsen in jeder einzelnen Schiene gegen die Befestigungsstelle hin. Diese Hyperbelfederwerke gewähren daher nicht in allen Theilen durchaus gleiche Festigkeit, sind also minder gut als die Trapezfederwerke.

Die Durchbiegung. Wir haben bisher nur die Festigkeitsverhältnisse der Federwerke betrachtet, für die praktischen Zwecke kommt aber auch ihre Biegsamkeit in Betrachtung. Wir wollen daher berechnen, um wie viel sich die Endpunkte der obersten Schiene unter der Einwirkung der Belastung senken und nennen diese Senkung die „Durchbiegung".

Für den Gleichgewichtszustand der obersten Schiene haben wir vermöge der ersten der Gleichungen (2):

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 - (P_1 - P_2) x = \varepsilon \mu_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1} \right)$$

Es ist aber:

$$P_1 l_1 - P_2 l_2 = \frac{\mathfrak{S}_1}{6} b \delta^2, \; P_1 - P_2 = p = \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n}, \; \mu = \frac{1}{12} b \delta_1{}^3$$

daher wird diese Gleichung:

$$\frac{1}{6} \mathfrak{S}_1 \, b \, \delta_1^{\,2} - \frac{1}{\gamma} \frac{P_1}{n} x = \frac{\varepsilon}{12} b \, \delta_1^{\,3} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\varrho_1} \right)$$

Vorausgesetzt, dass die initiale so wie auch die Krümmung im belasteten Zustand unbedeutend ist, kann man setzen:

$$\varrho_1 = + \frac{d\,x^2}{d^2\,y}$$

und dann wird die vorhergehende Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1} + \frac{12\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^{\,3}\,n\,\gamma} x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Streng genommen, gilt diese Gleichung nur für das Mittelstück, (nur für $x \leqq l_2$) allein da bei allen Federwerken das Endstück $l_1 - l_2$ sehr kurz ist, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man diese Gleichung für die ganze Länge l_1 gelten lässt. Das erste Integrale ist:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1} \right) x + \frac{12\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^{\,3}\,n\,\gamma} \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

und es ist keine Constante hinzuzufügen, weil für $x = o$ auch $\frac{d\,y}{d\,x}$ verschwindet.

Das Integrale der Gleichung (21) gibt:

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1} \right) \frac{x^2}{2} + \frac{12\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^{\,3}\,n\,\gamma} \frac{x^3}{6} + \text{Const}$$

Nennt man a die Ordinate des Anfangspunktes der elastischen Linie, so ist für $x = o$ $y = a$, demnach $\text{Const} = a$ und:

$$y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1} \right) \frac{x^2}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^{\,3}\,n\,\gamma} x^3 + a$$

Nennt man Y die Ordinate des Endpunktes der Schiene, so ist für $x = l_1$ $y = Y$, daher erhält man:

$$Y = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1} \right) \frac{l_1^{\,2}}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^{\,3}\,n\,\gamma} l_1^{\,3} + a$$

und:

$$Y - a = \left(\frac{1}{R} - \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\right)\frac{l_1^2}{2} + \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3$$

Für die unbelastete Schiene ist $P_1 = o$ und $\mathfrak{S}_1 = o$ wird daher:

$$(Y - a)_0 = \frac{l_1^2}{2\,R}$$

Nun ist aber $(Y - a)_0 - (Y - a)$ die Durchbiegung. Bezeichnen wir diese mit f, so erhalten wir:

$$f = \frac{2\,\mathfrak{S}_1}{\varepsilon\,\delta_1}\,\frac{l_1^2}{2} - \frac{2\,P_1}{\varepsilon\,b\,\delta_1^3\,n\,\gamma}\,l_1^3 \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

oder wenn man P_1 vermittelst (11) eliminirt:

$$f = \frac{\mathfrak{S}_1\,l_1^2}{\varepsilon\,\delta_1}\left(1 - \frac{1}{3\,\gamma}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Resultate der Untersuchung. Wenn es sich um die Construktion eines Federwerkes handelt, wird in der Regel gegeben sein:

1) die Belastung P_1, welche auf das Ende der oberen Schiene wirkt,
2) die Entfernung l_1 des Endpunktes der oberen Schiene von der Befestigungsebene an der Fassung,
3) die Spannungsintensität $\mathfrak{S}_1$, welche an der Befestigungsebene eintreten darf,
4) die Durchbiegung f, welche die Last hervorbringen darf,
5) die Breite b jeder Schiene.

Die zu suchenden Grössen sind dann:

1) die Dicke δ_1 jeder einzelnen Schiene,
2) die Anzahl n der Schienen,
3) die Länge l_k jeder Schiene, mit Ausnahme der obersten.

Zur Bestimmung dieser drei Grössen haben wir vermittelst unserer Theorie folgende Ausdrücke.

Die Gleichung (23) gibt:

$$\delta_1 = \frac{\mathfrak{S}_1\,l_1^2}{\varepsilon\,f}\left(1 - \frac{1}{3\,\gamma}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

die Gleichung (11) gibt, wenn einmal δ_1 bekannt ist:

$$n = \frac{6\,P_1\,l_1}{\mathfrak{S}_1\,b\,\delta_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

die Gleichung (16) gibt endlich;

$$l_k = l_1 \frac{1 - \frac{k-1}{n}}{1 - \frac{k-1}{n} \frac{1}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

und in dieser Formel ist γ eine Grösse, welche gleich oder grösser als die Einheit und selbst unendlich gross genommen werden kann. Nimmt man für γ einen zwischen Eins und Unendlich liegenden Werth, so führen diese Gleichungen zu einem Hyperbelfederwerk.

Nimmt man $\gamma = 1$, so ergibt sich ein Rechteckfederwerk und für dieses wird:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{S}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{S}_1 b \delta_1^2} \\ l_k &= l_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Nimmt man $\gamma = \infty$, so ergibt sich ein Trapezfederwerk von durchaus gleicher Festigkeit und für dieses wird:

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\mathfrak{S}_1 l_1^2}{\varepsilon f} \\ n &= \frac{6 P_1 l_1}{\mathfrak{S}_1 b \delta_1^2} \\ l_k &= l_1 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Die Werthe von $\mathfrak{S}_1$, ε und f. Die Federn werden gegenwärtig fast immer aus Gussstahl hergestellt. Drückt man alle Längen in Centimetern, alle Flächen in Quadratcentimetern, alle Pressungen in Kilogrammen aus, so ist der Mittelwerth von ε für guten Gussstahl:

$$\varepsilon = 2\,000\,000$$

Nach vielfachen Rechnungen über die Lokomotivfedern beträgt bei denselben die Spannungsintensität $\mathfrak{S}_1 = 4400$ Kilogramme, während die Spannungsintensität an der Elastizitätsgrenze 8000 und der Bruchcoefficient in der Regel grösser als 14000 ist. Wir setzen daher:

$$\mathfrak{S}_1 = 4400$$

Für die Durchbiegung darf man bei Eisenbahnwagen setzen: für Lastwagen- und Personenzuglokomotive

$$f = 4 \text{ bis } 5 \text{ Centimeter}$$

für Güterzug-Lokomotive

$$f = 3 \text{ bis } 4 \text{ Centimeter}$$

Nimmt man f klein, so wird [vermöge (24)] δ_1 gross und [vermöge (25)] n klein. Starre Federwerke erhalten daher dicke aber wenige Schienen.

Nimmt man f gross, so wird δ_1 klein und n gross. Leicht biegsame Federwerke erhalten daher dünne und viele Schienen.

Ausführlicheres über Federwerke findet man in meinem Werke über den Lokomotivbau.

Cylindrische Schraube als Tragfeder.

Eine cylindrisch schraubenförmig zusammengewundene Stahlfeder liege auf einer Unterlage und werde oben belastet, Fig. 7, 8, Tafel V. Das obere Ende der Schraube sei nach der Axe hereingebogen und die Last wirke auf dieses Ende genau nach der Richtung der Axe des Cylinders.

Ziehen wir durch einen beliebigen Punkt M der Schraubenlinie, in welchem die Schwerpunkte aller Querschnitte des schraubenförmig gebogenen Stabes liegen, eine Berührungslinie L an die Schraubenlinie und einen auf die Axe der Schraube senkrechten Halbmesser r und legen durch diese beiden Linien eine Ebene, so ist dieselbe die Krümmungsebene und ist die Länge des Halbmessers r der Krümmungshalbmesser der Schraubenlinie. Vergleichen wir den vorliegenden Fall mit unserer allgemeinen Theorie, Seite 87, so ist die Verlängerung von r die Axe der x, die Linie L die Axe der y und eine auf r und L senkrechte in der Ebene des Querschnittes des Schraubenstabes liegende Gerade die Axe der z. Wenn wir das Gewicht der Schraube vernachlässigen, so ist P die einzige äussere Kraft und es ist $X = o$ $Y = - P \sin m$ $Z = - P \cos m$, wenn m den Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen den Horizont bedeutet. Ferner sind die Coordinaten des Angriffspunktes der Kraft P $x = - r$, $y = h \sin m$, $z = h \cos m$, wenn r der Halbmesser des Cylinders der Schraubenlinie und h die Höhe des Angriffspunktes der Kraft P über dem Punkt M bezeichnet. Wir haben daher:

$$\Sigma (Y z - Z y) = - P \sin m \times h \cos m + P \cos m \times h \sin m = o$$

$$\Sigma (Y x - X y) = + P r \sin m$$

$$\Sigma (X z - Z x) = + P r \cos m$$

oder auch sehr annähernd, weil in allen Fällen der Anwendung m ein äusserst kleiner Winkel ist:

$$\Sigma (Y z - Z y) = o \qquad \Sigma (Y x - X y) = o$$

$$\Sigma (X z - Z x) = P r$$

Den Bedingungs-Gleichungen (8) wird daher sehr nahe ein Genüge geleistet, wenn man setzt: $\beta = o$ $\varrho = \varrho_0$, d. h. durch die Zusammendrückung ändert sich der Halbmesser des Cylinders fast gar nicht. Die letzte der Gleichungen (8), Seite 91, wird:

$$P r = G \left(\frac{m}{y}\right) \frac{d \Theta}{d s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und durch diese wird die Zusammendrückung der Federn bestimmt. Heissen wir $d u$ die unendlich kleine Senkung, welche im Angriffspunkt von P dadurch eintritt, indem der Schraubenstab auf eine Länge $d s$ um $d \Theta$ verwunden wird, so ist $d u = r d \Theta$. Legen wir durch die Endpunkte des Bogenelementes $d s$ zwei Ebenen durch die Axe des Schraubencylinders und heissen $d \varphi$ den unendlich kleinen Winkel, den dieselben miteinander bilden, so ist, weil m sehr klein angenommen wurde, nahezu $d s = r d \varphi$. Die obige Gleichung wird daher:

$$P r = G \left(\frac{m}{y}\right) \frac{d u}{r d \varphi}$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$u = \frac{P r^3}{G \left(\frac{m}{y}\right)} \varphi$$

Nennt man n die Anzahl der Umwindungen, welche in der Schraube vorkommen, so ist für die ganze Schraube:

$$\varphi = n \, 2 \pi$$

demnach wird:

$$u = \frac{P r^3}{G \left(\frac{m}{y}\right)} 2 \pi n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Nennt man T die Intensität der Verschiebungskraft, welche in demjenigen Punkt des Querschnittes herrscht, welcher vom Schwerpunkt am weitesten entfernt ist und k diese Entfernung, so ist nach der Torsions-Theorie, Gleichung (3), Seite 57:

$$P\,r = \frac{T\left(\frac{m}{y}\right)}{k} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Für einen Stab mit rundem Querschnitt von einem Durchmesser d ist:

$$\left(\frac{m}{y}\right) = \frac{\pi\, d^4}{32}, \quad k = \frac{d}{2}$$

demnach findet man:

$$u = 64\,\frac{P\,r^3\,n}{G\,d^4} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$P = \frac{T\,\pi}{16}\,\frac{d^3}{r} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

Ist der Querschnitt ein Rechteck und sind b und h dessen Seiten, so ist:

$$\left(\frac{m}{y}\right) = \frac{1}{12}\,(b^2 + h^2)\,b\,h, \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + h^2}$$

und es wird:

$$u = 24\,\pi\,\frac{P\,r^3\,n}{G\,(b^2 + h^2)\,b\,h} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

$$P = \frac{1}{6}\,\frac{T}{r}\,\sqrt{b^2 + h^2}\;b\,h \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (8)$$

Der Werth von G und der Bruchwerth von T sind zu finden in der Tabelle Seite 95.

Konische Schraubenfeder.

Für eine konische Schraube, Fig. 9, Tafel V., finden wir ganz ähnlich, wie bei einer cylindrischen Schraube:

$$\Sigma\,(Y\,z - Z\,y) = o \qquad \Sigma\,(Y\,x - X\,y) = o$$

$$\Sigma\,(X\,z - Z\,x) = P\,r$$

$$P\,r = G\left(\frac{m}{y}\right)\frac{d\,\Theta}{d\,s} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

wobei r die Entfernung irgend eines Punktes der konischen Schraubenlinie von der Axe bezeichnet. Angenommen, die Schraube sei so gebildet, dass in ihrer Horizontalprojektion die Gewinde gleich weit und zwar um Δ abstehen, so darf man setzen $r\,d\,\Theta = d\,u$ $d\,s = r\,d\,\varphi$ $r = \frac{\Delta}{2\,\pi}\,\varphi$ und dann wird die Gleichung (1):

$$d\,u = \frac{P}{G\left(\frac{m}{y}\right)} \left(\frac{\Delta}{2\,\pi}\right)^3 \varphi^3\,d\,\varphi$$

Hieraus folgt:

$$u = \frac{P}{G\left(\frac{m}{y}\right)} \left(\frac{\Delta}{2\,\pi}\right)^3 \frac{\varphi^4}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Nennt man n die Anzahl der Umwindungen, welche in der Schraube vorkommen, R den grössten Halbmesser derselben, Fig. 9, so ist $n\,\Delta = R$, $\varphi = n \times 2\,\pi$ und dann wird:

$$u = \frac{\pi}{2} \frac{P}{G\left(\frac{m}{y}\right)} R^3\,n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Auch ist:

$$P = \frac{T}{R} \frac{\left(\frac{m}{y}\right)}{k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Für einen runden Querschnitt ist:

$$\left(\frac{m}{y}\right) = \frac{\pi\,d^4}{32}, \quad k = \frac{d}{2}$$

und man findet:

$$\left.\begin{aligned} u &= 16\,\frac{P}{G}\,\frac{R^3\,n}{d^4} \\ P &= \frac{\pi\,T}{16}\,\frac{d^3}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Für einen Rechteckquerschnitt ist:

$$\left(\frac{m}{y}\right) = \frac{1}{12}\,b\,h\,(h^2 + b^2) \quad k = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + h^2}$$

und dann findet man:

$$\left.\begin{aligned} u &= 6\,\pi\,\frac{P\,R^3\,n}{G\,b\,h\,(b^2 + h^2)} \\ P &= \frac{T}{6}\,\frac{b\,h\sqrt{b^2 + h^2}}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die ebene Spiralfeder für Schwungradhemmungen.

Eine ebene Spiralfeder, Fig. 10, Tafel V., sei bei A gehalten, ihr inneres Ende sei bei O an einer Axe befestigt. Diese Axe werde durch ein Kräftepaar $\frac{1}{2}$ P und $\frac{1}{2}$ P gedreht, bis ein Gleichgewichtszustand eintritt.

Um unsere allgemeine Theorie, Seite 87, auf den vorliegenden Fall anzuwenden, müssen wir das innere Ende der Feder frei machen, indem wir Kräfte anbringen, die den Zwangszustand zu ersetzen vermögen. Die Axe der Feder wird gegen die Lager, welche sie halten, gewisse Pressungen ausüben. Nehmen wir diese Lager weg und bringen dafür an die Axe zwei Kräfte $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ an, die der Richtung und Grösse nach gleich sind den Pressungen, welche das Lager, bevor es weggenommen wurde, gegen die Axe ausübt, so wird der Gleichgewichtszustand nicht gestört und wird demnach das innere Ende frei.

Nehmen wir irgend einen Punkt M an in der Axenlinie der Spirale, zeichnen die Tangente M y und die Normale M z, so fällt die Richtung der letzteren sehr nahe mit der Richtung von O M zusammen, vorausgesetzt, dass die Distanz zweier unmittelbar aufeinander folgenden Windungen sehr klein ist.

Vergleichen wir die Figur 10 mit unserer Figur 2, Tafel V., welche der allgemeinen Theorie zu Grunde gelegt wurde, so sehen wir, dass alle x und alle X verschwinden, dass also $x = o$ und $X = o$ ist. Es ist daher $\Sigma\,(Y\,x - X\,y) = o \quad \Sigma\,(X\,z - Z\,x) = o$. Die dritte und vierte der Gleichungen (8), Seite 91, geben daher:

$$o = \varepsilon \left[\left(\frac{\cos\beta}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) + \frac{\sin\beta}{\varrho}\left(\frac{m}{\xi}\right)\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$o = G\left(\frac{m}{y}\right)\frac{d\,\Theta}{d\,s} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

und diesen Gleichungen wird ein Genüge geleistet wenn man nimmt:

$$\left(\frac{m}{\xi\,\zeta}\right) = o, \quad \beta = o, \quad \frac{d\,\Theta}{d\,s} = o \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

d. h. wenn der Querschnitt der Feder so beschaffen ist, dass derselbe durch die Biegungsebene (die mit der Ebene der Figur zusammenfällt) in zwei congruente Hälften getheilt wird, entsteht nur allein eine Biegung um die Axe der x. Wegen $\frac{d\,\Theta}{d\,s} = o$ findet

keine Torsion statt, Resultate, die auch ohne Rechnungen eingesehen werden können. Die zweite der Gleichungen (8) wird wegen $\beta = o$:

$$\Sigma(Y z - Z y) = \varepsilon \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right)\left(\frac{m}{\zeta}\right)$$

oder wenn man das Trägheitsmoment $\left(\frac{m}{\zeta}\right)$ des Federquerschnittes in Bezug auf die durch M gehende auf der Ebene der Figur senkrechte Axe mit μ bezeichnet, d. h. $\left(\frac{m}{\zeta}\right) = \mu$ setzt:

$$\Sigma(Y z - Z y) = \varepsilon \mu \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Nun ist aber $\Sigma(Y z - Z y)$ die Summe aller statischen Momente aller äusseren Kräfte, die auf das bei M beginnende Federstück einwirken, in Bezug auf die durch M gehende auf der Ebene der Figur senkrechte Axe; es ist demnach:

$$\Sigma(Y z - Z y) = P R + (\mathfrak{Z} y_1 - \mathfrak{Y} z_1)$$

wobei $y_1 = O p$ $z_1 = M p$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf das Coordinatensystem bezeichnen, auf welches sich die Richtungen der Kräfte $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ beziehen.

Die Gleichung (4) wird demnach:

$$P R + \mathfrak{Z} y_1 - \mathfrak{Y} z_1 = \varepsilon \mu \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit dem Bogenelement $d s_1$ der Spirale und integrirt hierauf, dehnt aber das Integrale auf die ganze Spirale aus, so findet man:

$$\int P R \, ds_1 + \int \mathfrak{Z} y_1 \, d s_1 - \int \mathfrak{Y} z_1 \, ds_1 = \int \varepsilon \mu \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) ds_1$$

oder weil $P R$ $\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{Y}$ $\varepsilon \mu$ für diese Integrationen constante Grössen sind:

$$P R \int ds_1 + \mathfrak{Z} \int y_1 \, ds_1 - \mathfrak{Y} \int z_1 \, ds_1 = \varepsilon \mu \int \left(\frac{ds_1}{\varrho} - \frac{ds_1}{\varrho_0}\right) . \; . \quad (6)$$

Nennt man l die ganze Länge der Spirale, $\mathfrak{y}$ $\mathfrak{z}$ die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Spirallinie, in Bezug auf das durch o gelegte Coordinatensystem, so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} \int ds_1 &= l \\ \int y_1\, ds_1 &= l\, \mathfrak{y} \\ \int z_1\, ds_1 &= l\, \mathfrak{z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

daher wird die Gleichung (6):

$$P\,R\,l + (\mathfrak{Z}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\,\mathfrak{z})\,l = \varepsilon\,\mu \int \left(\frac{ds_1}{\varrho} - \frac{ds_1}{\varrho_0}\right) \ldots\ldots \quad (8)$$

Wenn wir von der Ausdehnung, welche in der Axenfaser durch Σy entstehen kann, ganz absehen, so ist $\frac{ds_1}{\varrho}$ und $\frac{ds_1}{\varrho_0}$ der unendlich kleine Winkel, welchen die Normalen bilden, welche durch die Endpunkte des Bogenelementes ds_1 gehen, und zwar bezieht sich $\frac{ds_1}{\varrho_0}$ auf den natürlichen Zustand der Feder, $\frac{ds_1}{\varrho}$ auf den deformirten Zustand; setzen wir:

$$\frac{ds_1}{\varrho} = d\,\varphi \qquad \frac{ds_1}{\varrho_0} = d\,\varphi_0$$

so erhalten wir:

$$\int \left(\frac{ds_1}{\varrho} - \frac{ds_1}{\varrho_0}\right) = \int \left(d\,\varphi - d\,\varphi_0\right) = \Theta \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Wenn wir durch Θ den Winkel bezeichnen, um welchen die Spirale durch das Kräftepaar $\frac{1}{2}\,P$, $\frac{1}{2}\,P$ zusammen gewunden wurde, d. h. Θ ist der Winkel, welchen der Hebelarm, an welchem das Kräftepaar wirkt, zurücklegt, bis der Gleichgewichtszustand eintritt, oder endlich Θ ist der zu berechnende Drehungswinkel. Wir erhalten nunmehr aus (8) wegen (9):

$$[P\,R + (\mathfrak{Z}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\,\mathfrak{z})]\,l = \varepsilon\,\mu\,\Theta \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Für den Fall, dass $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\,\mathfrak{z} = o$ wäre, ergäbe sich:

$$P\,R\,l = \varepsilon\,\mu\,\Theta \qquad \Theta = \frac{P\,R\,l}{\varepsilon\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

d. h. wenn $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\,\mathfrak{z} = o$ ist, wird der Drehungswinkel Θ dem Torsionsmoment der äusseren Kraft proportional. $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\,\mathfrak{z}$ wird in zwei Fällen gleich Null:

1) wenn die Pressungen der Axe gegen die Axenlager verschwinden, d. h. wenn $\mathfrak{Z} = o \quad \mathfrak{Y} = o$,

2) wenn $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ verschwinden, d. h. wenn die Feder in der Weise geformt wird, dass der Schwerpunkt der Axenlinie in die Drehungsaxe fällt. Dies ist äusserst nahe bei einer Feder mit sehr vielen, aber äusserst engen Umwindungen der Fall.

Es ist für die Anwendung solcher Federn für Uhren mit Schwungradhemmungen sehr wichtig, dass der Drehungswinkel dem Drehungsmoment genau proportional ausfällt, weil nur in diesem Falle es möglich ist, dass die Schwingungszeiten der Unruhe (des Schwungrades) bei kleinen wie bei grossen Schwingungswinkeln den gleichen Werth erhalten, was für den gleichförmigen Gang einer Uhr unerlässlich ist.

Für die gewöhnlichen Anwendungen der Spiralfedern in der Technik kann man immer annehmen, dass der Schwerpunkt der Spirale so nahe am Drehungspunkt liegt, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn man das Glied $\mathfrak{Z}\,\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}\,\mathfrak{z}$ ganz vernachlässiget, also die Gleichung (11) gelten lässt.

Für eine Feder mit rundem Querschnitt ist . . $\mu = \frac{\pi}{64}\, d^4$

(d der Durchmesser.)

Für eine Feder mit rechteckigem Querschnitt . $\mu = \frac{1}{12}\, b\, h^3$

(b die mit der Drehungsaxe parallele Dimension des Querschnittes, h die radiale Dicke der Feder.)

Man erhält daher:

für Federn mit rundem Querschnitt:

$$\Theta = \frac{64}{\pi\,\varepsilon}\,\frac{P\,R\,l}{d^4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

für Federn mit rechteckigem Querschnitt:

$$\Theta = \frac{12}{\varepsilon}\,\frac{P\,R\,l}{b\,h^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Vernachlässigt man die Spannung, welche durch die Kräfte ΣY entsteht, so ist die Maximalspannung $\mathfrak{S}$, welche in Folge der Zusammenwindung an jedem Punkt der äusseren Fläche eintritt:

$$\mathfrak{S} = \frac{P\,R}{E}$$

Für einen runden Querschnitt ist $E = \frac{\pi}{32}\, d^3$

Für einen rechteckigen Querschnitt ist . . . $E = \frac{1}{6}\, b\, h^2$

demnach:

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{S} = \frac{32}{\pi}\,\frac{P\,R}{d^3} & P\,R = \frac{\mathfrak{S}\,\pi}{32}\,d^3 \\ \mathfrak{S} = 6\,\frac{P\,R}{b\,h^2} & P\,R = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Verwindung der cylindrisch schraubenförmigen Feder.

Wir betrachten nun eine schraubenförmige Feder, Fig. 11, 12, Tafel V. Das Ende A ist festgehalten, das Ende B ist in einen Hebel eingehängt, der sich um eine Axe dreht, die mit der geometrischen Axe des Schraubencylinders zusammenfällt. Der Hebel wird durch ein Kräftepaar $\frac{P}{2}$, $\frac{P}{2}$ um seine Axe gedreht. Fig. 12, Tafel V., ist die Projektion der Schraube auf eine Ebene, die auf der Axe der Schraube senkrecht steht. Um die Punkte der Schwerpunktslinie der Querschnitte der Feder zu bestimmen, nehmen wir ein rechtwinkeliges Coordinatensystem $O\,x_1\,y_1\,z_1$ an, lassen die Axe $O\,x_1$ mit der geometrischen Axe des Schraubencylinders zusammenfallen, $O\,y_1$ parallel mit der Richtung des Hebels, an welchem das Kräftepaar $\frac{1}{2}$ P und $\frac{1}{2}$ P wirkt, $O\,z_1$ senkrecht auf der Ebene der Axen $O\,x_1$ und $O\,y_1$. Es seien $x_1\ y_1\ z_1$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Linie, in welcher die Schwerpunkte aller Normalquerschnitte der schraubenförmigen Feder liegen. Die Einwirkung des Hebels auf das Ende B der Schraubenwindung reduzirt sich auf die Kräfte $-\mathfrak{Z}$ $-\mathfrak{Y}$ $+\mathfrak{X}$ deren Richtungen mit den Axen $O\,z_1$ $O\,y_1$ $O\,x_1$ parallel sind, allein der Einfluss von $\mathfrak{X}$ kann vernachlässigt werden, wenn man voraussetzt, dass die Steigung der Schraubenlinie gegen eine auf $O\,x_1$ senkrechte Ebene sehr klein ist. Unter der gleichen Voraussetzung darf man annehmem, dass jede Querschnittsebene des Schraubengewindes in die geometrische Axe $O\,x_1$ der Schraube fällt und dass die Krümmungsebene des bei M befindlichen Elementes der Schraubenlinie senkrecht steht auf der Axe der Schraube, dass endlich M y (die Tangente zum Punkt M der Schraubenlinie) und M z (die Durchschnittslinie der Querschnittsebene des Gewindstabes und der Krümmungsebene des Elementes) in einer auf die Axe der Schraube senkrechten Ebene liegen.

Vergleichen wir unsere Figur mit derjenigen, welche zur allgemeinen Theorie gedient hat, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\,(Y\,z - Z\,y) = \mathfrak{Z}\,(r - y_1) + \mathfrak{Y}\,z_1 = \mathfrak{Z}\,r + (\mathfrak{Y}\,z_1 - \mathfrak{Z}\,y_1) \\ \Sigma\,(Y\,x - X\,y) = o \\ \Sigma\,(X\,z - Z\,x) = o \end{array}\right\} \quad . \quad (1)$$

wobei $r = \overline{OB}$ die Entfernung des Punktes B von der Axe bedeutet. Nennt man aber R die Länge der Hebelarme, an welchen die Kräfte $\frac{1}{2}$ P und $\frac{1}{2}$ P wirken, so ist:

$$\frac{1}{2} P R + \frac{1}{2} P R = \mathfrak{Z} r \text{ oder } \mathfrak{Z} r = P R$$

daher wird:

$$\Sigma (Y z - Z y) = P R + (\mathfrak{Y} z_1 - \mathfrak{Z} y_1) \quad . \; . \; . \; . \; , \quad (2)$$

Den Bedingungen, welche die zweite und dritte der Gleichungen (1) aussprechen, wird wiederum ein Genüge geleistet, wenn man in (8), Seite 91, setzt:

$$\left(\frac{m}{\xi \zeta}\right) = o \quad \beta = o \quad \frac{d\,\Theta}{d\,s} = o$$

Wegen $\beta = o$ und der obigen Gleichung (2) wird die zweite der Gleichungen (8), Seite 91:

$$P R + \mathfrak{Y} z_1 - \mathfrak{Z} y_1 = \varepsilon \mu \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

wobei $\left(\frac{m}{\zeta}\right) = \mu$ gesetzt wurde und μ das Trägheitsmoment eines Querschnittes des Schraubengewindes in Bezug auf eine durch M gehende, zu $O x_1$ parallele Axe ausdrückt.

Multipliziren wir diese Gleichung (3) mit dem Bogenelement ds_1 der Schraubenlinie, integriren hierauf und dehnen das Integrale über die ganze Länge der Schraube (von A bis B) aus, so erhalten wir:

$$\int P R \, ds_1 + \mathfrak{Y} \int z_1 \, ds_1 - \mathfrak{Z} \int y_1 \, ds_1 = \varepsilon \mu \int \left(\frac{ds_1}{\varrho} - \frac{ds_1}{\varrho_0}\right)$$

Nennen wir l die ganze Länge der Schraubenlinie, $\mathfrak{z}\, \mathfrak{y}$ die Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Schraubenlinie und Θ den Winkel, um welchen die Axe $O x_1$ gedreht werden muss, bis das Kräftepaar mit den inneren Kräften ins Gleichgewicht kommt, so ist, wie früher gezeigt wurde:

$$\int ds_1 = l, \quad \int z_1 \, ds_1 = \mathfrak{z}\, l, \quad \int y_1 \, ds_1 = \mathfrak{y}\, l, \quad \int \frac{ds_1}{\varrho} - \frac{ds_1}{\varrho_0} = \Theta$$

und wir erhalten daher:

$$[P R + (\mathfrak{Y} \mathfrak{z} - \mathfrak{Z} \mathfrak{y})]\, l = \varepsilon \mu \Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Das Moment $\mathfrak{Y}\mathfrak{z} - \mathfrak{Z}\mathfrak{y}$ verschwindet, wenn $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{y}$ gleich Null werden, d. h. wenn der Schwerpunkt der Schraube in die geometrische Drehungsaxe fällt. Dies wäre genau nur dann der Fall, wenn die Punkte A und B während der Zusammenwindung der Schraube stets in der Oberfläche des Schraubencylinders verbleiben würden. Die Punkte A und B müssten also durch einen geeigneten Mechanismus nach radialer Richtung einwärts bewegt werden, wenn sich die Schraube zusammenzieht und in einen Cylinder von kleinerem Durchmesser übergeht, dagegen nach radialer Richtung hinaus, wenn sich die Schraube aufwindet. Diese Bemerkung ist von Werth, wenn es sich um eine Anwendung solcher Schraubenfedern zu Uhren mit Schwungradhemmungen handelt, denn wie schon früher Seite 117 erwähnt wurde, können die Schwingungen einer Unruhe nur dann von gleicher Dauer werden, wenn der Drehungswinkel Θ dem Drehungsmoment P R proportional wird. Hat die Schraube sehr viele Gewinde und ist die Aenderung des Halbmessers der Schraube nicht gross, so fällt der Schwerpunkt der Schraubenlinie jederzeit so nahe in die Axe, dass $\mathfrak{Y}\mathfrak{z} - \mathfrak{Z}\mathfrak{y}$ gegen P R vernachlässiget werden kann, und dann erhalten wir:

$$\mathrm{P\,R\,l} = \varepsilon\,\mu\,\Theta$$

$$\mathrm{P\,R} = \varepsilon\,\mu\,\frac{\Theta}{\mathrm{l}}, \quad \Theta = \frac{\mathrm{P\,R\,l}}{\varepsilon\,\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (3) geben:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{\Theta}{\mathrm{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Diese Gleichung gibt den Halbmesser ϱ der zusammengewundenen Feder. Auch findet man:

$$\varrho_0 - \varrho = \varrho_0 \frac{\frac{\Theta}{\mathrm{l}}}{\frac{1}{\varrho_0} + \frac{\Theta}{\mathrm{l}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Nennt man $\mathfrak{S}$ die Spannungsintensität an der äusseren Fläche der zusammengewundenen Schraube, so ist:

$$\mathrm{P\,R} = \mathfrak{S}\,\mathrm{E} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wobei E die bekannte Funktion der Querschnittsdimensionen bezeichnet.

Für einen runden Stab ist:

$$E = \frac{\pi}{32} d^3, \quad \mu = \frac{\pi}{64} d^4$$

Für einen rechteckigen Querschnitt ist:

$$E = \frac{1}{6} b h^2, \quad \mu = \frac{1}{12} b h^3$$

(b die mit der Axe der Schraube parallele Dimension des Querschnittes, h die radiale Dicke des Querschnittes)

und man findet nun:

a) Für eine Schraube mit rundem Querschnitt:

$$P R = \frac{\pi}{64} \varepsilon \frac{d^4}{1} \Theta = \frac{\pi}{32} \mathfrak{S} d^3 \quad \ldots\ldots (9)$$

b) Wenn der Querschnitt des Gewindes ein Rechteck ist:

$$P R = \frac{\varepsilon}{12} b h^3 \frac{\Theta}{1} = \frac{\mathfrak{S}}{6} b h^2 \quad \ldots\ldots (10)$$

c) Es ist aber für jede beliebige Querschnittsform:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} + \frac{\Theta}{1} \quad \ldots\ldots (11)$$

Seile.

Hanfseile.

Anfertigung. Die Hanfseile werden bekanntlich zu sehr mannigfaltigen Zwecken, insbesondere aber bei den Hebewerken gebraucht. Ihre Anfertigung geschieht gewöhnlich auf folgende Art: Es werden zuerst aus Hanf Schnüre gesponnen, hierauf werden mehrere derselben (in der Regel 6) nebeneinander aufgehängt und zusammengezwirnt, wodurch eine Leine entsteht. Endlich werden mehrere, in der Regel 6 solcher Leinen nebeneinander aufgehängt und abermals zusammengezwirnt, worauf das Seil fertig ist. Die Anfertigung der Seile vermittelst Maschinen und complizirteren Einrichtungen haben wir hier nicht zu besprechen.

Festigkeit. Die Festigkeit eines solchen Hanfseiles hängt von sehr mannigfaltigen Verhältnissen ab. Dieselbe richtet sich 1) nach der Festigkeit der Elementarfaser des Hanfes, 2) nach der Anzahl der

Elementarfasern, die in einem Querschnitt des Seiles vorkommen, 3) nach der mehr oder weniger sorgfältigen Anfertigung des Seiles. Die Festigkeit der Elementarfaser ist aber wiederum abhängig von der ursprünglichen Qualität des Hanfes und von den Veränderungen, welche durch Abnützung und Einwirkung der Nässe, Feuchtigkeit und Atmosphäre hervorgerufen werden. Ein neues, aus gutem Hanf sorgfältig gefertigtes Seil hat daher selbstverständlich eine beträchtlich grössere Festigkeit, als ein durch Gebrauch schadhaftes und durch atmosphärische Einwirkungen mehr oder weniger morsch gewordenes Seil. Von einer exakten Formel oder Regel zur Berechnung der Seile kann natürlich nicht die Rede sein und ist auch kein praktisches Bedürfniss, sondern es genügt, wenn man diese Festigkeit für solche Seile kennt, die sich noch in ganz brauchbarem Zustand befinden.

Für solche Seile ist die Festigkeit auf den Quadratcentimeter bezogen 510 Kilogramm.

Durchmesser der Seile. Für die meisten Benutzungen der Seile darf man annehmen, dass dieselben bis auf den fünften Theil ihrer absoluten Festigkeit in Anspruch genommen werden dürfen, dass also jeder Quadratcentimeter mit $\frac{510}{5} = 102$ Kilogrammen gespannt werden darf. Unter dieser Voraussetzung hat man zur Bestimmung des Durchmessers d eines Seiles, das eine Spannung P auszuhalten hat, folgende Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} 102 = P$$

woraus folgt:

$$d = 0{\cdot}113 \sqrt{P}$$

(Resultate Seite 38.)

Dauerhaftigkeit der Seile. Diese richtet sich nach dem Zweck, welchem das Seil zu dienen hat. An trockenen Orten dauern die Seile lange, z. B. mehrere Jahre. In der Nässe gehen sie schnell zu Grunde. Insbesondere bei Schachtförderungsmaschinen gehen die Seile sehr schnell zu Grunde, dauern in der Regel nur 4 bis 6 Monate und vermehren dadurch die Förderungskosten um ein Merkliches. Dies ist der Grund, weshalb gegenwärtig für Schachtförderungen meistens Drahtseile statt Hanfseile verwendet werden.

Flache Seile. Runde Seile von starkem Durchmesser verursachen einen nicht geringen Biegungswiderstand und erfordern desshalb, wenn sie sich aufwickeln sollen, sehr grosse Trommeln oder Rollen, daher werden oftmals bandförmige Seile angewendet, die durch

mehrere neben einander gelegte und mit einander verbundene Leinen gebildet werden.

Drahtseile.

Beschreibung. Die geringe Dauerhaftigkeit der Hanfseile, insbesondere bei den Schachtförderungen, hat die Drahtseile hervorgerufen. Diese Drahtseile werden aus Eisendraht in ganz ähnlicher Weise angefertigt, wie die Hanfseile aus Hanfschnüren. Jedes Drahtseil besteht nämlich aus mehreren, in der Regel aus sechs Drahtleinen, und jede solche Leine aus mehreren, gewöhnlich aus sechs Drähten. Jede Leine des Seiles, so wie auch das Seil selbst erhält aber noch eine aus getheertem Hanf gebildete Seele, durch welche die Zwischenräume zwischen dem Drahte stetig ausgefüllt und ein abnützendes Aneinanderreiben und Rosten der Drähte verhindert wird.

Fig. 1, Tafel VI., zeigt eine äussere Ansicht, Fig. 2 einen Querschnitt eines Drahtseiles.

Festigkeit. Die Festigkeit eines Drahtseiles richtet sich selbstverständlich nach der Festigkeit des Drahtmaterials und nach der Summe der Querschnitte aller im Seil vorhandenen Drähte. Die Hanfseele kommt dabei nicht in Anschlag.

Nennt man:

P die Spannung, welche ein Drahtseil auszuhalten hat,

δ den Durchmesser eines Drahtes,

d den Durchmesser des Kreises, der dem Seilkörper umschrieben werden kann, oder den Durchmesser des Seiles,

$\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität, welche im Drahtmaterial eintreten darf,

i die Anzahl der Drähte, aus welchen das Seil besteht,

so hat man:

$$P = i \frac{\delta^2 \pi}{4} \mathfrak{A} \text{ demnach: } \delta = \sqrt{\frac{4 P}{i \pi \mathfrak{A}}}$$

Die absolute Festigkeit des Eisendrahtes beträgt 7000 Kilogramme und bei Drahtseilen darf man sich wohl erlauben, das Material bis auf $\frac{1}{5}$ seiner absoluten Festigkeit in Anspruch zu nehmen. Jn den meisten Fällen werden ferner 36 Drähte zu einem Seile vereinigt. Setzt man also in obige Formel $i = 36$, $\mathfrak{A} = \frac{7000}{5} = 1400$, so findet man:

$$\delta = \frac{1}{200} \sqrt{P}$$

Der Durchmesser des den Seilkörper umschreibenden Kreises ist zehnmal so gross, als der des Drahtes; daher hat man auch:

$$d = 10\,\delta = \frac{1}{20}\sqrt{P}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit jenem Seite 122 für Hanfseile, so sieht man, dass die Durchmesser der Drahtseile halb so gross sind, als jene der Hanfseile.

(Resultate Seite 39.)

Ketten.

Ketten ohne Aussteifungen.

Wir behandeln hier nur die Ketten mit ellyptischen Ringen, welche zum Aufziehen grösserer Lasten statt der Seile gebraucht werden. Wenn an eine solche Kette eine Last gehängt wird, tritt in jedem ihrer Ringe eine Formänderung ein. Jeder Ring wird nach der Richtung der Kette verlängert und nach einer darauf senkrechten Richtung verschmälert und es treten überhaupt in allen Punkten Krümmungsänderungen ein. Wir werden den in einem ellyptischen Quadranten $\overline{AB}$ herrschenden Gleichgewichtszustand nicht stören, wenn wir einen Ring, Fig. 4, Tafel VI., bei A einklemmen und bei B entzweischneiden, aber daselbst nicht nur eine spannende Kraft anbringen, welche halb so gross ist, als die an der Kette hängende Last P, sondern auch noch ein Kräftemoment M_1 wirken lassen, das die im Querschnitt bei B wirkenden Spannungen und Pressungen zu ersetzen vermag. Der Kettenring ist nämlich im gespannten Zustande bis B nicht nur gedehnt, sondern auch gebogen und dieser Biegung entspricht eine gewisse Momentensumme, die ersetzt werden muss, wenn durch das Entzweischneiden des Ringes bei B der im ellyptischen Quadranten herrschende Gleichgewichtszustand nicht gestört werden soll.

Es sei Fig. 3, Tafel VI., ein in einem grösseren Maassstabe gezeichneter Kettenring - Quadrant:

$A\,m_0\,B_0$ die Axenlinie des ellyptischen Quadranten im natürlichen Zustande des Ringes,

$A\,m\,B$ die Axenlinie des ellyptischen Quadranten eines Kettenringes im deformirten Zustande,

$AC = a \quad CB = b$ die Halbaxen der ellyptischen Axenlinie des deformirten Ringes,

x_0 y_0 die Coordinaten eines beliebigen Atoms m_0 der ursprünglichen Axenlinie,

$\overline{An} = x$ } die Coordinaten des gleichen Atoms m der Axenlinie
$\overline{mn} = y$ } des deformirten Ringes,

ϱ_0 und ϱ die Krümmungshalbmesser im natürlichen und im gebogenen Zustande des Ringes desjenigen Bogenelementes der Axenlinie, das sich im gebogenen Zustande des Ringes bei m befindet,

φ_0 und φ die Winkel, welche die zu m_0 und m gezogenen Berührungslinien mit der Abscissenaxe bilden,

μ das Trägheitsmoment irgend eines Querschnittes des Ketteneisens in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und deren Richtung auf der Ebene der Figur senkrecht steht,

P die an der Kette hängende Last, mithin $\frac{1}{2}$ P der bei B wirkende Zug (das Gewicht der Kette nicht in Anschlag gebracht),

S die im Punkt m der Axenlinie herrschende Spannungsintensität,

M_1 die Summe der statischen Momente aller im Querschnitt bei B im nicht zerschnittenen aber belasteten Zustande des Ringes vorkommenden Spannungen und Pressungen. Diese Momentensumme ist es, die ersetzt werden muss, wenn durch das Zerschneiden des Ringes bei B der Gleichgewichtszustand des ellyptischen Quadranten nicht gestört werden soll,

M die Summe der statischen Momente aller im Querschnitt bei m vorkommenden Spannungen und Pressungen,

σ die Spannungsintensität in einem Punkt p des Querschnittes bei m der in der Ebene der Figur liegt und von der Axenlinie um $\overline{mp} = \zeta$ entfernt ist,

$\mathfrak{S}$ die Spannungsintensität in dem vom Punkte m entferntesten Punkte q desselben Querschnittes,

$z = \overline{mq}$ die Entfernung der Punkte, in welchen die Spannungsintensitäten S und $\mathfrak{S}$ vorhanden sind,

Ω der Querschnitt des Ketteneisens.

Dies vorausgesetzt, hat man nach Seite 51 der Theorie der Biegung eines im natürlichen Zustande gekrümmten Stabes:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2} \frac{P}{\Omega} \cos \varphi \pm \frac{M}{\mu} z \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{P}{\Omega} \cos \varphi \pm \frac{M}{\mu} \zeta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$M = \varepsilon \mu \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

wobei von dem Doppelzeichen dasjenige zu wählen ist, welches einen positiven Werth des zweiten Gliedes hervorbringt.

In unserem vorliegenden Fall ist aber auch:

$$M = M_1 + \frac{P}{2}(b - y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Nun handelt es sich um die Bestimmung von M_1, denn ist einmal M_1 bekannt, so geben uns die Gleichungen (1) und (2) die verschiedenen Spannungsintensitäten, nach welchen die Festigkeit eines Kettenringes bestimmt wird. Die Bestimmung des Werthes von M_1 erfordert eine besondere Betrachtung.

Nennen wir $d\,s_0$ $d\,s$ die natürliche Länge eines Faserstückes bei m_0 und die Länge des gleichen Faserstückes im deformirten Zustande des Ringes, dann haben wir $d\,s_0 = \varrho_0\, d\,\varphi_0$ $d\,s = \varrho\, d\,\varphi$, demnach:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{d\,\varphi}{d\,s} - \frac{d\,\varphi_0}{d\,s_0}$$

Vernachlässigen wir hier die Ausdehnung der Axenlinie und setzen also $d\,s_0 = d\,s$, so wird:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} = \frac{d\,\varphi - d\,\varphi_0}{d\,s}$$

und hieraus folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \int \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) d\,s$$

und wenn wir für $\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}$ den Werth setzen, der aus (3) und (4) folgt:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\varepsilon\,\mu} \int \left[M_1 + \frac{P}{2}(b - y)\right] d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Für die Punkte B und B_0 ist aber $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, demnach: $\varphi - \varphi_0 = 0$. Dehnen wir das Integrale über den ellyptischen Quadranten aus, so muss hiemit ein Werth gleich Null heraus kommen. Wir erhalten daher:

$$0 = \int_0^l \left[M_1 + \frac{P}{2}(b - y)\right] d\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

wobei l die Länge des ellyptischen Quadranten bedeutet.

Hieraus folgt:

$$M_1 = - \frac{\frac{P}{2} \int\limits_0^1 (b - y)\, ds}{1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und hiermit ist M_1 bestimmt.

Da bei den Ringen einer Kette die Axen a und b nicht viel verschieden sind, so kann man sich zur Berechnung der Integrale $\int y\, ds$ und $\int ds$ erlauben statt der Ellypse einen Kreisquadranten vom Halbmesser $\frac{1}{2}(a + b)$ in Rechnung zu bringen. Dann ist aber:

$$\int\limits_0^1 y\, ds = \frac{(a+b)^2}{4} \qquad \int\limits_0^1 ds = (a+b)\frac{\pi}{4}$$

Wir erhalten daher für M_1 folgenden Annäherungsausdruck:

$$M_1 = - \frac{P}{2} \frac{b\,(a+b)\frac{\pi}{4} - \frac{(a+b)^2}{4}}{(a+b)\frac{\pi}{4}}$$

oder:

$$M_1 = - \frac{P}{2}\left[b - (a+b)\frac{1}{\pi}\right] \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Setzt man diesen Werth von M_1 in den Ausdruck (4), so wird:

$$M = - \frac{P}{2}\left[b - (a+b)\frac{1}{\pi}\right] + \frac{P}{2} b - \frac{P}{2} y$$

oder:

$$M = \frac{P}{2}\left[(a+b)\frac{1}{\pi} - y\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

und nun wird vermöge (1):

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\frac{P}{\Omega}\cos\varphi \pm \frac{P\,z}{2\,\mu}\left[(a+b)\frac{1}{\pi} - y\right] \quad \ldots \quad (10)$$

Nennt man d den Durchmesser des Ketteneisens, so ist:

$$\Omega = \frac{d^2 \pi}{4}, \qquad \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32} d^3$$

und dann wird:

$$\mathfrak{S} = \left\{\frac{2}{\pi}\cos\varphi \pm \frac{16}{\pi}\left[\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)\frac{1}{\pi} - \frac{y}{d}\right]\right\}\frac{P}{d^2} \quad \ldots \quad (11)$$

Um vermittelst dieser Gleichung die Stelle und die Grösse der Maximalspannung zu bestimmen, ist es am passendsten, eine Verzeichnung der Axenlinie des Kettenringes zu Hilfe zu nehmen. Wir werden uns später überzeugen, dass es angemessen ist, für die Axenlinie eine Ellypse zu wählen, deren Halbaxen a und b folgende Werthe haben: $a = 1 \cdot 80\, d$, $b = 1 \cdot 25\, d$. Verzeichnet man diese Ellypse, nimmt in der Peripherie mehrere Punkte an, bestimmt die diesen Punkten entsprechenden Werthe von $\cos \varphi$ und $\frac{y}{d}$, so findet man vermittelst obiger Gleichung (11) folgende Resultate:

für $\varphi =$	90^0	50^0	27^0	17^0	0^0
$\cos \varphi =$	0·0000	0·6428	0·8910	0·9563	1·0000
$\frac{y}{d} =$	0·0000	0·6500	1·0000	1·2000	1·2500
$\mathfrak{S} \frac{d^2}{P} =$	4·9390	2·0385	0·7138	1.7798	2·0622

Bei dieser Berechnung wird $\left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right) \frac{1}{\pi} - \frac{y}{d}$ positiv für φ gleich 90^0 und 50^0, dagegen negativ für φ gleich 27^0, 17^0, 0^0, daher für 90^0 und 50^0 das Zeichen $+$, für 27^0, 17^0, 0^0 das Zeichen $-$ zu nehmen ist.

Diese Tabelle zeigt 1) dass die Maximalspannung für $\varphi = 90^0$, d. h. im Punkt A eintritt, 2) dass zwischen $\varphi = 90^0$ und $\varphi = 0^0$ eine Maximalspannung vorkommt, die ungefähr bei $\varphi = 28^0$ eintritt.

Für $\varphi = 90^0$ und $\frac{y}{d} = 0$ folgt aus (11):

$$d = \sqrt{\frac{16}{\pi^2 \mathfrak{S}} \left(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\right)} \sqrt{P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Hieraus sieht man (was auch ohne Rechnung eingesehen werden kann), dass es vortheilhaft ist, wenn die Ringe der Kette möglichst, d. h. so enge gemacht werden, dass eine Verklemmung je zweier in einander hängender Ringe nicht eintreten kann. Aber selbst dann, wenn man $\frac{a}{d}$ und $\frac{b}{d}$ möglichst klein nimmt, fallen nach dieser Formel die Durchmesser d sehr stark aus, man muss sich daher erlauben, das Material aufs Aeusserste, d. h. bis an die Elastizitätsgrenze in Anspruch zu nehmen. Nun ist die absolute Festigkeit für bestes Schmiedeeisen in dünnen Stäben 7000 Kilogramme, ist ferner die der Elastizitätsgrenze entsprechende Spannungsintensität $= 0 \cdot 4$,

der absoluten Festigkeit oder $0·4 \times 7000 = 2800$. Wir setzen daher in (12) $\mathfrak{S} = 2800$, $\frac{a}{d} = 1·80$, $\frac{b}{d} = 1·25$ und dann folgt:

$$d = 0·042 \sqrt{P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Berechnet man vermittelst der letzten Horizontalreihe der vorhergehenden Tabelle die Werthe, welche an verschiedenen Stellen die Durchmesser der Ketteneisen erhalten müssen, damit die Spannungsintensität in jedem Querschnitt gleich 2800 Kilogramme wird, so findet man:

für $\varphi =$	90°	50°	27°	17°	0°
$\frac{d}{\sqrt{P}} =$	0·042	0·027	0·016	0·025	0·027

Die Gleichung (9) zeigt, dass das Biegungsmoment M positiv null oder negativ ausfällt, wenn:

$$y < \frac{1}{\pi}(a+b) \qquad y = \frac{1}{\pi}(a+b) \qquad y > \frac{1}{\pi}(a+b)$$

Für $y = \frac{1}{\pi}(a+b)$ wird $\varphi = 28°$. Vom Scheitel A an bis an die Stelle wo $\varphi = 28°$ ist, wird also die Krümmung des Ringes durch die Einwirkung der Kraft verstärkt, von $\varphi = 28°$ an bis zum Punkt B hin wird dagegen die Krümmung durch die gleiche Ursache geschwächt. Bei $\varphi = 28°$ findet nur eine gleichförmige Ausdehnung und keine Krümmungsänderung statt.

In den Resultaten für den Maschinenbau findet man Seite 39 Regeln zur Bestimmung der Dimensionen der Kettenglieder aufgestellt. Diese Regeln beruhen auf der Voraussetzung, dass die Tragkraft der Ketten nach ihrer absoluten Festigkeit genommen werden darf.

Schlieper in Grüne bei *Iserlohn* geben die Dimensionen und die Tragkraft von Ketten an, welche sie in ihrer Werkstätte verfertigen. Nach dieser Angabe ergibt sich folgende Regel:

$$d = 0·032 \sqrt{P}$$

Dabei ist vierfache Sicherheit garantirt. Nach unserer Theorie ist diese Garantie zu hoch gestellt.

Ketten mit Aussteifungen.

Wir wollen nun auch die Ketten mit Aussteifungen behandeln. Fig. 5, Tafel VI.

In diesem Falle haben wir uns vorzustellen, dass bei B, Fig. 3, nicht nur die Materialspannungen wirken, sondern dass auch daselbst nach der Richtung der kleineren Axe die unbekannte Pressung Y der Aussteifung gegen das Ketteneisen drückt.

In diesem Falle ist daher das Moment aller äusseren Kräfte, welche auf den Querschnitt bei M einwirken:

$$M = M_1 + \frac{P}{2}(b - y) - Y(a - x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

demnach ist in dem vorliegenden Fall:

$$\varepsilon \mu \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0}\right) = M_1 + \frac{P}{2}(b - y) - Y(a - x) \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Nun können wir aber auch hier annähernd setzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_0} &= \frac{d\varphi - d\varphi_0}{ds} \\ \text{und} \qquad dy - dy_0 &= (\varphi - \varphi_0)\, dx \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Wir erhalten daher vermöge (2) und der ersten der Gleichungen (3):

$$\varepsilon \mu (d\varphi - d\varphi_0) = \left[M_1 + \frac{P}{2}(b - y) - Y(a - x)\right] ds$$

und

$$\varepsilon \mu (\varphi - \varphi_0) = \int \left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a - \frac{P}{2} y + Y x\right) ds$$

$$\varepsilon \mu (\varphi - \varphi_0) = \left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) \int ds - \frac{P}{2} \int y\, ds + Y \int x\, ds \quad (4)$$

Erlaubt man sich auch hier das Integrale so zu berechnen, wie wenn der Kettenring nach einem Kreis vom Halbmesser $r = \frac{a + b}{2}$ gekrümmt wäre, so ist zu setzen:

$$y = r \sin \psi, \qquad x = r(1 - \cos \psi), \qquad s = r \psi$$

demnach wird:

$$\int_0^{\psi} ds = \int_0^{\psi} r\, d\psi = r\,\psi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = r\,\frac{\pi}{2}$$

$$\int y\, ds = \int_0^{\psi} r^2 \cos\psi\, d\psi = r^2\,(1 - \cos\psi), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, ds = r^2$$

$$\int x\, ds = \int_0^{\psi} r^2\,(1 - \cos\psi)\, d\psi = r^2\,(\psi - \sin\psi), \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\, ds = r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Wir erhalten daher:

$$\varepsilon\mu\,(\varphi - \varphi_0) = \left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a\right) r\,\psi - \frac{P}{2}\,r^2\,(1 - \cos\psi) + Y\,r^2\,(\psi - \sin\psi) \quad (5)$$

Dehnt man dieses Integrale auf den ganzen Quadranten aus, setzt also $\psi = \frac{\pi}{2}$, so wird $\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, demnach wird:

$$0 = \left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a\right) r\,\frac{\pi}{2} - \frac{P}{2}\,r^2 + Y\,r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

oder:

$$0 = \left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a\right) \frac{\pi}{2} - \frac{P}{2}\,r + Y\,r \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \quad . \quad (6)$$

Führt man den allgemeinen Werth von $\varphi - \varphi_0$, welchen die Gleichung (5) darbietet, in die zweite der Gleichungen (3) ein, so findet man:

$$d\,y - d\,y_0 =$$

$$\frac{1}{\varepsilon\mu}\left[\left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a\right) r\,\psi - \frac{P}{2}\,r^2\,(1 - \cos\psi) + Y\,r^2\,(\psi - \sin\psi)\right] r \sin\psi\, d\psi$$

Hieraus folgt:

$$y - y_0 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \left\{ \begin{aligned} &\left(M_1 + \frac{P}{2}\,b - Y\,a\right) r^2 \int \psi \sin\psi\, d\psi \\ &- \frac{P}{2}\,r^3 \int \sin\psi\,(1 - \cos\psi)\, d\psi \\ &+ Y\,r^3 \int \sin\psi\,(\psi - \sin\psi)\, d\psi \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

Nun ist:

$$\int_0^{\psi} \psi \sin\psi \, d\psi = -\psi \cos\psi + \sin\psi, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi \sin\psi \, d\psi = 1$$

$$\int_0^{\psi} \sin\psi (1 - \cos\psi) \, d\psi = -\cos\psi + \frac{1}{2}\cos^2\psi + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi (1 - \cos\psi) \, d\psi = +\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\psi} \sin\psi (\psi - \sin\psi) \, d\psi = -\psi\cos\psi + \sin\psi + \frac{1}{4}\sin 2\psi - \frac{1}{2}\psi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\psi (\psi - \sin\psi) \, d\psi = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Dehnt man die Integrale bis $\psi = \frac{\pi}{2}$ aus, so muss $y - y_0$ verschwinden, denn die Aussteifung des Kettengliedes bewirkt, dass es sich in horizontalem Sinne nicht zusammenziehen kann. Man erhält daher mit Berücksichtigung der gefundenen Integralwerthe:

$$o = \left(M_1 + \frac{P}{2} b - Y a\right) - \frac{P}{4} r + Y r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Gleichungen (6) und (8) geben nun die unbekannten Werthe von M_1 und Y um deren Bestimmung es sich zunächst handelt.

Man findet:

$$Y = P \frac{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{4}}{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}} = 0{\cdot}457 \, P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$M_1 = \frac{P}{4} r - Y r \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{P}{2} b + Y a$$

oder wenn man für Y seinen durch P ausgedrückten Werth setzt und reduzirt:

$$M_1 = P \left(0.1513 \, r - \frac{b}{2} + 0{\cdot}457 \, a\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Und nun findet man wegen (1), wenn man Y und M_1 einführt und $r = \frac{1}{2}(a + b)$ setzt:

$$M = P\left[0{\cdot}0756\,(a + b) - \frac{y}{2} + 0{\cdot}457\,x\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nun ist die Spannungsintensität $\mathfrak{S}$ am äussersten Punkt q des Querschnittes bei m:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\,\frac{P\cos\varphi}{\Omega} \pm \frac{z}{\mu}\,M$$

demnach, wenn man für M seinen Werth aus (11) einführt:

$$\mathfrak{S} = \frac{1}{2}\,\frac{P\cos\varphi}{\Omega} \pm \frac{P\,z}{\mu}\left[0{\cdot}0756\,(a + b) - \frac{y}{2} + 0{\cdot}457\,x\right] \quad . \quad (12)$$

Setzt man auch hier, wie früher geschehen ist:

$$\Omega = \frac{d^2\,\pi}{4}, \quad \frac{\mu}{z} = \frac{\pi}{32}\,d^3, \quad \frac{a}{d} = 1{\cdot}8, \quad \frac{b}{d} = 1{\cdot}25$$

so findet man:

$$\mathfrak{S} = \left[\frac{2}{\pi}\,\cos\varphi \pm \frac{16}{\pi}\left(0{\cdot}4612 - \frac{y}{d} + 0{\cdot}914\,\frac{x}{d}\right)\right]\frac{P}{d^2} \, . \quad (13)$$

Verzeichnet man auch hier die Axenlinie des Ringes mit den normalen Verhältnissen $\left(\frac{a}{d} = 1{\cdot}80, \quad \frac{b}{d} = 1{\cdot}25\right)$ nimmt in der Zeichnung mehrere Punkte an und sucht die denselben entsprechenden Werthe von φ, $\frac{y}{d}$, $\frac{x}{d}$, so findet man vermittelst (13) folgende Resultate:

für $\varphi =$	90°	50°	27°	17°	0°
$\frac{\mathfrak{S}\,d^2}{P} =$	2·348	0·5644	1·147	2·664	4·998

Hieraus sieht man, dass bei diesen Kettenringen mit Aussteifungen das Maximum der Spannungsintensität nicht im Punkt A, sondern im Punkt B eintritt, dass ferner das Minimum der Spannungsintensität zwischen A und B fällt und in einem Punkt eintritt, für welchen φ ungefähr gleich 50° ist. Da die Dicke des Ketteneisens nach der Maximalspannung zu bestimmen ist, so erhalten wir:

$$\frac{\mathfrak{S}\,d^2}{P} = 4{\cdot}998$$

und wenn wir auch hier wie früher $\mathfrak{S} = 2800$ setzen, so folgt:

$$d = \sqrt{\frac{4\cdot998}{2800}}\ \sqrt{P} = 0\cdot042\ \sqrt{P}$$

Wir finden also für die Dicke des Ketteneisens genau denselben Werth, wie in dem Fall, wenn die Kettenglieder *nicht* ausgesteift sind. Nach unserer Theorie gewährt also diese Aussteifung bei ellyptischen Ringen keinen Vortheil.

Rhombische und gestreckte Kettenglieder. Aus den vorhergehenden Untersuchungen geht hervor, dass die ellyptischen Kettenringe eine zu grosse Formänderung zulassen, daher beträchtlich schwächer sind, als die dem Querschnitt des Ringes entsprechende Zugfestigkeit. Die besten Formen der Kettenglieder sind offenbar diejenigen, welche beinahe nur Ausdehnungen, aber keine merkliche Formänderung gestatten. Diese Eigenschaft besitzen beinahe vollkommen die rhombischen und gestreckten Kettenglieder. Fig. 10, Tafel VI. ist ein rhombisches Kettenglied, die Theile $a\ a_1$ sind kreisbogenförmig, der Halbmesser der inneren Rundungen ist etwas grösser als jener des Ketteneisens, die Theile $a\,b\quad a_1\,b_1$ sind geradlinig, die Theile $b\,b\quad b_1\,b_1$ sind nach einem ziemlich grossen Halbmesser abgerundet, c ist ein aussteifender Steg, der bei dieser rhombischen Form nicht fehlen darf.

Fig. 11, Tafel VI. ist eine Form, welche man die gestreckte nennen kann. Die Theile $a\,a_1\quad b\,b_1$ sind halbkreisförmig, die Halbmesser der inneren Rundungen dieser Theile sind nur wenig grösser als die Halbmesser des Ketteneisens, die Theile $a\,b\quad a_1\,b_1$ sind ganz geradlinig. Ein aussteifender Zwischensteg ist hier nicht nothwendig.

Zur Anfertigung solcher Kettenglieder ist eine Gesenk-Presse erforderlich, in welche jedes Glied im glühenden Zustande eingelegt und in die Form, welche es erhalten soll, gepresst wird.

Versuche über die Festigkeit dieser Kettenglieder sind nicht bekannt, es darf jedoch erwartet werden, dass das Tragungsvermögen derselben nach ihrer absoluten Festigkeit beurtheilt werden kann. Erlaubt man sich die Spannungsintensität von 800 Kilogrammen pro Quadratcentimeter in Rechnung zu bringen, so hat man zur Bestimmung des Durchmessers d des Ketteneisens:

$$2\ \frac{d^2\,\pi}{4}\ 800 = P$$

$$d = 0\cdot028\ \sqrt{P}$$

Diese Regel stimmt mit jener der Resultate für den Maschinenbau, Seite 39, überein.

Seil- und Kettenhaken.

Die Seil- und Kettenhaken werden gewöhnlich in der Mitte ihrer Krümmung zu schwach gemacht, was zur Folge hat, dass sie sich unter der Einwirkung einer Last aufbiegen oder gar brechen. Wir stellen uns nun die Aufgabe, derlei Haken so zu formen, dass dieselben in allen Querschnitten gleich stark angestrengt werden.

Es sei Fig. 6, Tafel VI. die theoretische Form eines solchen Hakens von gleicher Festigkeit. Die innere Krümmung A G D B sei ein Kreisbogen. Alle Normalschnitte des Hakeneisens seien Kreise. A H E B ist die Mittelpunktslinie aller Normalschnitte.

Nennen wir:

$r = \overline{CD}$ den Halbmesser der innern Hakenkrümmung,

$\widehat{FCB} = \varphi$ den Winkel, welchen irgend ein Normalschnitt $\overline{CF}$ mit der Richtung $\overline{BC}$ der Last bildet,

$\overline{FD} = y$ den Durchmesser des Hakeneisens bei D F,

Q die an dem Haken hängende Last,

$\mathfrak{S}$ die Spannungsintensität im Punkt D.

Dies vorausgesetzt, hat man vermöge der Gleichung (5), Seite 51, zur Bestimmung von $\mathfrak{S}$ folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{S} = \frac{Q \sin \varphi}{y^2 \frac{\pi}{4}} + \frac{Q\left(r + \frac{y}{2}\right) \sin \varphi}{\frac{\pi}{32} y^3} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

und hieraus folgt:

$$\sin \varphi = \frac{\mathfrak{S}\,\pi}{16\,Q} \frac{y^3}{2\,r + 1{\cdot}25\,y} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Betrachtet man $\mathfrak{S}$ als eine constante Grösse, so bestimmt diese Gleichung eine Hakenform, bei welcher in allen Punkten der innern Rundung einerlei Spannung herrscht. Man erhält diese Form, indem man für y eine Reihe von Werthen annimmt, und vermittelst (2) die correspondirenden Werthe von $\sin \varphi$ oder von φ berechnet. Zeichnet man den innern Kreis vom Halbmesser r, trägt sodann die berechneten Winkel φ auf und die angenommenen Werthe von y, so ergibt sich die Hakenform.

Die Gleichung (2) kann auch geschrieben werden, wie folgt:

$$\sin \varphi = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} \frac{r^2}{Q} \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^3}{2 + 1{\cdot}25\left(\frac{y}{r}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Nimmt man $\frac{r^2}{Q}$ constant, so werden alle Haken, es mag r gross oder klein sein, geometrisch-ähnliche Gebilde, und wenn einmal eine solche Hakenform richtig bestimmt worden ist, so braucht man diese in jedem folgenden Falle nur geometrisch-ähnlich nachzubilden, um abermals eine richtige Form zu erhalten.

Wir wollen daher für alle Haken der gleichen Art $\frac{r^2}{Q}$ constant annehmen.

Für Seilhaken ist es angemessen, die innere Weite 2 r zwei mal so gross zu nehmen, als der Durchmesser des Seiles ist. Nach unserer Regel (Resultate für den Maschinenbau, Seite 38) ist der Durchmesser eines Seiles, das eine Last Q zu tragen hat, gleich $0{\cdot}113\sqrt{Q}$, wir nehmen daher:

$$\text{für Seilhaken}\left\{\begin{aligned} 2r &= 2 \times 0{\cdot}113\sqrt{Q} \\ r &= 0{\cdot}113\sqrt{Q} \end{aligned}\right. \quad \dots\dots (4)$$

Für einfache Kettenhaken kann man den Durchmesser 2 r der innern Höhlung drei mal so gross machen, als den Durchmesser eines Ketteneisens. Dieses ist aber nach der Seite 129 aufgestellten Regel gleich $= 0{\cdot}042\sqrt{Q}$, daher setzen wir:

$$\text{für einfache Kettenhaken}\left\{\begin{aligned} 2r &= 3 \times 0{\cdot}042\sqrt{Q} \\ r &= 0{\cdot}063\sqrt{Q} \end{aligned}\right. \quad \dots (5)$$

Bei doppelten Kettenhaken hängt an jedem der beiden Haken die Hälfte der ganzen Last, kann daher genommen werden:

$$r = 0{\cdot}063\sqrt{\frac{Q}{2}} = 0{\cdot}0445\sqrt{Q} \quad \dots\dots (6)$$

Wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} &\text{für Seilhaken} \dots \frac{r^2}{Q} = (0{\cdot}113)^2 = \frac{1}{81} \\ &\text{für einfache Kettenhaken}\ \frac{r^2}{Q} = (0{\cdot}063)^2 = \frac{1}{256} \\ &\text{für doppelte Kettenhaken}\ \frac{r^2}{Q} = (0{\cdot}0445)^2 = \frac{1}{512} \end{aligned}\right\} \quad \dots (7)$$

Damit diese Haken eben so stark in Anspruch genommen werden wie die Ketten und wie die Seile, wollen wir setzen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für Kettenhaken} & \mathfrak{S} = 0{\cdot}4 \times 7000 = 2800 \\ \text{für Seilhaken} & \mathfrak{S} = \frac{1}{5} \times 7000 = 1400\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (7)$$

Dann wird vermöge (3):

$$\text{für Seilhaken} \; . \; . \; . \; \sin\varphi = 3{\cdot}40 \, \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^3}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)}$$

$$\text{für einfache Kettenhaken} \sin\varphi = 2{\cdot}15 \, \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^3}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)}$$

$$\text{für Doppelkettenhaken} \quad \sin\varphi = 1{\cdot}07 \, \frac{\left(\frac{y}{r}\right)^3}{2 + 1{\cdot}25 \left(\frac{y}{r}\right)}$$

Vermittelst dieser Ausdrücke können die Hakenformen berechnet werden. Wir beschränken uns aber auf die Bestimmung der grössten Dicke des Hakeneisens bei J G.

Nennen wir $\overline{JG} = \Delta$, so muss für $\frac{y}{r} = \frac{\Delta}{r}$, $\sin\varphi = 1$ werden. Man findet:

$$\text{für Seilhaken} \; . \; . \; . \; . \; \Delta = 0{\cdot}982 \; r = 0{\cdot}111 \; \sqrt{Q}$$

$$\text{für einfache Kettenhaken} \; \Delta = 1{\cdot}160 \; r = 0{\cdot}073 \; \sqrt{Q}$$

$$\text{für Doppelkettenhaken} \quad \Delta = 1{\cdot}540 \; r = 0{\cdot}0685 \; \sqrt{Q}$$

Die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Abmessungen sind unter folgenden Voraussetzungen berechnet. Für Seilhaken: $\mathfrak{S} = 1400$, Durchmesser (2 r) der innern Krümmung gleich 1·5 Seildurchmesser.

Für Kettenhaken: $\mathfrak{S} = 2800$, Durchmesser (2 r) der innern Höhlung gleich zwei mal so gross als der Durchmesser des Ketteneisens der Kette, die in den Haken eingehängt wird.

Objekt.	Einheiten.	Halbmesser der innern Krümmung r.	Grösste Dicke des Hakeneisens Δ.	Durchmesser der Säule D.
Seilhaken	Seildurchmesser.	0 75	0·91	0·50
Einfacher Kettenhaken	Durchmesser des Ketteneisens.	1·00	1·61	1·00
Doppelter Kettenhaken	Durchmesser des Ketteneisens.	0·71	1·49	1·00

Schrauben zur Verbindung von Körpern.

Erklärungen. Um zwei Körper zweckmässig zu verbinden, muss man die Kräfte beachten, welche auf die Körper einwirken; ob sie dieselben entweder gegen einander pressen, oder von einander zu entfernen suchen, oder endlich gegen einander verschieben wollen. Im ersteren Falle ist eine eigentliche Verbindung nur nothwendig, damit nicht etwa durch zufällig einwirkende störende Kräfte eine Aenderung in der relativen Lage der Körper veranlasst wird. Zuweilen genügt in diesem Falle die durch den wechselseitigen Druck der Körper gegen einander entstehende Reibung. Im zweiten Fall werden gewöhnlich Nieten oder Schrauben angewendet. Im dritten Fall kann wohl auch zuweilen die Verbindung der Körper vermittelst Nieten und Schrauben genügen; wenn jedoch die auf Verschiebung wirkenden Kräfte eine grosse Intensität haben, so ist es besser, die beiden Körper noch überdies ineinandergreifend zu bilden, so dass die Schrauben und Nieten eigentlich nur zusammenhalten, während das Ineinandergreifen gegen die Verschiebung schützt.

Wir sprechen nun zunächst von der Verbindung zweier Körper vermittelst Schrauben, und setzen dabei voraus, dass die auf die Körper einwirkenden Kräfte eine Trennung der Körper nach einer auf die Berührungsfläche senkrechten Richtung hervorzubringen streben.

Es seien z. B. A und B Fig. 7, Tafel VI. zwei durch eine Schraube zu verbindende Platten, die durch zwei Kräfte P und P von einander gezogen werden. Die Dimensionen einer solchen Schraubenverbin-

dung können nicht alle auf rationellem Wege, sondern müssen theilweise durch Erfahrung bestimmt werden.

Die Länge des Bolzen c wird vorzugsweise durch die Summe der Dicken der beiden Platten bestimmt. Der Bolzenquerschnitt muss natürlich der Kraft P und der Bolzendurchmesser d der Quadratwurzel aus dieser Kraft proportional genommen werden.

Durch eine Vergleichung der Dimensionen und Anzahl der Deckelschrauben von Dampfcylindern habe ich gefunden, dass jeder Quadratcentimenter des Querschnittes einer solchen Schraube mit nur 100 Kilogramm gespannt, also ungefähr nur auf den $\frac{4000}{100} =$ 40sten Theil der absoluten Festigkeit in Anspruch genommen ist, und ungefähr das Gleiche habe ich auch bei andern Schraubenverbindungen gefunden. Wir dürfen uns also erlauben, für gewöhnliche Schraubenverbindungen die Regel aufzustellen, dass die Spannungsintensität eines Schraubenbolzen 100 Kilogramm betragen darf, dann ist zu setzen:

$$\frac{d^2 \pi}{4} 100 = P \text{, demnach } d = \frac{1}{9} \sqrt{P} \quad \ldots \quad (1)$$

Alle übrigen Dimensionen der Schraubenverbindung, namentlich die Dimensionen des Bolzenkopfs, der Gewinde und der Mutter müssen durch Erfahrung ermittelt werden.

Was zunächst die Gewinde betrifft, so dürfen diese nicht bei grossen und kleinen Bolzen geometrisch ähnlich gemacht werden. Man denke sich, dass man einen Bolzen von 2 Centimeter Durchmesser mit ganz angemessenen Gewinden versehe. Würde man diese Schraube geometrisch ähnlich einmal vier mal kleiner, das andere mal vier mal grösser ausführen, so ist leicht zu erkennen, dass die Gewinde im ersteren Falle zu fein im letzteren Falle zu gross ausfielen, woraus zu ersehen ist, dass bei kleinen Schrauben die Gewinde verhältnissmässig zum Bolzendurchmesser grösser genommen werden müssen, als bei grossen Schraubenbolzen, und dies ist auch in der That bei den Gewinden der Fall, die man bei gut construirten Maschinen anwendet. *Whitworth* war es, der zuerst bestimmte empirische Regeln für die Bestimmung der Gewinde aufgestellt hat. Ich habe diese Regeln für Schrauben einer Prüfung unterworfen, und habe dabei mancherlei Unregelmässigkeiten gefunden, was mich veranlasste, die Whitworth'schen Gewinddimensionen nicht unmittelbar als Regel anzunehmen, sondern vielmehr die Regel empirisch aufzusuchen, welche den Whitworth'schen Schrauben entspricht. Auf diesem Wege haben sich folgende Resultate ergeben.

Nennt man Fig. 8 und 9, Tafel VI.:

P die Kraft in Kilogrammen, welche den Schraubenbolzen abzureissen strebt,

d den Durchmesser des Schraubenbolzens,

d_1 den inneren Gewinddurchmesser,

D_1 die Schlüsselweite oder den Durchmesser des Kreises, welcher dem sechsseitigen Grundriss der Schraubenmutter eingeschrieben werden kann,

h die Höhe der Mutter,

n die Anzahl der Gewinde, welche auf einer Länge gleich dem Durchmesser d vorkommen sollen,

so geben die nachstehenden Formeln Dimensionen, welche denen von *Whitworth* gewählten sehr nahe kommen.

a) für Schrauben mit scharfen Gewinden, Fig. 8:

$$d = \frac{1}{9} \sqrt{P}$$

$$n = \sqrt[3]{48 + 168\, d}$$

$$d_1 = \frac{n - 2}{n} d$$

$$D_1 = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4\, d$$

$$h = \frac{2}{3} D_1$$

b) für Schrauben mit flachen Gewinden, Fig. 9:

$$d = \frac{1}{9} \sqrt{P}$$

$$n = \frac{1}{2} \sqrt[3]{48 + 168\, d}$$

$$d_1 = \frac{n - 1}{n} d$$

$$D_1 = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 4\, d$$

$$h = D_1$$

Die Dimensionen, welche diese Formeln geben, sind in der Tabelle Seite 42 der Resultate für den Maschinenbau, vierte Auflage, zusammen gestellt.

Für eine Maschinenwerkstätte ist es das Beste, wenn sie sich weder der Formeln noch der Tabelle bedient, sondern alle Schrauben in Naturgrösse nach diesen oder ähnlichen Regeln verzeichnet und in allen Arbeitszeichnungen genaue Copien macht.

Zur Verzeichnung der Schrauben im kleineren Maassstabe kann man die nachstehenden mittleren Werthe annehmen:

n Anzahl der Gewinde auf den Durchmesser	$= 8$
d_1 innerer Gewinddurchmesser	$= \frac{3}{4}\ d$
h Höhe der Schraubenmutter	$= \ d$
D_1 Schlüsselweite	$= \frac{3}{2}\ d$
Halbmesser der oberen kugelförmigen Wölbung des Mutterkörpers	$= 3\ d$
Halbmesser der Abrundungen am sechsseitigen Prisma	$= \frac{3}{2}\ d$

Beispiele über die Verbindung vermittelst Schrauben. Um die mannigfaltigen Anwendungen der Schrauben zur Verbindung von Körpern zu erklären, mögen folgende Beispiele dienen. (Tafel VII. der Resultate für den Maschinenbau):

Fig. 2. Schraubenverbindung mit eingeankertem Bolzen. Der unten ankerförmige Bolzen ist in einen gusseisernen Körper eingelegt und die Platte wird vermittelst der Mutter mit dem Körper verbunden.

Fig. 3. Verbindung dreier Körper a b c vermittelst einer Schraube. Der Bolzen ist an beiden Enden mit Gewinden versehen und mit einem mittleren Bolzenkopf, der in den mittleren Körper zu liegen kommt. Durch die untere Schraubenmutter werden die Körper b und c, durch die obere Schraubenmutter die Körper a und b verbunden. Diese Verbindung kann z. B. gebraucht werden, um den Körper eines Zapfenlagers mit der Lagerplatte und zugleich den Lagerdeckel gegen den Lagerkörper zu verbinden, so dass die Schrauben, vermittelst welcher bei gewöhnlichen Zapfenlagern die Lagerkörper mit den Lagerplatten verbunden werden, ganz wegfallen können, was dann zur Folge hat, dass die Lagerplatte in der Richtung ihrer Länge hin nur eine geringe Ausdehnung erhält. Dies ist, wenn man im Raum beengt ist, zweckmässig.

Fig. 4. Schraubenbolzen, der an einen Zapfen gesteckt ist. Diese Verbindung wird zuweilen bei Stopfbüchsen angewendet, um den Deckel gegen den Körper der Stopfbüchse zu schrauben.

Fig. 5. Mit einem Keile eingelegter Schraubenbolzen. Diese Anordnung wird z. B. angewendet, um eine eiserne Säule mit einer

Grundplatte oder um ein eisernes Gebälk mit einer eisernen Säule zu verbinden. Der Körper a mag z. B. das obere Ende der Säule, der Körper b das Gebälk vorstellen. Der Bolzen ist in der ausgebohrten Säule herabgesteckt und mit derselben vermittelst eines quer durchgesteckten Keiles c mit der Säule verbunden. Das Gebälk b wird vermittelst der Schraubenmutter mit der Säule verbunden.

Fig. 6. Schraube mit viereckigem Bolzen. Derlei Schrauben werden angewendet, damit sich der Bolzen beim Anziehen der Mutter nicht mitdrehen kann.

Fig. 7. Schraube mit einem Bolzen, der mit einem Gewinde in den einen der zu verbindenden Körper eingeschraubt wird. Zuweilen ist es nicht möglich, den Bolzen mit einem Kopf zu versehen. Man schraubt in diesem Fall den Bolzen selbst in einen der Körper hinein. Um dabei den Bolzen mit einem Schlüssel anfassen zu können, werden an demselben zwei parallele ebene Flächen angefeilt.

Fig. 8. Bolzen mit einem versenkten Kopfe. Diese Bolzen werden angewendet, wenn über die Fläche des einen der zu verbindenden Körper nichts hervorragen darf. Allein diese Verbindung macht ziemlich viel Arbeit, weil der Bolzenkopf konisch abgedreht und der eine Körper konisch ausgerieben werden muss.

Fig. 9. Bolzen mit einer Nase, welche die Drehung desselben verhindert, während die Mutter angezogen wird.

Fig. 10. Schraube zur Verbindung eines eisernen Körpers mit einem Fundamentsteine. Wenn der Bolzen durch den Stein nicht ganz durchgehen kann oder nicht ganz durchgehen soll, wird er mit dem Stein in folgender Weise verbunden: Der Theil des Bolzen, welcher in den Stein eingesenkt wird, wird viereckig pyramidal geformt, die Kanten eingehackt; sodann in eine in den Stein gemeiselte pyramidale Vertiefung eingesenkt und durch vier Eisenstäbe verkeilt, worauf noch die leeren Räume zwischen dem Bolzen und dem Steine mit Blei ausgegossen werden können. Ist auf diese Weise der Schraubenbolzen mit dem Steine verbunden, so kann der Eisenkörper leicht angeschraubt werden.

Fig. 1. Fundament-Schraube. Bei kräftigen Maschinen werden häufig die Gestelle oder andere Maschinentheile gegen Steinfundamente geschraubt und muss dies in solcher Weise geschehen, dass die Verbindung nicht bloss mit der obersten Steinlage, sondern mit der ganzen Steinmasse des Fundamentes eintritt. Eine solche Verbindung wird namentlich bei Kurbellagern und überhaupt in allen den Fällen nothwendig, wenn auf die mit dem Fundament zu verbindenden Körper nach vertikaler Richtung aufwärts sehr mächtige Kräfte K

einwirken. Unter solchen Umständen ist eine solide Befestigung nur dadurch möglich, indem man die Fundamentsteine beträchtlich schwerer macht, als die Kraft K ist, und dann den Körper mit dem ganzen Fundament und nicht bloss mit dem obersten Stein verbindet. Man muss also durch das ganze Fundament hinab Bolzenlöcher bohren, die Bolzenstangen hinabsenken, unten wie oben Platten anbringen und dieselben unten mit Keilen, oben mit Schrauben mit dem Fundament verbinden. Oder mit anderen Worten: es ist die ganze Steinmasse des Fundamentes durch Bolzen, welche dasselbe durchdringen, zwischen zwei Eisenplatten zu schrauben, und dann kann der mit dem Fundament zu befestigende Körper gegen die obere der beiden Platten geschraubt werden.

Verbindung gußeiserner, plattenförmiger Körper vermittelst Schrauben. (Tafel VIII. der Resultate für den Maschinenbau.)

Bei den Verbindungen gusseiserner plattenförmiger Körper müssen, wenn eine grössere Genauigkeit und Solidität gefordert wird, drei Bedingungen erfüllt werden: 1) müssen die Flächen, in welchen sich die Körper zu berühren haben, sorgfältig auf der Drehbank oder Hobelmaschine glatt bearbeitet werden; 2) müssen die Bolzenlöcher gebildet werden, indem man die glatt bearbeiteten Theile der Platten aufeinanderlegt und den Bohrer durch beide Platten arbeiten lässt; 3) müssen die Platten ineinandergreifend eingerichtet und nicht bloss zusammen geschraubt werden, wenn dieselben einer Gegeneinander-Verschiebung ausgesetzt sind.

Beispiele solcher Verbindungen sind folgende:

Fig. 1. Einfache Ueberplattung. Die Berührungsflächen der beiden Platten haben glatt gehobelte Säume, und an einer der beiden Seiten bilden die Platten eine continuirlich fortlaufende Ebene. Diese Verbindung ist genügend, wenn auf die Platten keine Kräfte einwirken, die eine Verschiebung derselben hervorbringen würden.

Fig. 3. Verbindung eines Radarmes mit einem Radringe. Das Ende des Armes ist zwischen zwei an den Radring angegossene Leisten eingelegt. Alle Flächen, in welchen sich die beiden Körper berühren, sind glatt gehobelt. Die Schrauben haben nur zusammen zu halten, die Leisten schützen gegen Verschiebung.

Fig. 2. Verbindung eines Radarmes a mit zwei aneinander stossenden Radsegmenten $b\ b_1$. An den Segmenten sind die Ansätze $c\ c_1$ angegossen und werden von dem Ende des Armes umfasst. Alle Flächen, in welchen sich die Körper berühren, sind glatt gearbeitet. Die Schrauben haben nur zusammenzuhalten, weil die Ansätze $c\ c_1$ von dem Arm umfasst werden.

Fig. 4. Verbindung mit Einlegscheiben. Diese Verbindung ist wohl die beste, die man überhaupt machen kann. Dieselbe wird auf folgende Weise ausgeführt: Zuerst werden die Platten an den Theilen, die in Berührung kommen sollen, glatt gehobelt. Sodann werden die Platten aufeinander gelegt und die Bolzenlöcher durchgebohrt. Hierauf werden die Platten wiederum auseinander gelegt und werden vermittelst einer Fräse die runden Vertiefungen, in welche die Einlegscheiben zu legen sind, ausgearbeitet. Dann werden die glatt zu bearbeitenden Einlegscheiben und Bolzen angefertigt. Ist dies alles geschehen, so werden in eine der beiden Platten die Einlegscheiben eingelegt, die zweite Platte darüber gelegt und werden endlich die Bolzen durchgesteckt und die Schraubenmutter angezogen. Diese Verbindung ist deshalb so vorzüglich, weil bei derselben keine Handarbeit, kein Meiselhieb oder Feilenstrich vorkommt.

Fig. 5 bis 8 zeigen Gefässwände-Bildungen aus gusseisernen Platten und zwar für solche Gefässe, die keinen stärkeren Krafteinwirkungen ausgesetzt sind, und nur gegen das Entweichen der Flüssigkeiten hinreichende Dichtigkeit gewähren sollen.

Vernietungen.

Nieten.

Allgemeine Erklärungen. Das Eisenblech spielt gegenwärtig im technischen Gebiete eine sehr ausgedehnte Rolle. Die mannigfaltigsten Gegenstände werden daraus gefertiget. Gefässe aller Art, kleine und grössere Röhren, Dampfbehälter, Gasbehälter, Wasserbehälter, Schiffe, ferner Tragbalken, Maschinengestelle, kleinere und grössere Brücken. Diese vielseitige Verwendung des Bleches für mannigfaltige Construktionen ist durch die Verbindungsweise der Bleche, ist durch die Vernietung möglich geworden; es ist daher wohl der Mühe werth, diese Verbindung auf das Genaueste zu studiren.

Die Verbindung zweier Bleche vermittelst Nieten geschieht auf folgende Weise: Die zu verbindenden Bleche werden längs ihren Rändern mit einer Reihe von äquidistanten Durchlochungen versehen, hierauf aufeinander gelegt und dann durch Nieten verbunden. Jede solche Niete wird in Gesenken geschmiedet, hierauf in glühendem Zustande durch zwei correspondirende Durchlochungen der Bleche getrieben, worauf dann vermittelst Hämmern aus dem in

glühendem Zustande befindlichen, aus dem Blech hervorragenden Ende des Bolzens ein halbkugelförmiger oder konischer Kopf geschmiedet wird.

Fig. 1, Tafel VII. zeigt die durch die Bleche gesteckte Niete, Fig. 2 die fertige Niete. Um den Kopf c der Niete zu bilden, werden gewöhnlich Handhämmer, zuweilen auch Nietmaschinen gebraucht. Im ersten Falle wird das Blech auf eine feste Unterlage gelegt, oder es wird gegen den bereits vor dem Durchstecken des Bolzens durch die Bleche an dem Bolzen befindlichen Kopf a ein Hammer angedrückt und wird hierauf aus dem über die Bleche hervorragenden glühenden Theil des Bolzens durch geeignet geformte Hämmer der Kopf c allmählig gebildet. Zuletzt wird gewöhnlich noch ein Setzhammer angewendet, theils um die Form des Kopfes regelmässiger auszubilden, theils um den unteren Rand des Kopfes bei b fest in das Material des Bleches einzutreiben. Zuletzt, wenn auf diese Weise eine Reihe von Nieten angefertiget worden ist, wird noch das eine Blech bei d mit seinem Rande vermittelst Stemmeisen in das andere Blech hineingetrieben.

Die Bedingungen einer guten Vernietung sind: 1) Eine angemessene Entfernung der in den Reihen aufeinander folgenden Nieten. 2) Angemessene Dimension des Bolzens und der Bolzenköpfe im Verhältniss zur Blechdicke. 3) Genaues Aufeinanderpassen der Durchlochungen, durch welche ein Bolzen getrieben wird. 4) Genaues Einpassen der Bolzen in die Durchlochungen.

Was die Dimensionen der Nieten und ihre Entfernungen in der Vernietung anbelangt, so werden in Folgendem die geeigneten Untersuchungen hierüber folgen. Die Durchlochung der Bleche geschieht gewöhnlich vermittelst einer sogenannten Lochmaschine. Diese ist mit einem Stempel von Stahl versehen und drückt denselben durch das Blech. Für sehr wichtige Construktionen und wenn eine sehr vollkommene Verbindung gefordert wird, ist es jedoch das Beste, wenn die zu verbindenden Bleche mit ihren Rändern auf einander gelegt werden und wenn dann die Duchlochung durch einen Bohrer einer vertikalen Bohrmaschine geschieht. Nur auf diese Weise ist es möglich, ganz runde und genau aufeinander passende Durchlochungen mit ganz reinen, nicht aufgerissenen Rändern zu erhalten. Damit der Bolzen die Durchlochungen vollkommen ausfüllt, muss der Durchmesser desselben so gross sein, dass bereits einige Kraft nothwendig ist, wenn man den Bolzen im kalten Zustande durch die Löcher treiben will, so dass also ziemlich kräftige Hammerschläge nothwendig sind, um die glühend gemachten Bolzen durch die Löcher zu treiben.

Was den Durchmesser der Bolzen und ihre Entfernung betrifft, so richten sich diese nach der Bestimmung des Gegenstandes, der durch die Vernietung entstehen soll. Es kann nämlich von der Vernietung 1) Festigkeit, 2) Dichtigkeit, oder 3) Festigkeit und Dichtigkeit gefordert werden. Das erstere ist der Fall bei Tragbalken, Tragröhren, Blechbrücken, und das zweite bei Gasbehältern, das letzte endlich bei Dampfkesseln, Dampfschiffen etc.

Wir wollen nun die Festigkeitsverhältnisse verschiedener Vernietungsweisen untersuchen.

Einfache Vernietung zweier Bleche. Fig. 3 und 4, Tafel VII. Es seien u und o zwei durch eine einfache Nietreihe verbundene Bleche, die durch zwei Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen gezogen werden.

Nennen wir:

δ die Dicke der Bleche,

d den Durchmesser eines Nietbolzens,

e Fig. 4, die Entfernung der Mittelpunkte zweier unmittelbar aufeinander folgenden Nieten,

$e_{\prime}$ die Entfernung eines Bolzenrandes vom Rand des Bleches,

f das Verhältniss zwischen der Festigkeit des Bleches und der Festigkeit der Vernietung.

Denkt man sich die verbundenen Bleche der Einwirkung der Kräfte ausgesetzt, so kann diese Verbindung möglicher Weise aufgehoben werden, 1) wenn die Blechstücke zwischen den Nieten abreissen; 2) wenn die Nietbolzen abgescheert werden; 3) wenn durch die Bolzen die Blechränder bei a b hinausreissen. Offenbar müssen wir von einer guten Vernietung fordern, dass keine dieser drei Möglichkeiten eher eintritt als die andere, und da wir den Abscheerungswiderstand der absoluten Festigkeit gleich setzen dürfen, so muss der Querschnitt δ (e — d) des Bleches zwischen zwei Nieten gleich gesetzt werden dem Querschnitt $\frac{d^2 \pi}{4}$ eines Bolzens und gleich gesetzt werden dem Querschnitt $2\, e_{\prime}\, \delta$, der durch das Ausreissen eines Bolzens abgescheert werden müsste. Wir erhalten daher:

$$\delta\,(e - d) = \frac{d_2\,\pi}{4} = 2\, e_{\prime}\, \delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Hieraus findet man leicht folgende Beziehungen:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{e_1}{\delta} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Dies sind nun die Bedingungen, die erfüllt werden müssen, damit die Vernietung in allen Theilen einerlei Festigkeit gewähren kann. Was nun die Grösse f betrifft, so wird diese offenbar durch das Verhältniss $\frac{e}{e-d}$ bestimmt. Man hat daher:

$$f = \frac{e}{e-d}$$

oder wenn man den Werth von e vermittelst (2) eliminirt:

$$f = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\frac{d}{\delta} = \frac{4}{\pi\,(f-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Gleichung (4) zeigt zunächst, dass die Vernietung immer schwächer ist, als das Blech selbst, denn f ist immer grösser als die Einheit. Auch zeigt diese Gleichung, dass es hinsichtlich der Festigkeit vortheilhaft ist, die Bolzendicke d im Verhältniss zur Blechdicke δ gross zu nehmen, denn wenn $\frac{d}{\delta}$ gross ist, fällt vermöge (4) f klein aus.

Die Gleichung (2) zeigt ferner, dass die Bolzendistanz mit dem Verhältniss $\frac{d}{\delta}$ wächst. Einer festen Vernietung (für welche $\frac{d}{\delta}$ gross sein muss), entsprechen demnach weit gestellte, einer schwachen Vernietung dagegen (für welche $\frac{d}{\delta}$ klein ist), eng gestellte Bolzen.

Hieraus ergibt sich, wie das Verhältniss $\frac{d}{\delta}$ unter verschiedenen Umständen gewählt werden soll.

Wenn nämlich eine Vernietung nur allein Festigkeit gewähren soll, ist es vortheilhaft, starke aber weit gestellte Bolzen zu nehmen. Handelt es sich dagegen nicht um Festigkeit, sondern nur allein um Dichtigkeit, so ist es vortheilhafter, kleine und eng gestellte Bolzen zu nehmen. Soll endlich die Vernietung sowohl Festigkeit als auch Dichtigkeit gewähren, so muss man eine Vernietung wählen mit Bolzen von mittlerer Dicke und mittlerer Entfernung.

Aus den aufgestellten Gleichungen folgt:

für $\frac{d}{\delta}$ =	1·0	1·5	2	2·5	3
f =	2·27	1·85	1·64	1.51	1·42
$\frac{e}{\delta}$ =	1·78	3·26	5·14	7·41	10·06
$\frac{e_1}{\delta}$ =	0·39	0·88	1·56	2·44	3·51

Eine Vergleichung der Zahlen dieser Tabelle mit verschiedenen Vernietungen an Dampfkesseln, Dampfschiffen, Gasometern und Brückenconstruktionen hat gezeigt, dass die Annahmen

$\frac{d}{\delta} = 2·5$ für Vernietungen, die nur Festigkeit erfordern,

$\frac{d}{\delta} = 1·5$ „ „ „ „ Dichtigkeit erfordern,

$\frac{d}{\delta} = 2·0$ „ „ „ Festigkeit und Dichtigkeit erfordern,

angemessen sind. Die Festigkeiten dieser drei Vernietungen sind 0·7, 0·61, 0·54 von der Festigkeit des Bleches.

In Bezug auf die Enfernung e_1 ist zu bemerken, dass dieselbe etwas grösser genommen werden kann, als die Rechnung gibt, denn diese bestimmt eigentlich nur die kleinsten Werthe von e_1; es ist jedoch andererseits nicht gut, e_1 zu gross zu nehmen, weil sich sonst die Blechwand nicht gut verstemmen lässt.

Doppelte und mehrfache Vernietung zweier Bleche. Fig. 5 und 6, Tafel VII. Damit eine Vernietung mit zwei Nietreihen, in allen Theilen einerlei Festigkeit gewährt, muss offenbar der Querschnitt $\delta\,(e - d)$ des Bleches zwischen zwei Bolzen einer Reihe gleich sein der Summe der Querschnitte zweier Bolzen oder gleich sein $2\,\frac{d^2\pi}{4}$, vorausgesetzt, dass die Festigkeit eines Materials gegen das Abscheeren gleich ist seiner absoluten Festigkeit. Man hat daher für eine solche doppelte Vernietung zu setzen:

$$\delta\,(e - d) = 2\,\frac{d^2\pi}{4}$$

woraus folgt:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Das Festigkeitsverhältniss ist hier wie früher $f = \frac{e}{e - d}$, oder, wenn man für e aus (6) seinen Werth setzt:

$$f = 1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\delta}{d} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Dieser Werth von f ist für den gleichen Werth von $\left(\frac{d}{\delta} \right)$ kleiner, als derjenige (4), den wir früher für die einfache Vernietung gefunden haben, oder die Vernietung mit zwei Nietenreihen gewährt im Allgemeinen eine grössere Festigkeit, als die Vernietung mit einer Nietreihe. Aus den Gleichungen (6) und (7) folgt:

für $\frac{d}{\delta} =$	1·0	1·5	2·0	2·5	3·0
$\frac{e}{\delta} =$	2·6	5·0	8·3	11·3	14·1
$\frac{1}{f} =$	0·60	0·70	0·75	0·80	0·83

Wenn die Vernietung mit mehr als zwei, z. B. im Algemeinen mit i Nietreihen in allen Theilen einerlei Festigkeit gewähren soll, muss der Querschnitt δ (e — d) des Bleches zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden Nieten einer Reihe gleich sein dem i-fachen Querschnitt eines Bolzens und man hat daher in diesem Falle zu setzen:

$$\delta \, (e - d) = i \, \frac{d^2 \pi}{4}$$

$$f = \frac{e}{e - d}$$

und daraus findet man leicht:

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + i \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{\delta} \right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

$$f = 1 + \frac{4}{i \pi} \left(\frac{\delta}{d} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung (9) sieht man, dass zwar die Festigkeit einer Vernietung mit der Anzahl der Nietreihen fort und fort wächst, dass jedoch, wie gross man auch i annehmen mag, niemals $f = 1$ werden kann, d. h. dass die Festigkeit jeder Vernietung kleiner ist, als die Blechfestigkeit.

Vergleichung einer einfachen Vernietung mit einer doppelten. Wir wollen uns die Frage zur Beantwortung vorlegen, wie sich die Festigkeiten

einer einfachen und einer doppelten Vernietung verhalten, wenn in beiden Vernietungen gleich viel Nietbolzen angewendet werden.

Bezeichnen wir für die doppelte Vernietung mit d_1 e_1 f_1 die analogen Grössen, die bei der einfachen Vernietung mit d e f bezeichnet werden, so haben wir vermöge (2) und (4):

$$\frac{e}{\delta} = \frac{d}{\delta} + \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

$$f = 1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\delta}{d}\right) \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

und vermöge (6) und (7):

$$\frac{e_1}{\delta} = \frac{d_1}{\delta} + \frac{\pi}{2}\left(\frac{d_1}{\delta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

$$f_1 = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\delta}{d_1}\right) \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Die Anzahl der Nieten, welche auf einen Meter oder 100 Centimeter Länge der Vernietungen vorkommen, sind für die einfache Vernietung $\frac{100}{e}$, für die doppelte Vernietung dagegen $2\,\frac{100}{e_1}$.

Beide Vernietungen haben daher gleich viel Nieten, wenn:

$$\frac{100}{e} = 2 . \frac{100}{e_1}$$

oder wenn:

$$e_1 = 2\,e \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

ist. Führen wir diesen Werth von e_1 in (12) ein und suchen hierauf $\frac{d_1}{\delta}$, so findet man mit Berücksichtigung von (10):

$$\frac{d_1}{\delta} = -\frac{1}{\pi} + \sqrt{\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{d}{\delta}\right) + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2} \quad \ldots \quad (15)$$

Durch diese Gleichung wird der Durchmesser eines Bolzens der doppelten Vernietung bestimmt, hat man denselben berechnet; so findet man aus (11) und (13):

$$\frac{f_1}{f} = \frac{\pi + 2\left(\frac{\delta}{d_1}\right)}{\pi + 4\left(\frac{\delta}{d}\right)} \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

Es sei z. B. für die einfache Vernietung $\frac{d}{\delta} = 2$, so folgt aus der Gleichung (15):

$$\frac{d_1}{\delta} = -\frac{1}{3{\cdot}14} + \sqrt{\left(\frac{1}{3{\cdot}14}\right)^2 + \frac{4}{3{\cdot}14}\,2 + 4} = 2{\cdot}26$$

und nun findet man aus (16):

$$\frac{f_1}{f} = 0{\cdot}82$$

Die doppelte Vernietung ist daher, wenn sie eben so viel Nieten erhält als die einfache und wenn ferner jede der beiden Vernietungen in allen Theilen einerlei Festigkeit gewährt, im Verhältniss $\frac{1}{0{\cdot}82} : 1 = 1{\cdot}22 : 1$ fester, als die einfache Vernietung; die doppelte Vernietung erfordert jedoch etwas stärkere Bolzen als die einfache, denn für die Annahme $\frac{d}{\delta} = 2$ haben wir gefunden $\frac{d_1}{\delta} = 2{\cdot}26$ und diese stärkeren Nieten verursachen etwas mehr Arbeit. Für wichtige Verbindungen verdient daher die doppelte Vernietung den Vorzug.

Die Bandvernietung. Fig. 7 und 8, Tafel VII. Bandvernietung wollen wir eine Vernietung nennen, bei welcher die Bleche stumpf an einander gestossen und mit einem längs der Stossfuge hinlaufenden Blechband vernietet werden. Bei dieser Vernietung bildet demnach die eine Seite der Verbindung eine continuirlich fortlaufende Ebene, was in vielen Fällen wünschenswerth oder nothwendig ist. Werden die beiden Bleche durch die auf sie einwirkenden Kräfte auseinander gezerrt, Fig. 7, so ist klar, dass jede der beiden Nietreihen nach der Regel construirt werden muss, welche wir für die einfache Vernietung aufgestellt haben, dass also im Ganzen diese Bandvernietung zwei mal so viel Nieten erfordert, als eine einfache Vernietung, daher nicht angewendet werden soll, ausgenommen dann, wenn die eine Seite der Verbindung eine fortlaufende Ebene darbieten soll.

Wenn dagegen die beiden Bleche durch die auf sie einwirkenden Kräfte nicht auseinander gezerrt, sondern wie in Fig. 8, Tafel VII., angedeutet ist, gegen einander gepresst werden, kann diese Bandvernietung allerdings sehr zweckmässig werden, weil in diesem Falle die Nieten durch die auf die Bleche einwirkenden Kräfte gar nicht affizirt werden; man kann daher in diesem Fall mit wenigen und schwachen Bolzen vollkommen ausreichen, und es genügt jedenfalls, wenn man die Bolzendistanz doppelt so gross nimmt, als bei

einer einfachen Vernietung. Ich stelle daher für eine solche Bandvernietung, bei welcher die Bleche gegen einander gedrückt werden, die Regel auf:

Durchmesser eines Bolzens $= 1\cdot5\ \delta$

Entfernung zweier Bolzen in einer Bolzenreihe . . $= 10\ \delta$

Diese Bandvernietung wird unter anderen in den Wandconstruktionen der Dampfschiffe angewendet, was auch ganz angemessen ist, weil da die Bleche gegen einander gedrückt werden.

Die Kettenvernietung Fig. 9, Tafel VII. Kettenvernietung wollen wir eine Vernietung nennen, bei welcher die beiden Bleche stumpf aneinander gestossen und gegen zwei längs der Stossfuge herlaufende Blechbänder genietet werden. Jeder Bolzen widersteht hier mit zweien seiner Querschnitte gegen das Abscheeren, daher erhält man zur Bestimmung der Dimensionen dieser Vernietung dieselben Gleichungen, welche für die doppelte Vernietung aufgestellt wurden. Diese Kettenvernietung ist also eben so fest und braucht eben so viel (jedoch längere) Nieten, als die doppelte Vernietung, ist daher dieser letzteren (wegen der Bolzenlänge und vieler Durchlochungen) nicht vorzuziehen.

Für den Fall, dass die Kräfte die Bleche nicht auseinander zerren, sondern gegen einander drücken, ist der einfachen Bandvernietung der Vorzug zu geben.

Leichte Vernietungen. Leichte Vernietungen wollen wir solche nennen, bei welchen die Nieten nicht gegen eine Verschiebung zu schützen, sondern nur die zu verbindenden Theile zusammen zu halten haben. Oder mit anderen Worten solche Verbindungen, bei welchen die Nieten gar nicht oder nur sehr wenig dem Abscheeren ausgesetzt sind. Derlei Vernietungen kommen sehr viele vor. So z. B. bei den Blechträgern, von welchen später die Rede sein wird, die Verbindung der Winkeleisen mit dem Bleche. Bei diesen leichten Vernietungen können ziemlich dünne und weitgestellte Nieten angewendet werden. Durch eine Vergleichung von ausgeführten Vernietungen dieser Art habe ich gefunden, dass man für dieselben die Regel aufstellen darf:

Durchmesser eines Nietbolzens $d = 1\cdot5\ \delta$

Entfernung zweier unmittelbar auf einander folgenden Nieten $e = 10\ \delta$

Winkeleisen

werden gewalzte schmiedeeiserne Schienen von 3 bis 4 Meter Länge genannt, deren Querschnitt entweder rechtwinkelig, Fig. 10, Tafel VII., oder T-förmig, Fig. 11, ist.

Sie dienen zu den mannigfaltigsten Blechconstruktionen; zu Wandverstärkungen, Aussteifungen, Kanten- und Eckenbildungen etc. Die Querschnittsdimensionen dieser Winkeleisen richten sich im Allgemeinen nach der Dicke der Bleche, gegen welche sie genietet werden. Die Querschnitte der starken und leichten Winkeleisen sind jedoch nicht geometrisch ähnlich, sondern es ist immer die Schenkellänge h bei leichtem Eisen verhältnissmässig grösser als bei starkem.

Durch eine Vergleichung der Eisen, wie sie im Gebrauch sind, haben sich zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen folgende empirische Regeln heraus gestellt:

1) Δ Mittlere Dicke des Winkeleisens, Fig. 10, gleich der Dicke des Bleches, mit welchem das Eisen vernietet werden soll.

2) Kleinste Dicke des Eisens an den Enden der Schenkel $\frac{6}{7}\,\Delta$.

3) Grösste Dicke des Eisens an den Winkelkanten gemessen $= \frac{8}{7}\,\Delta$.

4) h Länge eines Winkelschenkels $h = 2{\cdot}4 + 4{\cdot}5\,\Delta$ Centimeter.

für	$\Delta = 0{\cdot}4$	0·5	0·6	0·7	0·8	0·9	1·0
wird	$h = 4{\cdot}2$	4·65	5·10	5·55	6·00	6·45	6·9

Beispiele über Vernietungen.

Tafel IX. der Resultate für den Maschinenbau.

a) Flächenerweiterungen:

Fig. 1. einfache Vernietung mit Ueberplattung,

Fig. 2. doppelte Vernietung mit Ueberplattung,

Fig. 3. Bandvernietung,

Fig. 12. Kettenvernietung,

Fig. 4. Flächenerweiterung mit drei Blechtafeln. Das mittlere Blech muss an den Ecken zugeschärft und etwas ausgebreitet werden, das obere Blech muss dagegen aufgebogen werden. Eine Niete geht durch alle drei Bleche, die übrigen Nieten nur durch zwei Bleche,

Fig. 5. Flächenerweiterung durch vier Blechtafeln. Man sieht im Grundriss die Uebereinanderlagerung der Bleche, m und m_{1} liegen aneinander stossend auf dem untersten Blech u, o deckt die beiden Bleche m und m_{1}, die Nieten n und n_{1} gehen durch drei Bleche, die übrigen Nieten nur durch zwei,

b) Wandverstärkungen:

Wandaussteifung durch Winkeleisen,

Zusammenhängung zweier Wände vermittelst eines durch dieselben geschraubten und vernieteten Bolzens,

Zusammenhängung zweier Wände vermittelst eines Schraubenbolzens und einer aussteifenden Röhre.

c) Kantenbildungen:

Fig. 6. Kantenbildung vermittelst eines Bleches mit umgebogenem Rande und einem zweiten ebenen Bleche,

Fig. 8. Kantenbildung vermittelst eines Bleches mit umgebogenem Rande und einem zweiten ebenen Bleche.

d) Eckenbildungen:

Fig. 9 und 10. Eckbildungen vermittelst Winkeleisen und Blechplatten.

Zapfen.

Bei den Zapfen ist zu beachten: 1) ihre Form, 2) die Dimensionen, welche eine genügende Festigkeit zu gewähren vermögen, 3) der Reibungswiderstand, 4) das Abnützen und Warmlaufen, das bei schneller Bewegung eintreten kann.

Die Form der Zapfen ist fast immer eine cylindrische und nur ausnahmsweise kugelförmig. Damit eine mit zwei cylindrischen Zapfen versehene Welle als Drehungsaxe für einen Körper dienen kann, müssen die beiden Zapfen so gebildet sein, dass die geometrischen Axen ihrer cylindrischen Formen in einer und derselben geraden Linie liegen; eine Bedingung, die man leicht erfüllen kann, wenn man die Welle zwischen die Spitzen einer Drehbank spannt und hierauf die Zapfen andreht.

Festigkeit. Ein Zapfen ist jederzeit auf relative Festigkeit und nie auf Torsion in Anspruch genommen. Dadurch unterscheidet er sich von einem Wellenhals, der ebenfalls eine cylindrische Form erhält, dagegen jederzeit auf Torsion in Anspruch genommen ist. Die Festigkeit eines Zapfens kann ohne Schwierigkeit richtig be-

urtheilt werden, wenn derselbe nur einem ruhig wirkenden constanten Druck ausgesetzt ist. Setzen wir dies voraus und nennen wir Fig. 12, Tafel VII.:

P den nach der Länge des Zapfens hin gleichförmig vertheilten Druck des Lagers gegen den Zapfen,

d den Durchmesser, l die Länge des Zapfens,

$\mathfrak{S}$ die grösste Spannungsintensität, welche im Zapfen an der Befestigungsstelle bei a vorkommt,

so ist $P \frac{l}{2}$ das statische Moment der Kraft, welche den Zapfen bei a abzubrechen strebt, andererseits ist aber $\mathfrak{S} \frac{\pi}{32} d^3$ die Summe der statischen Momente aller im Querschnitt bei a vorkommenden Spannungen und Pressungen. Man hat daher:

$$P \frac{l}{2} = \mathfrak{S} \frac{\pi}{32} d^3$$

und daraus folgt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\mathfrak{S} \pi}} \sqrt[3]{P l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

oder auch:

$$d = \sqrt[2]{\frac{16}{\mathfrak{S} \pi} \left(\frac{l}{d}\right)} \sqrt[2]{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Durch die erste dieser Gleichungen wird der Durchmesser des Zapfens bestimmt, wenn nebst dem Druck P auch die Länge des Zapfens von vornherein gegeben ist.

Durch die zweite dieser Gleichungen hingegen findet man den Zapfendurchmesser, wenn nebst dem Druck P das Verhältniss zwischen der Länge l und dem Durchmesser d gegeben ist. Durch die Gleichung (1) könnte man zu der Meinung veranlasst werden, dass der Zapfendurchmesser beliebig klein gemacht werden dürfte, wenn nur die Zapfenlänge sehr klein angenommen würde. Dies ist aber ein Irrthum. Wir verlangen, dass der Zapfen der Einwirkung der Kraft in jeder Hinsicht hinreichenden Widerstand entgegen setze, er darf also nicht nur nicht abbrechen (eine Bedingung, die durch die Gleichung (1) oder (2) ausgedrückt wird), sondern er darf auch durch die Kraft P an der Wurzel nicht abgescheert werden, und dies erfordert die Erfüllung einer Bedingung, die wir erst noch ausdrücken müssen.

Nennen wir $\mathfrak{S}_1$ die Intensität der Abschiebungskraft im Querschnitt bei a, so ist zu setzen:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \mathfrak{S}_1 = P$$

demnach

$$d = \sqrt{\frac{4\,P}{\pi\,\mathfrak{S}_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Damit also ein Zapfen sowohl dem Abbrechen als auch dem Abscheeren hinreichend Widerstand zu leisten vermag, muss man denselben gleich machen dem grössten der beiden Werthe, welche die Gleichungen (2) und (3) für d geben. Fallen die Werthe, welche diese beiden Gleichungen für d liefern, gleich gross aus, so bestimmen dieselben einen Zapfen, für welchen das Abbrechen und Abscheeren gleich wahrscheinlich ist. Dies ist also der Fall, wenn:

$$d = \sqrt[2]{\frac{16}{\mathfrak{S}\,\pi}\,\frac{l}{d}}\,\sqrt[2]{P} = \sqrt[2]{\frac{4\,P}{\pi\,\mathfrak{S}_1}}$$

oder wenn

$$\frac{l}{d} = \frac{\mathfrak{S}}{4\,\mathfrak{S}_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Für Schmiedeeisen ist der Bruchcoeffizient von dem Abscheerungscoeffizienten beinahe nicht verschieden, kann also annähernd $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ gesetzt werden, und dann folgt aus (4):

$$\frac{l}{d} = \frac{1}{4}$$

Wenn also die Zapfenlänge nur den vierten Theil des Durchmessers beträgt, so ist ein solcher Zapfen gegen das Abbrechen so fest, wie gegen das Abscheeren. In allen Anwendungen muss aber die Zapfenlänge bedeutend grösser genommen werden, als $\frac{1}{4}$ d, werden also jederzeit Zapfen verlangt, die eher abgebrochen als abgescheert werden könnten, muss man daher die Zapfendurchmesser nach den Formeln (1) und (2) und nicht nach der Formel (3) bestimmen.

Allein diese Gleichung lässt das Verhältniss $\frac{l}{d}$ unbestimmt, und diese Unbestimmtheit kann nun benutzt werden, um den anderweitigen Bedingungen zu genügen, denen ein Zapfen entsprechen soll.

Für die Reibung ist es vortheilhaft, wenn der Zapfendurchmesser sehr klein ausfällt, für das Abnutzen und Warmlaufen ist dagegen ein grosser Durchmesser und eine grosse Länge günstig. Da sich diese Bedingungen widersprechen, so ist es wohl am zweckmässigsten,

wenn man zur Bestimmung der Zapfendimensionen zweierlei Regeln aufstellt, nämlich 1) Regeln für Zapfen, bei welchen ein Warmlaufen nicht zu befürchten ist, die sich also nur mit mässiger Geschwindigkeit bewegen, und 2) Regeln für solche Zapfen, bei welchen eine rasche Abnutzung, so wie ein Warmlaufen leicht entstehen könnte, die sich also mit beträchtlicher Geschwindigkeit bewegen.

Praktische Regeln zur Bestimmung der Dimensionen gewöhnlicher Zapfen aus Gußeisen. Durch eine Vergleichung der Dimensionen von gewöhnlichen Gusseisenzapfen hat sich ergeben, dass bei denselben das Verhältniss $\frac{l}{d}$ zwischen Länge und Durchmesser nur wenig veränderlich ist. Es hat sich nämlich für diese Zapfen die empirische Regel heraus gestellt:

$$\frac{l}{d} = 1{\cdot}21 + \frac{0{\cdot}87}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ferner hat eine Untersuchung über gusseiserne Wasserradzapfen gezeigt, dass man

$$\sqrt[2]{\frac{16}{\mathfrak{S}\,\pi}\left(\frac{l}{d}\right)} = 0{\cdot}18 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

demnach

$$d = 0{\cdot}18\,\sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

setzen dürfe. Eliminirt man aus (5) und (6) $\frac{l}{d}$ und sucht hiernach $\mathfrak{S}$ so findet man:

$$\mathfrak{S} = 190 + \frac{136}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Die Gleichung (7) bestimmt den Durchmesser, die Gleichung (5) bestimmt hierauf die Länge und vermittelst (8) kann man die Spannungsintensität $\mathfrak{S}$ berechnen.

Für	$d =$	10	20	30
wird	$\mathfrak{S} =$	204	197	195

Da der Bruchcoefficient für Gusseisen 3000 beträgt, so sind die nach dieser Regel bestimmten Zapfen nur auf den $\frac{3000}{200} = 15$ten Theil ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen.

Praktische Regeln für gewöhnliche Schmiedeeisenzapfen. Durch eine ähnliche Vergleichung der gewöhnlichen Schmiedeeisenzapfen hat sich ergeben, dass man setzen dürfe:

$$\frac{l}{d} = 1{\cdot}21 + \frac{0{\cdot}87}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\sqrt[2]{\frac{16}{\mathfrak{S}\,\pi}\,\frac{l}{d}} = 0{\cdot}12 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$d = 0{\cdot}12\,\sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Aus (9) und (10) folgt durch Elimination von $\frac{l}{d}$:

$$\mathfrak{S} = 428 + \frac{308}{d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12$$

Für $d = 10$ findet man $\mathfrak{S} = 459$ und da der Bruchcoeffizient für gutes dünnes Schmiedeeisen 7000 ist, so sind diese Zapfen auf den $\frac{7000}{459} = 15^{\text{ten}}$ Theil ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen.

Stahlzapfen. Ausnahmsweise werden Zapfen von Gussstahl angewendet, z. B. bei Lokomotiven. Für derlei Zapfen hat sich gezeigt, dass man nehmen darf:

$$\frac{l}{d} = \frac{5}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\sqrt[2]{\frac{16}{\mathfrak{S}\,\pi}\,\frac{l}{d}} = 0{\cdot}09 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$d = 0{\cdot}09\,\sqrt{P} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Aus (13) und (14) folgt $\mathfrak{S} = 800$. Da der Bruchcoeffizient für Gussstahl durchschnittlich 16000 beträgt, so sind diese Zapfen auf den $\frac{16000}{800} = 20^{\text{ten}}$ Theil ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen.

Regeln für schnell laufende Zapfen. Damit ein schnell laufender Zapfen im Gebrauch nicht merklich abgenutzt wird und sich auch nicht leicht warm läuft, darf die Intensität des Druckes zwischen Lager und Zapfen eine gewisse Grösse nicht überschreiten, und diese Grösse soll naturgemäss mit der Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens

abnehmen. Jene Intensität kann dem Quotienten $\frac{P}{d\,l}$ proportional gesetzt werden, und es scheint daher der Natur der Sache angemessen zu sein, wenn man setzt:

$$\frac{P}{d\,l} = \frac{1}{a + b\,n\,d} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

wobei a und b constante durch Erfahrung zu bestimmende Zahlen sind und n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute bedeutet. Diese Gleichung in Verbindung mit der früher aufgestellten (2) bestimmen zusammen sowohl den Durchmesser als auch die Länge des Zapfens in der Weise, dass sowohl der Bedingung wegen der Festigkeit, als auch der Bedingung wegen des Warmlaufens entsprochen wird. Man findet aus diesen Gleichungen:

$$d^2 = P \sqrt{\frac{16}{\mathfrak{S}\,\pi}\,(a + b\,n\,d)} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

$$l = \frac{P}{d}\,(a + b\,n\,d) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

Für einen Zapfen, der sich nicht dreht, sondern nur eine Last trägt, ist $n = 0$ und darf man $l = d$ setzen. Für diese Annahmen folgt aus (17) und (18):

$$a = \frac{16}{\mathfrak{S}\,\pi}$$

Setzen wir $\mathfrak{S} = 300$, so wird:

$$a = \frac{16}{300 \times 3{\cdot}14} = 0{\cdot}017 \quad \dots\dots \quad (19)$$

Der Erfahrung zufolge dürfen wir ferner annehmen, dass ein Zapfen, der in einer Minute $n = 360$ Umdrehungen macht und mit $P = 2000$ Kilogramme belastet ist, zweimal so lang als dick gemacht werden darf oder dass für

$$n = 360 \text{ und } P = 2000, \quad \frac{l}{d} = 2$$

zu setzen ist. Für diese Annahmen folgt zunächst aus (2):

$$d = \sqrt{\frac{16 \times 2}{300 \times 3{\cdot}14}\,2000} = 8{\cdot}4$$

und dann folgt aus (18):

$$b = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{P} - \frac{a}{d}\right) = \frac{1}{360}\left(\frac{16 \cdot 8}{2000} - \frac{0 \cdot 017}{8 \cdot 4}\right) = 0 \cdot 0000177 \quad . \quad (20)$$

Hiermit sind nun für a und b angemessene Werthe erfahrungsgemäss bestimmt und man kann nun vermittelst (17) und 18) die Dimensionen eines schnell laufenden Zapfens bestimmen.

Es sei z. B. $P = 1000$, $n = 600$, $\mathfrak{S} = 300$, so gibt die Formel (17):

$$d^2 = 1000 \sqrt{\frac{16}{300 \times 3 \cdot 14}\left(0\ 017 + 0\ 0000177 \times 600 \times d\right)}$$

Hieraus findet man durch Annäherung $d = 6$, und nun gibt die Gleichung (18):

$$l = \frac{1000}{6}\left(0 \cdot 017 + 0 \cdot 0000177 \times 600 \times 6\right) = 13$$

Diese Rechnung ist allerdings ziemlich umständlich. Die Tabelle Seite 280 der Resultate gibt ohne Rechnung die Dimensionen der Zapfen.

Zapfen an vertikal stehenden Wellen. Vertikal stehende Wellen werden an ihrem untern Ende mit einem Zapfen versehen, Fig. 13, Tafel VII., der in einen Topf aus Rothgussmetall gestellt wird. Der Druck der Grundfläche eines solchen Zapfens gegen den Boden des Topfes ist gleich dem Gewicht der ganzen vertikalen Welle und aller mit derselben verbundenen Räder oder sonstigen Maschinenbestandtheile. Um auch in diesem Falle das Warmlaufen oder Aufrauhen zu verhüten, darf die Intensität des Druckes zwischen der Grundfläche des Zapfens und der Bodenfläche des Topfes eine gewisse von der Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens abhängige Grenze nicht überschreiten. Versuchen wir auch auf diesen Fall die Grundsätze gelten zu lassen, nach welchen wir die Regeln für die Dimensionen von schnell laufenden liegenden Zapfen aufgestellt haben, so erhalten wir im vorliegenden Fall die Grundgleichung:

$$\frac{P}{d^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{a + b\, n\, d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wobei P den Totaldruck des Zapfens gegen den Boden des Topfes, n die Anzahl der Umdrehungen der Welle in einer Minute, d den Durchmesser des Zapfens bedeutet und die Constanten a und b die Werthe haben:

$$a = 0{\cdot}017$$

$$b = 0{\cdot}0000177$$

Nach meinen Untersuchungen beträgt die Intensität des Druckes $\left(\frac{P}{d^2 \frac{\pi}{4}}\right)$ bei den vertikal gestellten grossen Transmissionswellen, die durchschnittlich in einer Minute 120 Umdrehungen machen, 20 Kilogramme auf 1 Quadratcentimeter, und der Zapfendurchmesser ist gewöhnlich 16 Centimeter. Diese Daten entsprechen in der That sehr nahe der Gleichung (1), denn für

$$n = 120 \qquad d = 16 \qquad a = 0{\cdot}017 \qquad b = 0{\cdot}0000177$$

folgt aus derselben

$$\frac{P}{d^2 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{0{\cdot}017 + 0{\cdot}0000177 \times 120 \times 16} = 20 \text{ Kilogramme}$$

Wir dürfen also annehmen, dass die Gleichung (1) der Natur der Sache entspricht. Aus dieser Gleichung folgt, wenn man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{2\,b}{\pi} = 0{\cdot}0000112 \\ \beta &= \frac{a\,\pi}{b^2} = 170490000 \\ d &= \alpha\,P\,n\left(1 + \sqrt{1 + \frac{\beta}{P\,n^2}}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; , \quad (2)$$

setzt,

Für äusserst langsam gehende Zapfen ist n sehr klein und wird nach Formel (2):

$$d = \alpha \sqrt{\beta} \sqrt{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

oder wenn man für α und β die Werthe setzt:

$$d = 0{\cdot}14 \sqrt{P} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Für ausserordentlich schnell laufende und stark belastete Zapfen wird dagegen nach Formel (2):

$$d = 2\,\alpha\,P\,n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

(Resultate Seite 46 bis 48.)

Torsionswellen.

(Resultate Seite 48 bis 52.)

Erklärungen. Die von den Motoren entwickelten Effekte werden gewöhnlich durch Torsionswellen nach den arbeitenden Maschinen übertragen, und diese Wellen müssen so stark gemacht werden, dass sie sich unter der Einwirkung der Kräfte nicht merklich verändern. Die Regeln zur Bestimmung der Durchmesser dieser Torsionswellen richten sich nach den Anforderungen, welche man an das Verhalten solcher Wellen unter der Einwirkung der Kräfte stellen kann. Man kann verlangen, dass alle Wellen, die aus dem gleichen Material herzustellen sind, unter der Einwirkung der Kräfte gleich stark in Anspruch genommen werden sollen, oder man kann die Forderung stellen, dass der Torsionswinkel unabhängig von der Dicke der Wellen, dagegen der Wellenlänge proportional werden soll; man kann endlich auch verlangen, dass der Torsionswinkel eines Wellenstückes von einer bestimmten Länge einen gewissen gegebenen Werth haben soll. Wir wollen nun für jede dieser drei Anforderungen die Wellendurchmesser zu bestimmen suchen.

Torsionswellen von gleicher Festigkeit. Nennen wir:

R in Centimetern die Länge des Hebelarmes, an welchem die verwindende Kraft wirkt,

P die Kraft in Kilogrammen,

d den Durchmesser der Welle in Centimetern,

T die an der Oberfläche der Welle eintretende Spannungsintensität.

Wenn wir nun die Forderung stellen, dass alle aus dem gleichen Material bestehenden Wellen gleich stark in Anspruch genommen werden sollen, so muss für alle Wellen T ein und denselben constanten Werth haben. In der Lehre von der Torsionsfestigkeit haben wir Seite 57 gefunden:

$$P\,R = \frac{T\,\pi}{16}\,d^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

woraus folgt:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}}\;\sqrt[3]{P\,R} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Diese Gleichung bestimmt hiermit Wellen von gleicher Festigkeit, wenn wir für ein bestimmtes Material $\sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}}$ constant annehmen, und sie zeigt, dass diese Wellendurchmesser der Kubikwurzel aus dem Torsionsmoment P R proportional sind. Damit diese Wellen dem Torsionsmoment mit vollkommener Sicherheit widerstehen und

sich selbst nicht merklich verwinden, darf die Spannungsintensität T nur einen gewissen aliquoten Theil von dem Torsionscoeffizienten Tabelle Seite 95 betragen. Wie gross T zu nehmen ist, um Dimensionen zu erhalten, wie sie bei bewährten Construktionen vorkommen, werden wir später angeben.

Diese Formel (2) ist zur Berechnung der Wellendurchmesser wohl ganz geeignet, wenn die Kraft P und die Länge des Hebelarmes R, an welchem sie wirkt, direkt gegeben sind oder leicht aufgefunden werden können. Dies ist z. B. der Fall, wenn der Halbmesser eines Rades und die am Umfange desselben auf Drehung wirkende Kraft gegeben sind, denn dann ist P R das Torsionsmoment, welchem eine mit dem Rade verbundene Welle ausgesetzt ist. Allein wenn es sich um die Construktion einer Welle handelt, ist gewöhnlich nur der in Pferdekräften N ausgedrückte Effekt, welchen die Welle übertragen soll und die Anzahl n ihrer Umdrehungen in einer Minute gegeben. Man muss daher eine Formel aufzustellen suchen, welche den Werth von d direkt durch N und n angibt. Eine solche Formel ergibt sich auf folgende Weise: Denken wir uns, die Welle, deren Durchmesser bestimmt werden soll, sei mit einem Rade von einem Halbmesser R versehen und die am Umfang des Rades wirkende Kraft sei P, ferner die Geschwindigkeit, mit welcher sich ein Punkt am Umfange des Rades bewegt, wenn die Welle in einer Minute n Umdrehungen macht, v Meter, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} 75\ N = P\ v \\ v = \dfrac{2\ R\ \pi\ n}{100 \times 60} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Durch Elimination von v findet man aus diesen zwei Gleichungen:

$$P\ R = \frac{100 \times 60 \times 75}{2\ \pi} \frac{N}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Hiermit ist also das Torsionsmoment durch N und n ausgedrückt und wenn wir dasselbe in (2) einführen, erhalten wir:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\ T\ \pi^2}} \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Formel gibt Dimensionen, die mit gut ausgeführten Construktionen übereinstimmen, wenn man setzt:

a) für Schmiedeeisen

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\ T\ \pi^2}} = 12$$

b) für Gusseisen:

$$\sqrt[3]{\frac{16 \times 100 \times 60 \times 75}{2\,T\,\pi^2}} = 16$$

Hieraus ergeben sich für T folgende Werthe:

$$T \begin{cases} \text{für Schmiedeeisen} = 210 \\ \text{für Gusseisen} = 90 \end{cases}$$

Die Torsionscoeffizienten für diese beiden Eisensorten sind aber nach Tabelle Seite 95 beziehungsweise 7000 und 3000. Es sind demnach die Wellen in der Wirklichkeit in Anspruch genommen: Schmiedeeisen-Wellen auf den $\frac{7000}{210} = 33^{\text{sten}}$, Gusseisen-Wellen auf den $\frac{3000}{90} = 33^{\text{sten}}$ Theil ihrer wirklichen Torsionsfestigkeit, d. h. diese Wellen würden erst dann abgewunden werden, wenn auf dieselben ein Torsionsmoment einwirkte, das 33 mal grösser wäre, als jenes ist, dem sie in der That ausgesetzt sind. Für obige Werthe von T findet man:

$$\text{für Schmiedeeisen} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}} = 0{\cdot}29$$

$$\text{für Gusseisen} \quad \sqrt[3]{\frac{16}{T\,\pi}} = 0{\cdot}39$$

Mit diesen Zahlen werden nun die Formeln (2) und (5):

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}29 \sqrt[3]{P\,R} = 12 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ (Schmiedeeisen)} \\ d &= 0{\cdot}39 \sqrt[3]{P\,R} = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \text{ (Gusseisen)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Berechnen wir ferner den Torsionswinkel, welcher in den Wellen eintritt, die nach diesen Regeln bestimmt werden.

Wir haben in der Theorie der Torsion, Seite 60, für den Torsionswinkel Θ^0 folgenden Ausdruck gefunden:

$$\Theta^0 = 16 \, \frac{P\,R}{G} \, \frac{l}{d^4} \, \frac{360}{\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei l die Länge der Welle, G den Modulus der Elastizität des Materials für Torsion, Θ^0 den Torsionswinkel in Graden ausgedrückt,

bedeutet. Allein nach der Regel (2) ist $P R = \frac{d^3 T \pi}{16}$. Setzt man diesen Werth in (7), so folgt:

$$\Theta^0 = \frac{16 \times 360 \times T}{16 \pi G} \frac{1}{d} \quad \text{. (8)}$$

Nun ist zu setzen:

	T	G
für Schmiedeeisen	210	1000000
„ Gusseisen	90	400000

demnach wird:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für Schmiedeeisen} & \Theta^0 = \frac{1}{41} \frac{1}{d} \\ \text{„ Gusseisen} & \Theta^0 = \frac{1}{39} \frac{1}{d} \end{array}\right\} \quad \text{. (9)}$$

Die nach der Regel (6) bestimmten Wellen von gleicher Festigkeit haben demnach, wie die Gleichungen (9) zeigen, die Eigenschaft, dass bei denselben der Torsionswinkel gross ausfällt, wenn der Wellendurchmesser klein ist. Dieselben sind also zwar gleich fest, aber die schwachen verwinden sich mehr als die starken. Ist die Länge l ungefähr 40 mal grösser als der Durchmesser, so beträgt der Torsionswinkel nahe einen Grad.

Wellen von gleicher Elastizität. Legen wir uns nun die Aufgabe vor, die Wellendurchmesser in der Art zu bestimmen, dass der Torsionswinkel von der Wellendicke nicht abhängt, aber der Wellenlänge proportional wird.

Der Ausdruck (7) für den Torsionswinkel zeigt, dass derselbe die Form $\Theta = \alpha\, l$ annimmt, wenn

$$\alpha = 16 \frac{P R}{G d^4} \frac{360}{\pi^2} = \text{Const.} \quad \text{. (10)}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G \alpha \pi^2}} \sqrt[4]{P R} \quad \text{. (11)}$$

oder wenn wir vermittelst (4). Seite 136 $P R$ durch $\frac{N}{n}$ ausdrücken:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G \alpha \pi^2\, 2 \pi}} \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \text{. (12)}$$

Eine Vergleichung dieser Formeln (11) und (12) mit den Thatsachen der Wirklichkeit hat gezeigt, dass man setzen darf:

$$\text{für Schmiedeeisen} \quad \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G\, \alpha\, \pi^2\, 2\, \pi}} = 12$$

und daraus folgt, weil für dieses Material $G = 1000000$:

$$\alpha = \frac{1}{547} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

und dann wird

$$\sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G\, \alpha\, \pi^2}} = 0{\cdot}75$$

Wir erhalten demnach schliesslich

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}75 \sqrt[4]{P\, R} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \\ \Theta^0 &= \frac{1}{547} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Nach diesen Regeln erhalten wir also Wellen von gleicher Elastizität.

Der Form nach unterscheiden sich diese Ausdrücke für d von jenen (6), Seite 164, welche Wellen von gleicher Festigkeit bestimmen, nur dadurch, dass die vierten Wurzeln an die Stelle der dritten Wurzeln treten. Für $\frac{N}{n} = 1$ geben beide Regeln übereinstimmende Dimensionen. Ist dagegen $\frac{N}{n} > 1$ oder $\frac{N}{n} < 1$, so werden die gleich elastischen Wellen in ersterem Falle dünner, in letzterem Falle dicker als die Wellen von gleicher Festigkeit.

Wellen für einen gegebenen Torsionswinkel. Man kann endlich noch verlangen, dass der totale Torsionswinkel einer Welle von gegebener Länge einen bestimmten Werth haben soll. Für diese Forderung erhält man aus (7), Seite 164, zur Bestimmung des Durchmessers folgende Formel:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360}{G\, \pi^2}} \sqrt[4]{\frac{P\, R\, l}{\Theta^0}}$$

oder auch, wenn man $P\, R$ durch $\frac{N}{n}$ ausdrückt:

$$d = \sqrt[4]{\frac{16 \times 360 \times 100 \times 60 \times 75}{G \pi^2 2 \pi}} \sqrt[4]{\frac{N}{n} \frac{1}{\Theta^0}}$$

Setzt man $G = 1000000$, so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0{\cdot}156 \sqrt[4]{\dfrac{P R l}{\Theta^0}} \\ d = 2{\cdot}5 \sqrt[4]{\dfrac{N}{n} \dfrac{1}{\Theta^0}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots, \quad (15)$$

Axen-Construktionen.

(Resultate Seite 53 bis 55, Tafel X.)

Drehungsaxen, welche auf relative Festigkeit in Anspruch genommen sind.

Erklärungen. Um derlei Drehungsaxen zweckmässig zu construiren, muss man die Dimensionen und Formen derselben so zu bestimmen suchen, dass die Summe aus den Materialkosten und den Anfertigungskosten ein Minimum wird. Dies ist der Fall, wenn man einfache leicht ausführbare Formen wählt, die von den Körperformen von durchaus gleicher Festigkeit nur wenig abweichen. Man erhält solche Wellenformen, indem man die Dimensionen von einzelnen charakteristischen Querschnitten in der Weise bestimmt, dass die Welle in diesen Querschnitten gleich stark in Anspruch genommen ist und sodann diese Querschnitte durch einfache geeignete Uebergangsformen verbindet. Die folgenden Beispiele werden dieses Verfahren erklären.

Construction einer Balancieraxe. Es sei Fig. 1, Tafel VIII., eine Balancieraxe zu construiren.

Nennen wir:

2λ die ganze Länge der Axe,

$2 P$ den Druck des in der Mitte der Axe befindlichen Balanciers gegen die Axe,

d den Duchmesser } eines Zapfens der Axe,
l die Länge }

D den Durchmesser der Axe in der Mitte der Hülse,

so ist zunächst, wenn man das Gewicht der Axe gegen den Druck P vernachlässiget, P der Druck, welchem ein Zapfen ausgesetzt ist, und man hat daher für Schmiedeeisen zur Bestimmung von d und l die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{\cdot}12 \sqrt{P} \\ l &= 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\, d \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nun ist $P \frac{l}{2}$ das Kraftmoment, welches einen Zapfen an der Wurzel, $P\,\lambda$ das Kraftmoment, das die Welle in der Mitte abzubrechen strebt. Die Axe wird demnach an der Wurzel des Zapfens und in der Mitte gleich stark in Anspruch genommen, wenn

$$P \frac{l}{2} : P\,\lambda = d^3 : D^3$$

Hieraus folgt

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\frac{l}{2}}} = \sqrt[3]{\frac{2\,\lambda}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Man erhält also den mittleren Durchmesser D der Axe, indem man mit dem Zirkel abmisst, wie oft mal die Zapfenlänge l in der Länge $2\,\lambda$ der Axe enthalten ist, aus dieser Zahl die Kubikwurzel zieht und dieselbe mit dem Zapfendurchmesser d multiplizirt. Ist D bestimmt, so macht man $a\,a = a_1\,a_1 = \frac{5}{4}\,d$, $c\,c = \frac{5}{4}\,b\,b = \frac{5}{4}\,D$, zieht dann die geraden Linien $b\,a\,b\,a_1$ und verzeichnet noch das Rechteck $c\,c\,c_1\,c_1$, dessen Länge durch die Hülse des Balanciers gegeben sein muss. Die punktirten krummen Linien sind zwei kubische Parabeln, nach welchen die Welle geformt werden müsste, um in allen Querschnitten einerlei Festigkeit zu geben. Man sieht dass die einfache Annäherungsform nur einen sehr geringen Mehraufwand an Material erfordert, dagegen aber wegen der theils cylindrischen, theils konischen Formentheile viel leichter bearbeitet werden kann, als die Form nach kubischen Parabeln. Auch haben die geraden Formen ein gefälligeres Ansehen als die gekrümmten.

Construction einer Balancieraxe, wenn der Balancier nicht in der Mitte angebracht werden soll. Es sei wiederum Fig. 2, Tafel VIII.:

$2\,P$ der Druck des Balanciers gegen die Axe,

$\lambda\;\lambda_1$ die Entfernungen des Mittels des Balanciers von den Zapfenmitteln,

$d\;d_1\;\;l\;l_1$ die Durchmesser und Längen der Zapfen.

Vernachlässiget man das Gewicht der Axe, so sind die Pressungen, welchen die Zapfen ausgesetzt sind:

$$2\,P\,\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1} \qquad 2\,P\,\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1}$$

man hat daher nach Seite 158:

$$\left.\begin{array}{ll} d = 0{\cdot}12 \sqrt{2\,P \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}}, & l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\, d \\ d_1 = 0{\cdot}12 \sqrt{2\,P \frac{\lambda}{\lambda + \lambda_1}}, & l_1 = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\, d_1 \end{array}\right\} \quad . \; . \quad (3)$$

Zur Bestimmung des Durchmessers bei b b hat man hier:

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\frac{1}{2}\, l}} = \sqrt[3]{\frac{2\,\lambda}{l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Zur Verzeichnung hat man noch überdies:

$$a\,a = \frac{5}{4}\, d \quad a_1\, a_1 = \frac{5}{4}\, d_1 \qquad c\,c = \frac{5}{4}\, D \quad . \; . \; . \quad (5)$$

Die Länge des mittleren cylindrischen Theils wird durch die Länge der Hülse des Balanciers bestimmt.

Construction einer Wasserradwelle, die nur zu tragen hat. Es sei Fig. 3, Tafel VIII. eine Welle, die mit ihren Endzapfen in Lagern liegt und bei B und C durch gleich grosse Kräfte P und P belastet ist.

Vernachlässigen wir das Gewicht der Welle, das jederzeit im Verhältniss zur Belastung 2 P klein ausfällt, so ist der Druck, welchen ein Zapfen auszuhalten hat, P. Nehmen wir an, die Welle soll aus Gusseisen hergestellt werden, so haben wir zur Bestimmung der Zapfendimensionen vermöge der Seite 157 aufgestellten Regel:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0{\cdot}18 \sqrt{P} \\ l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\, d \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Die Theile der Welle von A bis B und von D bis C hin sind nach dem Gesetz der kubischen Parabel zu verstärken und man findet für die Durchmesser der parabolischen Körper bei B und C:

$$b\,b = D = d \sqrt[3]{\frac{c}{\frac{1}{2}\, l}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Das statische Moment der Kraft, welches die Welle bei B abzubrechen strebt, ist P c, das analoge Moment in Bezug auf irgend

einen Querschnitt m n zwischen B und C ist, wenn man das Gewicht der Welle vernachlässiget:

$$P x - P (x - c) = P c$$

Es haben mithin alle Querschnitte des Wellenstückes von B bis C gleich grossen Momenten zu widerstehen. Nimmt man an, dass auch im mittleren Theile B C der Welle alle Querschnitte kreisförmig sein sollen, so erhält dieser Theil in allen Querschnitten einerlei Festigkeit, wenn derselbe einfach cylindrisch gemacht wird und überall einen Durchmesser gleich D erhält.

Diese cylindrische Form ist zwar wegen ihrer leichten Ausführung zweckmässig, wenn D nicht grösser als ungefähr 16 Centimeter ausfällt. Sollte aber D grösser ausfallen, so ist eine Querschnittsform vorzuziehen, welche im Verhältniss zum Querschnitt eine grössere Umfangslänge darbietet, weil in diesem Falle unganze Stellen im Guss weniger zu befürchten sind. Bei starken cylindrischen Formen entstehen nämlich sehr oft innere Lücken oder unganze Stellen, weil zuerst das Eisen an der Oberfläche erstarrt, und wenn sich dann der innere Theil beim Erstarren zusammenzieht, das vorhandene Material nicht ausreicht um den Raum auszufüllen, wodurch die unganzen Stellen hervorgebracht werden.

Wir wollen daher für den Querschnitt in der Mitte der Welle die Kreuzform Fig. 4 oder 5, Tafel VIII. wählen. Um eine Welle von angemessener Festigkeit und zugleich von gefälliger Form zu erhalten, ist es zweckmässig, h nach dem Gefühl anzunehmen und b zu berechnen. Da der Querschnitt in der Mitte und der Querschnitt bei B gleich grossen Momenten zu widerstehen haben, so muss der Werth von E für den runden Querschnitt bei B gleich sein dem Werth von E für den Kreuz-Querschnitt in der Mitte. Man hat daher:

$$\frac{D^3 \pi}{32} = \frac{1}{6 h} \left[h b^3 + b (h^3 - b^3) \right] \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

aus welcher Gleichung b bestimmt werden kann. Da sowohl $h b^3$ als auch b^4 gegen $b h^3$ klein ist, so kann man, wenn man sich mit einer Annäherung begnügt, $h b^3$ und b^4 gegen $b h^3$ vernachlässigen und dann erhalten wir:

$$\frac{D^3 \pi}{32} = \frac{1}{6} b h^2$$

folglich:

$$b = D \frac{6 \pi}{32} \left(\frac{D}{h} \right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Hat man auf diese Weise die Dimensionen des Querschnittes in der Mitte der Welle berechnet und die Verzeichnung bewerkstelligt, so kommt es noch darauf an, eine geeignete Uebergangsform von der Mitte aus nach B und C hin ausfindig zu machen.

Fig. 4 und 5 zeigen zwei solche Uebergangsformen. Bei der ersteren dieser Formen ist die Dicke der Höhennerve constant, die Höhe variabel, und an der Axe der Welle ist ein von der Mitte an nach den Enden hin verstärkter runder Kern angebracht; bei der zweiten Form ist kein solcher Kern vorhanden, nimmt dagegen die Nervenbreite von der Mitte an nach den Enden hin zu.

Wellen, die sowohl auf Torsion als auch auf relative Festigkeit in Anspruch genommen sind. Wenn ein Wellentheil sowohl drehend als auch biegend wirkenden Kräften ausgesetzt ist, würde man eine rationelle Regel zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen erhalten, wenn man eine Formel ableitete, welche die Resultirende aus den partikularen Spannungsintensitäten ausdrückt. Allein diese Rechnungsweise führt zu Weitläufigkeiten, es ist daher angemessener, sich mit Annäherungen zu begnügen.

Nimmt man an, dass eine Verwindung die relative Festigkeit, und dass eine Biegung die Torsionsfestigkeit nicht merklich verändere, so kann man zur Bestimmung der Querschnittsdimensionen in der Weise verfahren, indem man berechnet, wie gross diese Dimensionen sein müssten, um nur allein dem Torsionsmoment hinreichend widerstehen zu können, dann aber auch berechnet, wie gross dieselben sein müssten, um dem Biegungsmoment hinreichenden Widerstand leisten zu können und zuletzt für die Ausführung die grössere von den so gefundenen Dimensionen anwendet. Diese Regel ist wohl ganz gut zulässig, wenn die beiden Kräftemomente sehr verschieden sind, sie wird jedoch bedenklich, wenn die Kräftemomente ungefähr gleich gross sind.

Ganz sicher lassen sich die Dimensionen bestimmen, wenn man zuerst eine Welle berechnet, die dem Torsionsmoment entspricht und sodann eine Verstärkung anbringt, die für sich allein im Stande ist, gegen das Biegungsmoment zu schützen. Nach dieser Regel fallen jedoch die Dimensionen ziemlich stark aus, wenn die beiden Momente nur wenig von einander verschieden sind. Nach diesem dritten Verfahren ergibt sich folgende Regel.

Es sei:

N der Effekt in Pferdekräften, welchen ein Wellentheil überträgt,
n die Anzahl der Umdrehungen desselben in einer Minute,

d der Durchmesser einer runden Transmissionswelle für N Pferdekräfte und n Umdrehungen,

$\mathfrak{M}$ das Biegungsmoment, welchem ein bestimmter Querschnitt der Welle ausgesetzt ist (ausgedrückt in Kilogrammen und Centimetern),

h b die Dimensionen der Verstärkungsnerven Fig. 6, Tafel VIII., welche für sich allein dem Biegungsmoment hinreichend zu widerstehen im Stande sein sollen,

$\mathfrak{S}$ die Spannungsintensität, welche durch die Biegung entsteht,

so hat man zunächst:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

dann aber auch vermöge (Resultate Tafel V.):

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{S}}{6\,h} \left[(h^3 - d^3)\, b + (h - d)\, b^3\right]$$

Allein von den in den Klammern stehenden Gliedern kann das zweite gegen das erste vernachlässiget werden, und dann erhält man

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{S}}{6\,h}\, b\, (h^3 - d^3)$$

woraus folgt

$$b = \frac{6\,\mathfrak{M}\,h}{\mathfrak{S}\,(h^3 - d^3)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Für $\mathfrak{S}$ darf man hier wohl die Zahl 400 in Rechnung bringen, weil nach diesem Verfahren jedenfalls zu starke Dimensionen erhalten werden; auch dürfte man in (10) die Zahl 12 statt 16 setzen. Die Höhe h der Nerve kann nach dem Gefühl genommen werden. Die folgenden Beispiele werden die Anwendung dieser Regeln erklären.

Es sei Fig. 6 eine Wasserradwelle mit zwei Rosetten zu construiren und zwar für folgende Verhältnisse:

Nutzeffekt des Wasserrades	40 Pferdekraft.
Gewicht des Rades	20000 Kilogr.
Länge der Welle von Mittel zu Mittel der Zapfen gemessen	350 Centim.
Entfernung der Rosettenmittel von dem Zapfenmittel c =	50 „
Kraft, welche der mittlere Theil der Welle durch Torsion überträgt	20 Pferdekraft.
Umdrehungen des Rades in einer Minute	6

Für diese Daten findet man Folgendes:

Druck, welchen ein Zapfen auszuhalten hat 10000 Kilg.

Durchmesser eines Zapfens $0{\cdot}18\sqrt{1000}$ = 18 Centm.

Länge eines Zapfens $0{\cdot}87 + 1{\cdot}21 \times 18$ = 22 „

Durchmesser der Welle im Mittel der Rosette $18\sqrt[3]{\frac{50}{\frac{1}{2}\,22}}$ = 30 „

Durchmesser einer Transmissionswelle für 20 Pferdekräfte und 6 Umdrehungen in 1 Minute $d = 12\sqrt[3]{\frac{20}{6}}$ = 17 „

Höhe der Nerve in der Mitte h = 42 „

Zulässige Spannungsintensität $\mathfrak{S}$ = 400 Kilg.

Moment, welches die Welle zu brechen strebt $\mathfrak{M} = 10000 \times 50$ = 500000

Dicke der Nerve nach Formel (11)

$$b = \frac{6 \times 500000 \times 42}{400 \times (42^3 - 17^3)} \quad \ldots\ldots = 5 \text{ Centm.}$$

Es sei ferner Fig. 7 eine Wasserradwelle mit drei Rosetten zu construiren und zwar für folgende Daten:

Nutzeffekt des Rades in Pferdekräften = 30

Gewicht des Rades = 12000 Kilg.

Totale Länge der Welle von Zapfenmittel zu Zapfenmittel = 450 Cent.

Entfernung der äusseren Rosetten vom Zapfen . . = 50 „

Umdrehungen des Rades in 1 Minute = 8

Kraft, welche das Wellenstück B E durch Torsion überträgt = 10 Pfdk.

Kraft, welche das Wellenstück E C durch Torsion überträgt = 20 „

Dies vorausgesetzt findet man:

Druck auf einen Zapfen 6000 Kilg.

Durchmesser eines Zapfens $0{\cdot}18\sqrt{6000}$ = 14 Centm.

Länge eines Zapfens $0{\cdot}87 + 1{\cdot}21 \times 14$ = 18 „

Durchmesser b b der Welle bei B und C $14\sqrt[3]{\frac{50}{9}}$. . = 25 „

Durchmesser des runden Kernes des Wellenstückes E B:

$$d = 12\sqrt[3]{\frac{10}{8}} \quad \ldots\ldots\ldots = 13 \text{ „}$$

Durchmesser des runden Kernes des Wellenstückes E C:

$$d_1 = 12\sqrt[3]{\frac{20}{8}} \quad \ldots\ldots\ldots = 16 \text{ „}$$

Benimmt man sich bei der Berechnung des Momentes, welches die Welle in der Mitte abzubrechen strebt, so, wie wenn die Welle gewichtslos wäre und das Totalgewicht 12000 Kilogramme in den drei Punkten B E C auf die Welle wirkte, so ist:

$$\mathfrak{M} = 225 \times \frac{12000}{2} - (225 - 50)\frac{12000}{3} = 648000 \text{ Kilogrm.-Centm.}$$

Höhe der Nerve in der Mitte $h = 48$ Centimeter.
Dicke der Nerve nach Formel (11):

$$b = \frac{6 \times 648000 \times 48}{400 \times (48^3 - 13^3)} \quad . \; . \; . \quad = 4 \text{ Centimeter.}$$

Wellen-Kupplungen.

(Resultate Seite 56 und 57.)

Beschreibung mehrerer Kupplungen. Lange Wellen werden aus einzelnen Wellenstücken zusammengesetzt. Die zur Verbindung zweier Wellenstücke dienenden Körper werden Wellenkupplungen genannt.

Tafel IX. sind verschiedene Kupplungen dargestellt.

Fig. 1 ist eine Wellenkupplung einfachster Art. Die Wellen A und B sind einfach glatte Cylinder; durch ihre stumpf aneinander gestossenen Enden ist ein die Wellen zusammenhaltender Mitnehmer a gesteckt. Ueber das Ganze ist eine nach der Wellenrundung ausgebohrte Kupplungshülse b geschoben und mit einem zur Hälfte in der Wellenfläche, zur Hälfte in der Kupplungshülse liegenden Keil c eingetrieben.

Fig. 2 ist eine Kupplung mit halbcylindrischen Wellenenden. Die Kupplungshülse b ist durch einen zwischen die Kupplung und die Wellen eingetriebenen Keil c festgehalten.

Fig. 3. Bei dieser Kupplung sind an die Wellenenden Schraubengewinde angeschnitten und ist in der Kupplungshülse b ein Muttergewinde eingeschnitten. Die Gewinde in den beiden Wellen haben einerlei Richtung. Die Drehungsrichtung der treibenden Welle muss so sein, dass sich dabei die Welle in das Muttergewinde der Hülse hineinzuschrauben sucht. Um die Verbindung der Wellen mit Leichtigkeit herzustellen und aufheben zu können, muss das Gewinde an einer der beiden Wellen um etwas mehr als die halbe Länge der Kupplungshülse länger sein als an der andern Welle. Bringt man nämlich die Kupplung in die punktirt angedeutete Position, so ist die Verbindung der Wellen aufgehoben.

Fig. 4 ist eine Wellenkupplung, welche sich von der früher beschriebenen, in Fig. 2 dargestellten, im Wesentlichen nur dadurch

unterscheidet, dass der Durchmesser der halbcylindrischen Wellenenden grösser ist, als der Durchmesser der Welle selbst.

Fig. 5. Auslösbare Klauen-Kupplung.

Fig. 6 ist eine Verkupplung zweier Wellen vermittelst eines *Hook*'schen Schlüssels. $A A_1$ sind die zwei Wellenstücke, $B B_1$ zwei mit denselben verbundene gabelförmige Stücke, C ein mit vier Zapfen versehener Ring. Die Gabelenden von B umfassen die beiden Zapfen b und b, die Gabelenden von B_1 umfassen die Zapfen b_1 b_1. Es ist klar, dass bei dieser Verbindung jede Welle ihre Lage gegen die andere ändern kann, dass aber gleichwohl jede Welle die andere drehend mitnimmt.

Anwendbarkeit dieser Kupplungen. Es ist klar, dass diese Kupplung mit dem Hook'schen Schlüssel bei ganz sorgfältiger Ausführung den Anforderungen, welche man an eine Wellenkupplung stellen kann und zuweilen stellen muss, am besten entspricht, denn bei dieser Verbindung wird die drehende Bewegung von einem Wellenstück auf das andere stets zwanglos übertragen, ja selbst auch dann, wenn die beiden Wellenstücke ihre relative Lage gegen einander ändern sollten oder ändern müssten. Alle übrigen von den beschriebenen Kupplungen erfordern dagegen, weil sie steife Verbindungen veranlassen, eine sehr solide unveränderliche geradlinige Nacheinanderlagerung der Wellen. Leider ist der Hook'sche Schlüssel zu complizirt und zu kostspielig, um regelmässig angewendet werden zu können, daher ist diese Kupplung nur dann zu empfehlen, wenn eine sehr verlässliche Verbindung zweier Wellen herzustellen ist, die ihre relative Lage gegen einander sollen ändern können.

Die Kupplungen Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 eignen sich vorzugsweise für dünne schmiedeeiserne Wellen bis zu 12 Centimeter Durchmesser. Fig. 1 ist die einfachste, am wenigsten kostspielige Anordnung. Die Verbindung, welche sie gewährt, ist jedoch nicht besonders solide, denn der auf Torsion in Anspruch genommene mittlere Querschnitt des Mitnehmers ist nur $\frac{1}{3}$ vom Querschnitt der Welle, also bei weitem nicht so fest, als die Welle selbst. Eine bessere Verbindung gewährt die Kupplung Fig. 2, sie ist aber etwas kostspieliger als 1, denn die Herstellung der halbcylindrischen Wellenenden verursacht viele Arbeit. Noch besser ist die Kupplung Fig. 3 mit Verschraubung, sie kommt aber auch höher zu stehen, als die beiden vorhergehenden.

Die Kupplung Fig. 4 eignet sich für stärkere und insbesondere für starke gusseiserne Wellen. Sie gewährt eine sehr

feste Verbindung der Wellen und bei Gusseisen verursacht die etwas complizirtere Form nur eine unbedeutende Erhöhung der Anfertigungskosten.

Festigkeit. Die ganze Wellenkraftleitung einer grösseren Fabrik mit mehreren Stockwerken besteht gewöhnlich aus drei Theilen, nämlich 1) die äussere Leitung, welche die Kraft von der Kraftmaschine an in das Fabrikgebäude leitet; 2) die aufrechte Leitung, bestehend aus einem vertikalen Wellensystem, durch welches die Kraft in die verschiedenen Stockwerke geleitet wird; 3) die innere oder Zweigleitung, vermittelst welcher die Kraft in den Arbeitssälen nach den verschiedenen Kraftmaschinen geleitet wird. In der äusseren Kraftleitung übertragen gewöhnlich zwei durch eine Kupplung verbundene Wellenstücke gleich grosse Kräfte und haben deshalb gleiche Durchmesser. Die aufrechte Leitung besteht gewöhnlich aus so vielen Wellenstücken, als Stockwerke vorhanden sind, und jedes derselben gibt in der Regel einen Theil der empfangenen Kraft an eine Welle der Zweigleitung ab. Zwei zu verbindende Wellenstücke dieser aufrechten Leitung haben deshalb ungleiche Durchmesser. Aehnlich verhält es sich auch mit den Wellenstücken der Zweigleitung in den Arbeitssälen.

Allein die zu verbindenden Wellen mögen nun gleiche oder ungleiche Durchmesser haben, so werden doch die zu verbindenden Enden der beiden Wellenstücke ganz gleichen Torsionsmomenten zu widerstehen haben, es ist daher für die Festigkeit ganz genügend, wenn diese Wellenenden und wenn auch die Kupplung selbst Dimensionen erhalten, die dem in der getriebenen Welle wirksamen Torsionsmoment entsprechen, d. h. die ganze Kupplung soll nach dem Durchmesser der getriebenen Welle construirt werden.

Fig. 7, 8, 9 und 10 zeigen die Verkupplungen einer stärkeren treibenden Welle A mit einer schwächeren getriebenen Welle B. Man sieht dass sich diese Kupplungen von den früher erklärten für gleich dicke Wellen nur dadurch unterscheiden, dass die starke Dimension der treibenden Welle A bis an die Kupplung hinreicht.

Die Dimensionen der Kupplungshülse müssen so gewählt werden, dass eine sichere Verbindung bewerkstelligt werden kann und dass insbesondere die Hülsen durch das heftige Eintreiben des Keiles nicht gesprengt werden. Auf rationellem Wege lassen sich diese Abmessungen nicht bestimmen. Eine sorgfältige Vergleichung von gut construirten Kupplungen hat zu folgenden empirischen Regeln geführt:

Länge einer Kupplungshülse $l = 2{\cdot}7 + 1{\cdot}9\,d$

Metalldicke der Kupplungshülse $\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\,d$

Breite des Keiles , ... $k = 0{\cdot}9\,\delta$

Dicke des Keiles $h = \frac{1}{2}\,k$

wobei d den Durchmesser der getriebenen Welle bezeichnet.

Für die Anordnung Fig. 4 ist noch eine Regel nothwendig, um den Durchmesser d_1 des Kopfes zu bestimmen. Macht man

$$d_1 = d\sqrt[3]{2} = 1{\cdot}26\,d$$

so ist das Torsionswiderstands-Vermögen des halben Cylinders vom Durchmesser d_1 eben so gross, als das des ganzen Cylinders vom Durchmesser d.

Bei der Anordnung Fig. 1 ist es am besten, die Dimensionen des Mitnehmers so zu bestimmen, dass dessen Torsionsfestigkeit jener der beiden Kreisabschnitte an der Welle gleichkommt. Dies ist der Fall, wenn die Torsionsfestigkeit des Mitnehmers halb so gross ist, als jene der getriebenen Welle. Nennt man h die kleinere von den Querschnittsdimensionen des Mitnehmers, so hat man zu setzen:

$$\frac{d^2\,h^2}{3\sqrt{d^2+h^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{16}\,d^3$$

hieraus folgt:

$$\left(\frac{h}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{32}\right)^2\left[1+\sqrt{1+4\left(\frac{32}{3\pi}\right)^2}\,\right]$$

und man findet:

$$\frac{h}{d} = 0{\cdot}583$$

Seite 57 der Resultate für den Maschinenbau findet man eine Tabelle über die Dimensionen von Wellenkupplungen, die nach den oben aufgestellten Formeln berechnet wurden. Bei den kleineren Wellen ist immer für zwei derselben ein und dieselbe Kupplung angenommen, um auf diese Weise die Zahl der zur Herstellung erforderlichen Modelle möglichst zu vermindern.

Lager für Axen, Wellen und Zapfen.

(Resultate Seite 57 bis 60, Tafel XII., XIII., XIV.)

Die Form und Einrichtung der Zapfenlager richtet sich nach der Stärke der Wellen, nach ihrer Richtung, nach dem Ort, an welchem die Lager befestiget werden sollen, ob nämlich an einen Boden oder an eine Wand oder an eine Decke und noch nach mancherlei anderen Nebenumständen.

Die am häufigsten vorkommenden Formen sind auf den Tafeln XII., XIII., XIV. der Resultate für den Maschinenbau dargestellt.

Gewöhnliche Lager. Fig. 1, Tafel XII. der Resultate ist ein Zapfenlager für eine liegende Welle. Das Ganze besteht aus der Lagerplatte a, dem Lagerkörper b, dem Lagerdeckel c und den beiden Lagerschalen d d. Die Lagerplatte ist selbstständig nur vorhanden, wenn das Lager gegen ein Steinfundament oder gegen Balken zu befestigen ist. Soll diese Befestigung an ein Maschinengestelle oder an einen Lagerstuhl geschehen, so wird die Lagerplatte an das Gestell oder an den Stuhl gegossen. Im ersteren Falle wird die Lagerplatte mit zwei, bei grösseren Dimensionen mit vier Schrauben an das Fundament geschraubt. Je zwei Bestandtheile des ganzen Lagers sind an den Stellen, wo sie sich berühren, glatt bearbeitet, dabei ist aber beachtet, dass diese glatt zu bearbeitenden Flächen möglichst kleine Ausdehnungen haben. Die obere Fläche der Lagerplatte und die untere Fläche des Lagerkörpers berühren sich nur mit ihren glatt gearbeiteten Säumen und in der Mitte. Der Lagerdeckel ist in den Lagerkörper eingesenkt und beide berühren sich mit vertikalen Säumen. Die Lagerschalen berühren den Lagerkörper und den Lagerdeckel mit rundumlaufenden Säumen und zwar theils im Innern der Höhlung, theils an der äusseren Fläche. Platte, Körper und Deckel sind in der Art geformt, dass die Verbindungsschrauben nie auf Abschiebung, sondern nur auf absolute Festigkeit in Anspruch genommen sind. Desshalb ist der Lagerkörper zwischen zwei Leisten der Platte eingekeilt und ist ferner der Deckel in den Körper herabgesenkt. Eine solide Verschraubung ist übrigens nur bei solchen Lagern von Wichtigkeit, bei welchen die auf die Welle einwirkenden Kräfte nicht senkrecht gegen die Lagerplatte pressen. Insbesondere die Zapfenlager für Kurbelwellen erfordern eine sehr sorgfältige und solide Verschraubung, indem die Richtung, nach welcher diese

Wellen beim Umgang der Kurbel gegen die Schalen gepresst werden, veränderlich ist. Bei Balancier-Dampfmaschinen ist es von Wichtigkeit, die Verbindung der Lagerplatte mit dem Fundament, des Lagerkörpers mit der Lagerplatte und des Lagerdeckels mit dem Körper so fest zu machen, dass eine Trennung dieser vier Theile nicht eintritt, wenn die Welle durch die Kraft der Maschine vertikal aufwärts gegen den Deckel gepresst wird. Für diese ungünstigsten Verhältnisse müssen die Dimensionen der Schrauben und Platten bestimmt werden.

Die Formen und Abmessungen dieser Lager können selbstverständlich nur auf empirischem Wege durch das Gefühl für Formen und Verhältnisse gefunden werden.

Zur Auffindung verlässlicher Regeln für die Construktion der Zapfenlager wurde mit möglichster Sorgfalt ein ganz grosses Lager, eines von mittleren und eines von ganz kleinen Dimensionen in natürlicher Grösse aufgezeichnet, und hierauf durch Vergleichung dieser Zeichnungen die in denselben etwa verborgenen Regeln ausfindig zu machen gesucht. Auf diesem Wege wurde gefunden, 1) dass die Metalldicken der Lagerschalen für kleinere Wellen verhältnissmässig zum Durchmesser der Welle stärker genommen werden müssen, als bei stärkeren Wellen; 2) dass die eisernen Theile der Lager für grosse und kleine Wellen geometrisch ähnlich geformt werden dürfen. Für die Dimensionen der Lagerschalen haben sich folgende Regeln ergeben.

Länge einer Schale für Wellen oder Zapfen, die sich nur mit mässiger Geschwindigkeit bewegen, bei welchen also ein Warmlaufen nicht zu besorgen ist:

$$l = 0{\cdot}87 + 1{\cdot}21\, d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Metalldicke einer Lagerschale:

$$e = 0{\cdot}28 + 0{\cdot}07\, d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Aeusserer Durchmesser der Schale oder Durchmesser der Höhlung des Lagerkörpers und Lagerdeckels:

$$d_1 = 0{\cdot}69 + 1{\cdot}17\, d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Will man die Hälse und Zapfen von schnell laufenden Wellen nach den Seite 159 erklärten Grundsätzen und Regeln sehr lang machen, so braucht man nur allein die Lagerschale in der Weise wie Fig. 1 Tafel X. zeigt zu verlängern, das Lager selbst kann aber genau so gemacht werden, wie für eine Schale von normaler Länge.

Für die Verzeichnung aller eisernen Theile eines Lagers ist es am zweckmässigsten, eine ganz sorgfältige Normalzeichnung anzufertigen und in dieser alle wesentlichen Abmessungen in Zahlen anzugeben, dabei aber den Durchmesser d_1 der Höhlung oder den äusseren Durchmesser der Lagerschale als Einheit anzunehmen. Auch ist es angemessen, noch einen hunderttheiligen Maassstab hinzuzufügen, der ebenfalls für $d_1 = 1$ zu construiren ist. In Fig. 1, Tafel XII. der Resultate sind nur diejenigen Lagerdimensionen (bezogen auf $d_1 = 1$) angegeben, welche für Maschinenentwürfe zu wissen nothwendig sind. Wenn man nämlich alle Lager nach derlei festen Regeln construirt, braucht man in den Entwürfen die Lager selbst gar nicht auszuzeichnen, sondern es genügt, wenn die Lagerplatten und Verbindungsschrauben angegeben werden. Diese Hauptverhältnisse eines Lagers sind:

1) Höhe des Lagers, d. h. Höhe des Wellenmittels von der Ebene der Lagerplatte $0{\cdot}9\ d_1$
2) Länge der Lagerplatte zwischen den Leisten zur Einkeilung $3{\cdot}0\ d_1$
3) Breite der Lagerplatte $1{\cdot}0\ d_1$

Seite 59 der Resultate für den Maschinenbau findet man eine Tabelle für die Dimensionen der Lagerschalen, die nach den Regeln der Gleichungen (1), (2), (3) berechnet wurde.

Um die Anzahl der kostspieligen Lagermodelle möglichst zu vermindern, sind die Schalen so bestimmt, dass bei kleineren Wellen die äusseren Dimensionen der Schalen für zwei unmittelbar aufeinander folgende Wellen übereinstimmen. Auf diese Weise ist es möglich, für alle Wellen zwischen 3 und 30 Centimetern Durchmesser mit 19 Lagern auszureichen.

Fig. 2 und 3, Tafel XII. der Resultate sind Hängelager. Die Form Fig. 3 ist gefällig, das Modell dazu ist leicht anzufertigen und gut zu formen, allein diese Form verträgt nur einen Lagerkopf, muss also verlassen werden, wenn ein Hängelager für zwei oder drei Wellen herzustellen ist. In dieser Hinsicht verdient die Form Fig. 2 den Vorzug, weil bei derselben das untere achtseitige Prisma das Ansetzen mehrerer Lagerköpfe gestattet.

Fig. 1 bis 7, Tafel XIII. der Resultate ist ein Hängelager mit drei Lagerköpfen.

Eine detaillirte Beschreibung dieser Lager unterlasse ich; ein so complizirtes Formenwesen lässt sich mit Worten nicht wohl mit der nöthigen Bestimmtheit charakterisiren und die Zeichnungen sprechen deutlich genug.

Auch für die Schalen dieser Hängelager gelten die früher aufgestellten Regeln, so wie die Tabelle Seite 59 der Resultate für den Maschinenbau.

Die Detaildimensionen der Eisenkörper dürfen wie bei den Lagern für liegende Wellen auf den äusseren Durchmesser d_1 der Schale bezogen werden. Nur die Höhe des Lagers darf nicht dem d_1 proportional genommen werden, denn diese richtet sich nach dem Halbmesser der Rollen und Räder, die mit der Welle zu verbinden sind, und auch, wie wir später sehen werden, nach der Deckenconstruktion, an welche die Hängelager geschraubt werden. Diese Hängelager können gebraucht werden für Wellen bis zu 8 Centimeter Durchmesser. Stärkere Wellen über 8 Centimeter Durchmesser an Decken zu hängen ist nicht rathsam, weil sie zu steif sind, während eine Deckenconstruktion aus Holz immer mehr oder weniger biegsam ist und durch das im Holz mit der Zeit eintretende Werfen und Schwinden deformirt wird.

Fig. 4, Tafel XII. der Resultate ist ein Pfannentopf von einfachster Construktion für den Zapfen einer vertikal stehenden Welle. Diese Einrichtung ist genügend, wenn ein Warmlaufen nicht zu befürchten ist.

Lager mit Kugelschalen. Die im Vorhergehenden beschriebenen Lager haben den Nachtheil, dass sie gar nicht nachgiebig, sondern ganz steif sind.

Eine ganz fehlerfreie Aufstellung derselben zu bewirken und zu erhalten ist deshalb sehr schwierig und praktisch kaum möglich. Ein in derartige Lager gelegter Wellenstrang wird sich in denselben nur dann zwanglos bewegen, wenn alle geometrischen Axen aller Lagerhöhlungen in eine und dieselbe gerade Linie fallen; so wie also nur der geringste Fehler in der ersten Aufstellung eines solchen Lagers gemacht wird, oder wenn nachträglich eine Lagerplatte, wenn auch nur um ein Geringes aus ihrer richtigen Lage verrückt wird (was bei Hängelagern durch eine in der Decke eintretende Biegung und bei Fundamentlagern durch eine Senkung der Fundamentsteine so leicht geschehen kann), wird sogleich die gleichförmige Vertheilung des Druckes zwischen der Welle und der Lagerschale aufhören, was zur Folge hat, dass sich die reibenden Theile mehr oder weniger heftig angreifen und erwärmen.

Diese nachtheilige Steifheit der gewöhnlichen Lager kann man beseitigen, wenn man die Lagerschalen aussen kugelförmig bildet und die Lagerkörper innen entsprechend kugelförmig aushöhlt. Lager mit Kugelschalen hat zuerst *Bodmer* angewendet. Fig. 1, 2,

3, 4, Tafel XIV. (Resultate für den Maschinenbau) zeigt die Einrichtung eines solchen Lagers. Man sieht insbesondere durch Fig. 2 und 3, dass die Kugelformen nicht vollständig, sondern dass von denselben nur zwei schmale Zonen vorhanden sind. Eine vollständige Beweglichkeit kann auch mit cylindrischen Schalen erzielt werden, wenn man dieselben wie bei einem gewöhnlichen Lager mit dem Lagerkörper unveränderlich verbindet, die Lagerkörper hingegen vermittelst eines Hook'schen Schlüssels beweglich aufhängt. Allein diese Construktion ist noch viel complizirter und schwieriger auszuführen, als das Lager mit Kugelschalen.

Verbindet man die einzelnen Wellenstücke eines Wellenstranges vermittelst Hook'scher Schlüssel und legt ferner jedes Wellenstück in ein Lager, das entweder mit Kugelschalen versehen ist, oder in einem Hook'schen Schlüssel hängt, so entsteht ein Wellensystem, das im Stande ist, eine Kraft auch dann ganz zwanglos zu übertragen, wenn die Lager ihre relative Lage gegen einander innerhalb gewisser engen Grenzen beständig verändern. Eine solche Construktion, die man eine Wellenkette nennen kann, würde z. B. für die Schraubenaxe eines Schraubendampfschiffes vortreffliche Dienste zu leisten vermögen.

Das in Fig. 5, Tafel XIV. der Resultate dargestellte bewegliche Lager für vertikale Wellen wurde bereits in den Prinzipien Seite 190 beschrieben.

Lagerstühle.

(Resultate Tafel XVIII., XIX., XX.)

Der dauernd richtige Eingriff zweier oder mehrerer Räder erfordert eine unveränderliche relative Gegeneinander-Lagerung der Axen. Dies geschieht durch die sogenannten Lagerstühle, welche aus einem gusseisernen maschinengestellartigen Körper bestehen, der gegen ein Steinfundament oder gegen ein Balkenwerk, gegen eine Mauer oder Decke geschraubt wird, und mit welchem alle Axen- und Zapfenlager der auf unveränderliche Weise zu verbindenden Wellen befestigt werden. Tafel XVIII., XIX., XX. der Resultate des Maschinenbaues sind Darstellungen verschiedener Lagerstühle, wie sie namentlich bei Transmissionen vorkommen.

Tafel XVIII. ist ein Lagerstuhl für den Uebergang von einer liegenden Welle aus nach einer aufrecht stehenden. Der Stuhl selbst ist gegen ein starkes Quaderfundament geschraubt, das noch von einem Bruchsteinmauerwerk umgeben ist.

Tafel XIX., Fig. 1, 2, 3, sind drei Ansichten eines Lagerstuhles für den Fall, dass von einer längs einer Mauer aufsteigenden Welle aus auf eine zweite Welle übergegangen werden soll, deren Richtung senkrecht steht auf der Ebene der Mauer.

Tafel XIX., Fig. 4, 5, 6 sind drei Ansichten eines Lagerstuhls für den Fall, wenn von einer längs einer Mauer senkrecht aufsteigenden Welle aus auf zwei horizontale, zur Ebene der Mauer parallel laufende Wellen übergegangen werden soll.

Tafel XX., Fig. 1, 2, 3 sind drei Ansichten eines Lagerstuhles für den Fall, dass von einer Welle aus, deren Richtung gegen die Ebene einer Mauer senkrecht steht, auf drei andere zur Ebene der Mauer parallele Wellen übergegangen werden soll.

Tafel XX., Fig. 4, 5, 6 sind drei Ansichten eines Lagerstuhls für den Fall, dass von einer vertikalen Welle aus auf eine durch eine Wand gehende Welle übergegangen werden soll.

Jeder solche Stuhl ist eine Art Gehäuse aus durchbrochenen Platten, die zu einem Körper molekular verbunden sind. Verlegt man diese Platten ganz nach aussen, und durchbricht sie entweder gar nicht oder nur sehr wenig, so entstehen gefässartige Lagerstühle, die, weil sich die Wandungen wechselseitig unterstützen, eine grosse Festigkeit gewähren, und daher sehr empfohlen werden dürfen. Man muss sich jedoch hüten, krummflächige Wände anzufertigen, weil dieselben beträchtliche Modell- und Arbeitskosten verursachen.

Bei der Construktion von diesen Lagerstühlen kommt alles darauf an, dass man methodisch zu Werke gehe, weil sich dadurch das ganze Formengebilde gleichsam von selbst ergibt.

Wenn ein Stuhl für zwei Wellen zu construiren ist, verzeichnet man zuerst die Wellen, Zapfen und Räder und dann die Lagerplatten, wobei die Seite 180 angegebenen Regeln sorgfältig berücksichtigt werden müssen. Ist einmal das System der Lagerplatten dargestellt, so ergibt sich dann der Stuhl in der Regel sehr einfach, indem man diese Lagerplatten erweitert, Versteifungswände anbringt, und eine Rückwand oder Bodenplatte hinzufügt.

Ist dagegen ein Stuhl für mehr als zwei Wellen anzuordnen, so ist es vortheilhafter, zuerst die Wellen und Lagerplatten zu verzeichnen, sodann erst die Räder anzuordnen, und zwar so, dass sie so klein werden, als es nur immer zulässig ist. Ist auch dies geschehen, so ergibt sich der vollständige Stuhl wie im vorhergehenden Fall. Verfährt man auf diese Weise, so erhält man jederzeit eine wohlgeordnete Nebeneinander-Lagerung der Lagerplatten, und dadurch einen einfachen Stuhlbau. Verfährt man hingegen bei der

Construktion eines Stuhles für drei oder vier Wellen wie im Vorhergehenden für einen Stuhl zu zwei Wellen erklärt wurde, so kann es begegnen, dass der Raum zwischen den Rädern nicht hinreicht, die Lagerplatten in geordneter Weise anzubringen.

Bestimmtere Regeln lassen sich für derlei Construktionen nicht aufstellen und sind auch nicht nothwendig, so wie man sich einige Uebung im Construiren erworben hat, denn wenn einmal die Räder und die Lagerplatten verzeichnet sind, hat das Gefühl hinreichend sichere Leitung und Anhalt. Aber es ist gerade die Construktion dieser Lagerstühle die beste construktive Elementar-Uebung, die man nur machen kann, und jeder Anfänger wird wohl thun, sehr viele solche Stühle für die mannigfaltigsten Verhältnisse zu entwerfen. Das Beste ist, wenn man die Construktion mit Kreide in Naturgrösse auf schwarz gebeizten Holztafeln ausführt, weil man die Detaildimensionen am besten beurtheilen kann, wenn sie in natürlicher Grösse erscheinen. Anfänger construiren immer zu weitschichtig, und es dauert gewöhnlich lange, bis das Geschick sich einfindet, etwas in einem engen Raum concentrirt anzuordnen und doch Alles zugänglich zu machen.

Für aufrechte Wellen darf man in der Regel die Entfernung der Welle von der Wand 4 bis höchstens 5 mal so gross machen, als der Durchmesser der Welle beträgt.

Die Metalldicke Δ der Stuhlwände darf man nach folgender empirischen Regel bestimmen.

$$\Delta = 1 + 0{\cdot}07\ d$$

dann wird:

für d =	10	12	14	16	18	20 Centm.
Δ =	1·7	1·84	1·98	2·02	2·26	2·40 „

Wenn die Kraft vermittelst einer vertikal stehenden Welle durch ein aus mehreren Stockwerken bestehendes Fabrikgebäude in die Höhe geleitet werden soll, ist es zweckmässig, die Mauer, da wo die Welle aufzustellen ist, in allen Stockwerken gleich dick zu halten, indem auf diese Weise die Lagerstühle in allen Stockwerken von der Mauer gleich weit heraus reichen. Tafel XXX. der Resultate.

Rollen.

(Resultate Seite 60 bis 66, Tafel XV.)

Um von einer Axe nach einer andern Kraft und Bewegung zu übertragen, werden gewöhnlich entweder verzahnte Räder oder

Rollen mit Riemen angewendet. Diese Rollentriebe sind zwar nur zur Uebertragung von schwächern Kräften anwendbar, sie gewähren aber den Vortheil, dass die Entfernung der beiden Axen beträchtlich gross sein kann.

Ein Riemen vermag die Bewegung von einer Rolle nach einer andern nur dann zu übertragen, wenn derselbe an den Rollenumfängen durch Adhäsion oder Reibung anhaftet, und zwar so, dass der Riemen und die Rollenumfänge übereinstimmende Geschwindigkeiten erhalten. Ist dies der Fall, so verhalten sich die Umdrehungen, welche die beiden Axen in einerlei Zeit, z. B. in einer Minute machen, verkehrt, wie die Halbmesser der mit den Axen verbundenen Rollen, und die Bewegungsrichtungen der Axen stimmen überein oder sind einander entgegengesetzt, je nachdem die Riemenstücke zwischen den Rollen äussere oder innere (sich durchkreuzende) Tangenten an die Rollenumfänge bilden.

Riemenspannungen. Die Querschnittsdimensionen des Riemens, so wie auch sämmtliche Dimensionen der Rollen richten sich vorzugsweise nach der Spannung, die in dem Riemen herrschen muss, damit derselbe auf den Rollen nicht gleitet; wir müssen uns daher mit der Ausmittelung dieser Spannung beschäftigen.

Denken wir uns, dass um zwei Rollen ein Riemen geschlungen und sehr stark angespannt werde, so wird in der ganzen Ausdehnung des Riemens ein und dieselbe Spannung eintreten, so lange in den Axen keine auf Drehung wirkenden Kräfte und Widerstände einwirken. So wie aber in der treibenden Welle eine drehende Kraft und gleichzeitig in der getriebenen Welle ein der Drehung entgegengerichteter Widerstand einwirkt, treten sogleich in allen Querschnitten des Riemens Spannungsänderungen ein. Wirken Kraft und Widerstand nach den Richtungen, welche in Fig. 2, Tafel X. die Pfeile andeuten, so ist klar, dass in dem Riemenstück $a\,b$ eine starke, in dem Riemenstück $a_1\,b_1$ eine schwache Spannung entsteht, und dass von a nach a_1, so wie von b nach b_1 die Spannung nach einem gewissen Gesetz abnimmt. Nennt man $\mathfrak{T}$ die Spannung in $a\,b$ und $\mathfrak{T}_1$ die Spannung in $a_1\,b_1$, ferner P die auf den Umfang der Rolle A reduzirte treibende Kraft, so hat man sowohl für einen Ruhezustand wie für einen gleichförmigen beharrenden Bewegungszustand:

$$\mathfrak{T} = P + \mathfrak{T}_1$$

oder

$$P = \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1 \qquad (1)$$

Diese Gleichung ist richtig, wie gross auch die absoluten Spannungen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ sind, so lange die Rollen in dem Riemen nicht

glitschen. Diese Gleichung gilt also auch noch dann, wenn man die Riemenspannung so weit schwächt, dass die aus derselben entstehende Reibung zwischen dem Riemen und den Rollen gerade noch hinreicht, das Glitschen der Rollen zu verhindern. Diese schwächste Riemenspannung, welche noch im Stande ist, das Glitschen der Rollen zu verhindern, ist offenbar von einer solchen Grösse, dass die daraus entspringende Reibung der Kraft P oder dem eben so grossen Widerstand P gleich kommt. Wir wollen nun suchen, diese kleinsten Werthe von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$, bei welchen ein Glitschen noch nicht eintritt, zu berechnen.

Wenn wir die Riemenstücke zwischen der Rolle entzwei schneiden, und an die entstehenden Enden Kräfte anbringen, die gleich sind den Spannungen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$, welche vor dem Entzweischneiden vorhanden waren, so wird der Gleichgewichtszustand nicht gestört. In dem Riemenstück $a\,a_1$ Fig. 3, Tafel X., welches die Rolle A von a_1 bis a berührt, wächst die Spannung von a_1 an bis a hin von $\mathfrak{T}_1$ bis $\mathfrak{T}$. In irgend einem Querschnitt m wird eine Spannung S und in einem an m unendlich nahen Querschnitt n wird eine Spannung $S + d\,S$ vorhanden sein. Zerlegen wir jede dieser zwei Spannungen in zwei Seitenkräfte nach den Richtungen $p\,O$ und $q\,r$, wobei p den Durchschnittspunkt der Richtungen von S und $S + d\,S$ bedeutet, und $q\,r$ senkrecht auf $p\,O$ ist, und setzen wir

$$\widehat{m\,O\,a_1} = \varphi, \qquad \widehat{m\,O\,n} = d\,\varphi$$

so ist:

$$S \sin \frac{1}{2}\,d\,\varphi + (S + d\,S) \sin \frac{1}{2}\,d\,\varphi$$

die Kraft, mit welcher das Riemenelement $m\,n$ gegen die Rolle gedrückt wird, und

$$f\left[S \sin \frac{1}{2}\,d\,\varphi + (S + d\,S) \sin \frac{1}{2}\,d\,\varphi\right] \quad \ldots \quad (2)$$

die aus diesem Druck entspringende Reibung, wobei f den Reibungs-Coeffizienten bedeutet.

Dagegen ist:

$$(S + d\,S) \cos \frac{1}{2}\,d\,\varphi - S \cos \frac{1}{2}\,d\,\varphi \quad \ldots \quad (3)$$

die Kraft, mit welcher dieses Riemenstückchen nach der Richtung $p\,r$ gezogen wird. Wenn nun die Spannungen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ gerade nur so gross sind, dass ein Glitschen der Rolle noch verhindert wird, muss nothwendig die Kraft (3) dem Reibungswiderstand (2) gleich

sein. Für diese kleinsten Werthe von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_1$ besteht also die Gleichheit:

$$f\left[S \sin \frac{1}{2} d\varphi + (S + dS) \sin \frac{1}{2} d\varphi\right] =$$
$$(S + dS) \cos \frac{1}{2} d\varphi - S \cos \frac{1}{2} d\varphi$$

Allein weil dS und $d\varphi$ unendlich kleine Grössen sind, darf man setzen:

$$\sin \frac{1}{2} d\varphi = \frac{1}{2} d\varphi, \quad \cos \frac{1}{2} d\varphi = 1$$

und ist es ferner erlaubt, Glieder, welche Produkte von Differenzialien enthalten, zu vernachlässigen. Wir erhalten daher: $f S d\varphi = dS$ und wenn man diese Gleichung integrirt:

$$\text{lognat } S = f\varphi + \text{Const} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

Diese Gleichung spricht das Gesetz aus, nach welchem die Spannung S mit dem Winkel φ wächst.

Nun ist für $\varphi = o$, $S = \mathfrak{T}_1$ und für $\varphi = \widehat{aOa_1} = \alpha$, $S = \mathfrak{T}$. Demnach gibt die Gleichung (4):

$$\text{lognat } \mathfrak{T}_1 = o + \text{Const}$$
$$\text{lognat } \mathfrak{T} = f\alpha + \text{Const}$$

Die Differenz dieser Gleichungen gibt:

$$\text{lognat } \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = f\alpha \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

demnach:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 \, e^{f\alpha} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

wobei $e = 2{\cdot}71828$ die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet. Aus den Gleichungen (1) und (6) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{T} &= P \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \\ \mathfrak{T}_1 &= P \frac{1}{e^{f\alpha} - 1} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

Die Spannung t, welche in der ganzen Ausdehnung des Riemens eintritt, wenn Kraft und Widerstand beseitigt wird, ist $\frac{1}{2}(\mathfrak{T}+\mathfrak{T}_1)$, man erhält demnach auch:

$$t = \frac{1}{2} P \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Nennt man s die Bogenlänge $a\,p\,a_1$, längs welcher der Riemen die Rolle berührt, R den Halbmesser der Rolle, so ist:

$$\alpha = \frac{s}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Vermittelst dieser Formeln (7), (8), (9) können nun die schwächsten Spannungen berechnet werden, bei welchen ein Glitschen der Rollen oder Riemen noch nicht eintritt.

Die Reibungscoeffizienten f sind nach Versuchen von *Morin*:

1) für gewöhnlich fette Riemen auf hölzernen Rollen $f = 0{\cdot}47$
2) für neue Riemen auf hölzernen Rollen $f = 0{\cdot}50$
3) für gewöhnlich fette Riemen auf abgedrehten gusseisernen Rollen $f = 0{\cdot}28$
4) für feuchte Riemen auf gusseisernen abgedrehten Rollen $f = 0{\cdot}38$

Für die gewöhnlichen Zwecke der Praxis sind die Formeln (7) und (8) viel zu complizirt, sie geben uns jedoch sehr einfache Resultate, wenn wir uns auf die gewöhnlicheren Fälle der Praxis beschränken, in welchen 1) fette Riemen auf gusseisernen abgedrehten Rollen angewendet werden, und 2) der Winkel, welcher dem Bogen α entspricht, entweder genau oder doch annähernd gleich 180° ist. Setzen wir in (7) und (8) $f = 0{\cdot}28$, $\alpha = \pi = 3{\cdot}142$, $e = 2{\cdot}718$, so erhalten wir wegen $e^{f\alpha} = (2{\cdot}718)^{0{\cdot}28 \times 3{\cdot}142} = 2{\cdot}41$

$$\mathfrak{T} = 1{\cdot}8\,P, \quad \mathfrak{T}_1 = 0{\cdot}8\,P, \quad t = 1{\cdot}3\,P$$

Allein damit in der Anwendung ein Glitschen der Riemen nicht eintritt, müssen die Spannungen jederzeit etwas grösser gehalten werden, als die kleinsten Werthe, daher dürfen wir zur Berechnung der Rollen und Riemen folgende Werthe in Rechnung bringen:

$$\mathfrak{T} = 2\,P, \quad \mathfrak{T}_1 = P, \quad t = 1{\cdot}5\,P \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Dimensionen des Riemens und der Rolle. Nennen wir nun β die Breite des Riemens, δ die Dicke desselben, $\mathfrak{A}$ die Spannungsintensität,

welche im Riemen eintreten darf, und zwar im führenden Riemenstück, so ist zu setzen:

$$\mathfrak{A}\,\beta\,\delta = \mathfrak{T}$$

oder weil wir in allen gewöhnlichen Fällen $\mathfrak{T} = 2\,P$ nehmen dürfen:

$$\mathfrak{A}\,\beta\,\delta = 2\,P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Vermittelst dieser Gleichung kann man den Querschnitt $\beta\,\delta$ des Riemens berechnen, wenn die auf den Rollenumfang reduzirte Kraft P und die zulässige Spannungsintensität gegeben sind. Allein wenn es sich um die Construktion eines Rollentriebes handelt, ist P fast niemals unmittelbar gegeben, sondern man kennt gewöhnlich nur den in Pferdekräften ausgedrückten Effekt, welchen die Rolle überträgt, und die Anzahl der Umdrehungen der Wellen; die Regel (1) ist daher unmittelbar nicht praktisch brauchbar. Die Methode der Verhältnisszahlen führt uns auch hier am besten zu einer leicht anwendbaren Regel. Nennen wir d den Durchmesser einer Transmissionswelle, welche einem Torsionsmoment $P\,R$ entspricht, so haben wir vermöge Gleichung (4), Seite 57:

$$P\,R = T\,\frac{\pi}{16}\,d^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Durch Elimination von P aus (11) und (12) folgt:

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}\,\beta\,\delta\,R = \frac{\pi}{16}\,T\,d^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Dividirt man durch d^3 und sucht hierauf $\frac{\beta}{d}$, so findet man:

$$\frac{\beta}{d} = \frac{\frac{\pi}{16}\,T}{\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}\,\frac{\delta}{d}}\,\frac{d}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Nun ist $\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}\,\frac{\delta}{d}$ in allen Fällen der Praxis sehr nahe eine constante Grösse; denn ist die zu übertragende Kraft gross, so fällt d gross aus, wird aber auch dickeres und zugleich festeres Leder genommen, und so kommt es, dass das Produkt $\mathfrak{A}\,\delta$ sehr nahe in dem gleichen Maass wächst wie d, dass mithin $\frac{1}{2}\,\mathfrak{A}\,\frac{\delta}{d}$ sehr nahe constant und zwar gleich 1·55 ist. Man erhält dadurch zur Bestimmung der Riemendicke δ die Regel:

$$\delta = 3 \cdot 1 \frac{d}{\mathfrak{A}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

und es darf hier für $\mathfrak{A}$ der fünfte Theil der absoluten Festigkeit des Leders gesetzt werden. Die angemessenen Werthe von $\mathfrak{A}$ sind demnach:

für	Schafleder	. .	$\mathfrak{A} = 22$
	Kalbleder	. .	„ $= 25$
	Rossleder	. .	„ $= 44$
	Kuhleder	. .	„ $= 54$

Berechnet man den Durchmesser d nach der Formel $d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$ wobei N die Pferdekraft ausdrückt, welche dem Moment P R entspricht, und n die Anzahl der Umdrehungen per 1 Minute, so ist, wie Seite 164 gezeigt wurde, $T = 90$ und dann findet man aus (14):

$$\frac{\beta}{d} = 10 \cdot 5 \frac{d}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Diese Formel gibt

für $\frac{R}{d} =$	4	5	6	7	8
$\frac{\beta}{d} =$	2·6	2·1	1·75	1·5	1·31

Diese Regeln sind unter der Voraussetzung gefunden worden, dass die Spannung $\mathfrak{T}$ im führenden Riemenstück gleich 2 P, d. h. zwei mal so gross ist, als der auf den Umfang reduzirte Widerstand. Setzt man zur Abkürzung:

so ist:

$$\left.\begin{array}{l} k = \dfrac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} \\ \\ \mathfrak{T} = k\,P \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

und wenn man die früher durchgeführte Rechnung wiederholt, dabei aber k P statt 2 P setzt, so findet man statt der Gleichung (14):

$$\frac{\beta}{d} = k \frac{\frac{\pi}{16}\,\mathfrak{T}}{\mathfrak{A}\,\frac{\delta}{d}} \frac{d}{R} \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

oder wenn man die Erfahrungsregel (16) berücksichtigt:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= 3{\cdot}1 \frac{d}{\mathfrak{A}} \\ \frac{\beta}{d} &= 5{\cdot}25 \ k \frac{d}{R} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (20)$$

Für den Reibungscoefficienten $f = 0{\cdot}28$ findet man:

für $\alpha^0 =$	60°	90°	120°	180°	210°	240°
$e^{f\alpha} =$	1·340	1·552	1·797	2·409	2·789	3·229
$k =$	3·94	2·81	2·26	1·71	1·55	1·44

Diese Resultate dienen nun zur Bestimmung der Riemen für den Fall, dass der von dem Riemen umfasste Bogen beträchtlich von 180° abweicht.

Die Rollenbreite b muss etwas grösser als die Riemenbreite gehalten werden. Wir stellen die Regel auf:

$$b = \frac{5}{4} \beta \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (21)$$

Die Dimensionen der Hülse zum Aufkeilen der Rolle müssen empirisch bestimmt werden. Eine Vergleichung von guten Constructionen hat zu folgenden Regeln geführt, Fig. 1 und 2, Tafel XV. der Resultate für den Maschinenbau:

Metalldicke der Hülse	$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} d$	(22)
Länge der Hülse, nach der Richtung der Axe gemessen, gleich der Rollenbreite b .	$= \frac{5}{4} d$	
Breite des Keiles	$= 0{\cdot}9 d$	
Dicke des Keiles	$= 0{\cdot}45 d$	

Zur Bestimmung der Arme kann man vermittelst der Methode der Verhältnisszahlen auf folgende Weise eine einfache Regel ableiten.

Die innerhalb gewisser Grenzen ziemlich willkürliche Anzahl $\mathfrak{N}$ der Arme einer Rolle darf jederzeit nach dem Verhältniss $\frac{R}{d}$ aus dem Halbmesser der Rolle und dem Durchmesser der Welle, welche der durch die Rolle zu übertragenden Kraft entspricht, bestimmt werden; allein da dieses Verhältniss nicht immer eine ganze Zahl

ist, und ferner für die Anzahl der Arme eine ganze Zahl genommen werden muss, so gilt die Regel, dass die Anzahl $\mathfrak{N}$ der Arme gleich gemacht werden soll derjenigen ganzen Zahl, welche dem Verhältniss $\frac{R}{d}$ am nächsten kommt.

Der Querschnitt der Arme wird gewöhnlich ellyptisch gemacht, weil dies eine Form ist, die wenig Luftwiderstand verursacht, und sich leicht in Sand formen lässt. Die absoluten Dimensionen eines Armes ergeben sich auf folgende Weise.

Zur Bestimmung der Welle haben wir die Gleichung (12) aufgestellt.

Nennen wir nun h die in der Ebene der Rolle gemessene Dimension eines Armes, gemessen an der Axe. h_1 die Dicke des Armes an der Hülse, so ist nach der Lehre von der relativen Festigkeit $\mathfrak{S} \frac{\pi}{32} h_1 h^2 = \mathfrak{S} \frac{\pi}{32}\left(\frac{h_1}{h}\right) h^3$ das Elastizitätsmoment. Da wir annehmen dürfen, dass die am Umfang der Rolle wirkende Kraft P alle Arme von der Hülse wegzubrechen strebt, so ist $\frac{P}{\mathfrak{N}} R$ das Moment für einen Arm, man hat daher:

$$\frac{P R}{\mathfrak{N}} = \frac{\mathfrak{S} \pi}{32}\left(\frac{h_1}{h}\right) h^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Aus dieser und der Gleichung (12) folgt nun durch Elimination von $P R$:

$$\frac{T \pi}{16} d^3 = \mathfrak{N} \frac{\mathfrak{S} \pi}{32}\left(\frac{h_1}{h}\right) h^3$$

und hieraus folgt:

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2 T}{\mathfrak{S}} \frac{h}{h_1}}}{\sqrt[3]{\mathfrak{N}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

Der Zähler dieses Bruches ist, weil das Verhältniss $\frac{h}{h_1}$ constant angenommen wird, ebenfalls constant, und nach Erfahrungen gleich 1·7 zu setzen; man hat daher:

$$\frac{h}{d} = \frac{1 \cdot 7}{\sqrt[3]{\mathfrak{N}}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

Diese Formel gibt folgende Resultate:

für $\mathfrak{N} =$	4	6	8	10
$\frac{h}{d} =$	1·08	0·94	0·86	0·79

In den Resultaten für den Maschinenbau, Seite 60 bis 63, findet man alle im Vorhergehenden abgeleiteten und aufgestellten Regeln zur Bestimmung der Dimensionen der Rollen für den praktischen Gebrauch zusammengestellt. Zum Verständniss mögen noch folgende Bemerkungen dienen.

Wir nennen den Quotienten $\frac{R}{d}$ aus dem Halbmesser der Rolle und dem Durchmesser der Welle, welche der zu übertragenden Kraft entspricht, die relative Grösse der Rolle und sagen, eine Rolle sei eine 4-, 5-, 6fache, wenn ihr Halbmesser 4, 5, 6 mal so gross ist als der Durchmesser der Welle, welche der Kraft entspricht.

Hinsichtlich des Wellendurchmessers ist folgendes zu sagen:

Wenn die ganze in der treibenden Welle enthaltene Kraft durch den Rollentrieb auf die zweite Axe übertragen werden soll, so ist der der Rechnung zu Grunde zu legende Durchmesser d gleich dem wirklichen Durchmesser der treibenden Welle. Wenn dagegen nur ein Theil von der Kraft, die in der treibenden Welle enthalten ist, auf die getriebene Welle übertragen werden soll, so ist der Durchmesser d, welcher der Berechnung der Rolle zu Grunde gelegt werden muss, nicht gleich dem wirklichen Durchmesser der treibenden Welle, sondern dieser Durchmesser ist dann nur eine imaginäre Hilfsgrösse und muss nach dem zu übertragenden Effekt und nach der Geschwindigkeit der Rolle berechnet werden. Die später folgenden Beispiele werden die Bestimmung von d erklären.

Der Halbmesser der grösseren von den beiden Rollen eines Rollentriebes darf in der Regel 6 bis 7 mal so gross genommen werden, als der Durchmesser d. Nur in dem Falle, wenn eine sehr starke Uebersetzung verlangt wird ist es angemessen, den Halbmesser 8 bis 10 mal so gross zu machen als d.

Durchgeht man die aufgestellten Regeln, so wird man finden, dass nach denselben alle Rollen von einerlei relativer Grösse geometrisch-ähnliche Formen sind, denn für einen bestimmten Werth von $\frac{R}{d}$ erhalten alle übrigen Verhältnisse, namentlich

$$\frac{\beta}{d}, \quad \frac{b}{d}, \quad \mathfrak{N} = \frac{R}{d}, \quad \frac{h}{d}$$

constante Werthe. Unsere Regeln geben:

für $\frac{R}{d} = 7$

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}5,\quad \frac{b}{d} = 1{\cdot}9,\quad \mathfrak{N} = 6,\quad \frac{h}{d} = 0{\cdot}94$$

und dies sind die am gewöhnlichsten zur Anwendung kommenden Verhältnisszahlen, weil in der Regel siebenfache Rollen gebraucht werden.

Um den Gebrauch dieser Regeln zu erklären, mögen folgende Beispiele dienen.

Erstes Beispiel. In der treibenden Welle a, Fig. 4, Tafel X., wirkt eine Kraft von 8 Pferden und sie macht in einer Minute 128 Umdrehungen. Es soll die ganze Kraft auf die Welle b übertragen und mit 256 Umdrehungen in einer Minute bewegt werden.

In diesem Falle ist:

Durchmesser der treibenden Welle $16\sqrt[3]{\frac{8}{128}}$ = 6·3

Durchmesser der getriebenen Welle $16\sqrt[3]{\frac{8}{256}}$ = 5·2

Relative Grösse der Rolle A = 7

Halbmesser der Rolle A, $7 \times 6{\cdot}3$ = 44·1

(Es ist nämlich im vorliegenden Falle der Wellendurchmesser d übereinstimmend mit dem wirklichen Durchmesser von a.)

Halbmesser der Rolle B, $\frac{1}{2}\,44{\cdot}1$ = 22·05

Riemenbreite $\beta = 1{\cdot}5\,d = 1{\cdot}5 \times 6{\cdot}3$ = 9·45

Rollenbreite $= \frac{5}{4} \times 9{\cdot}45$ = 11·81

Keildimensionen { Breite $= 0{\cdot}9 \times 6{\cdot}3$ = 5·7
Keildimensionen { Dicke $= 0{\cdot}45 \times 6{\cdot}3$ = 2·8

Anzahl der Arme { für A = 6
Anzahl der Arme { „ B = 4

Es ist nämlich die relative Grösse der Rolle B in Bezug auf die Welle b gleich $\frac{22{\cdot}05}{5{\cdot}2}$ oder nahe gleich 4, und daher muss nach der früher aufgestellten Regel die Rolle B vier Arme erhalten.

Dimensionen der Arme { für A, $h = 0{\cdot}94 \times 6{\cdot}3$. . . = 5·9
Dimensionen der Arme { „ B, $h = 1{\cdot}08 \times 5{\cdot}2$. . . = 5·7

Zweites Beispiel. Gegeben Fig. 5, Tafel X.:

Effekt in Pferdekräften in der treibenden Welle a . . . = 12

Umdrehungen dieser Welle in einer Minute = 120
Effekt in Pferdekräften, welcher von a auf b übertragen werden soll = 4
Anzahl der Umdrehungen von b in einer Minute . . . = 240

Bestimmungen:

Wirklicher Durchmesser der Welle a $= 16 \sqrt[3]{\frac{12}{120}}$. . . = 7·4

Wirklicher Durchmesser der Welle b $= 16 \sqrt[3]{\frac{4}{240}}$. . . = 4

Zur Berechnung der Rolle A darf in dem vorliegenden Falle nicht die wirkliche Welle a zu Grunde gelegt werden, sondern eine ideale Welle für 4 Pferdekräfte und 120 Umdrehungen.

Es ist demnach:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{4}{120}} \quad \ldots \ldots = 5{\cdot}1$$

und wir erhalten nun:

Relative Grösse der Rolle A = 7
Durchmesser der Rolle A $= 7 \times 5{\cdot}1$ = 35·7
Durchmesser der Rolle B $= \frac{35{\cdot}7}{2}$ = 17·85
Relative Grösse der Rolle B $= \frac{17{\cdot}85}{4}$ = 4·4
Riemenbreite $1{\cdot}5 \times 5{\cdot}1$ = 7·65
Rollenbreite $\frac{5}{4} \times 7{\cdot}65$ = 9·56

Anzahl der Arme { A, ... = 6
 B, ... = 4

Abmessungen der Arme { A, $0{\cdot}94 \times 5{\cdot}1$ = 4·8
 B, $1{\cdot}08 \times 4$ = 4·3

Hülsendicke { A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 5{\cdot}1$ = 2·20
 B, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 4$ = 1·83

Drittes Beispiel. Fig. 6, Tafel X. Der Durchmesser des Wellenstückes a a ist gegeben und beträgt 10 Centimeter, der vierte Theil der in a a wirkenden Kraft soll auf B übertragen werden und von da zur Hälfte nach b b, zur Hälfte an $b_1 b_1$ abgegeben werden. B soll noch einmal so viel Umdrehungen machen als A.

Bezeichnen wir den nicht bekannten Effekt, welcher in der Welle a a wirkt mit N, die nicht bekannte Anzahl der Umdrehungen von A

mit n und den gegebenen wirklichen Durchmesser von a a mit D = 10, so ist:

$$10 = D = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Nach den Daten überträgt das Wellenstück $a_1 a_1$ $\frac{3}{4}$ N Pferdekräfte mit n Umdrehungen, daher ist der Durchmesser des Wellenstückes $a_1 a_1$ gleich $16 \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{4} N}{n}} = D \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 0{\cdot}908\ D$. . . = 9·08

Der Durchmesser eines Wellenstückes b b und $b_1 b_1$ ist

dagegen $16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} N}{2\ n}} = \frac{D}{\sqrt[3]{16}}$ = 4·00

Da die Rolle A $\frac{1}{4}$ N mit n Umdrehungen überträgt, so ist die ideale Welle, welche zur Berechnung der Rolle A

dient $16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4} N}{n}} = D \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ = 6·30

Dagegen ist die ideale Welle, welche zur Berechnung der

Arme der Rolle B dient $16 \sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4} N}{2\ n}} = 0{\cdot}5\ D$ = 5·00

Wir erhalten nun:

Relative Grösse der Rolle A, ... = 7

Halbmesser der Rolle A, $7 \times 6{\cdot}3$ = 44·1

Halbmesser der Rolle B, $\frac{1}{2} \times 44{\cdot}1$ = 22·05

Relative Grösse der Rolle B, $\frac{22{\cdot}05}{5}$, nahe = 4

Riemenbreite $1{\cdot}5 \times 6{\cdot}3$ = 8·45

Rollenbreite $\frac{5}{4} \times 8{\cdot}45$ = 10·5

Hülsendicke
- A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 6{\cdot}3$ = 2·6
- B, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 5{\cdot}0$ = 2·2

Anzahl der Arme
- A = 6
- B = 4

Dimensionen der Arme
- A, $0{\cdot}94 \times 6{\cdot}3$ = 6·0
- B, $1{\cdot}08 \times 5{\cdot}0$ = 5·4

Viertes Beispiel. Es sei gegeben:

Umdrehungen der treibenden Welle in einer Minute . . .	80
Umdrehungen der getriebenen Welle in einer Minute . . .	160
Totale Kraft, welche übertragen werden soll in Pferden . .	40

Wenn eine Kraft von 40 Pferden von einer Welle aus, die nur 80 Umdrehungen in einer Minute macht, übertragen werden soll, wird man wohl niemals Treibrollen, sondern jederzeit Zahnräder in Anwendung bringen. Allein dieses Beispiel soll nur dazu dienen, um zu zeigen, dass die Rollentriebe für so starke Kräfte nicht gebraucht werden können.

Mit nur einem Rollenpaar kann das, was verlangt wird, nicht geleistet werden, denn unsere Regeln würden uns in diesem Falle auf unzulässige Dimensionen führen. Man fände nämlich:

Durchmesser der treibenden Welle und gleichzeitig Werth von

$d = 16 \sqrt[3]{\frac{40}{80}}$ 13 Centm

Halbmesser der treibenden Welle 7×13 91 „

Riemenbreite $1{\cdot}5 \times 13$ 20 „

Riemendicke nach Formel (16), wenn Rossleder genommen wird, für welches $\mathfrak{A} = 44$ gesetzt werden darf

$\delta = \frac{3{\cdot}1 \times 13}{44}$ $= 1$ „

Es wäre also ein Doppelriemen von 20 Centimetern Breite nothwendig, denn die Dicke des Rossleders beträgt höchstens 0·5 Centimeter.

Will man also die gestellte Forderung durch einen Riementrieb ausführen, so wird es besser sein, zwei oder drei Rollenpaare in Anwendung zu bringen. Nehmen wir drei Rollenpaare an, Fig. 7, Tafel X., so überträgt eines derselben $\frac{40}{3} = 13{\cdot}3$ Pferde.

Der Durchmesser, welcher der Berechnung einer von den treibenden Rollen zu Grunde gelegt werden muss, ist demnach

$d = 16 \sqrt[3]{\frac{13{\cdot}3}{80}}$ $= 8{\cdot}7$

Halbmesser einer der treibenden Rollen $7 \times 8{\cdot}7$ $= 60{\cdot}9$

Halbmesser einer der getriebenen Rollen $\frac{60{\cdot}9}{2}$ $= 30{\cdot}45$

Riemenbreite $8{\cdot}7 \times 1{\cdot}5$ $= 13$

Lederdicke (Rossleder) $\frac{3{\cdot}1 \times 8{\cdot}7}{44}$ $= 0{\cdot}6$

Mit diesen Dimensionen wird nun zwar die Anordnung ausführbar, aber doch nicht empfehlenswerth, weil mit verzahnten Rä-

dern die geforderte Leistung viel einfacher und besser erreicht werden kann.

Die Riemen. Ueber die Riemen ist in praktischer Hinsicht mancherlei zu bemerken.

Was zunächst die Grenzen anbelangt, innerhalb welcher Riementriebe angewendet werden können, so lassen sich diese zwar nicht scharf bestimmen, aber wenn man sich an die Thatsachen der Praxis hält, so darf man als Regel aufstellen, dass die schwächsten Riemen aus einfachem Leder von 4 Centimetern Breite, und dass die stärksten Riemen aus doppeltem Leder (und zwar Rossleder) von höchstens 20 Centimetern Breite bestehen. Diese schwächsten Riemen entsprechen einer Welle von 3 Centimetern, die stärksten einer Welle von 13 Centimetern Durchmesser. Die Anwendung von so breiten Doppelriemen ist aber immer eine missliche Sache und soll so viel als möglich vermieden werden. Aber auch die dünnen Riemen haben eine fatale Eigenschaft, durch welche ihre Wirkung sehr unzuverlässig wird. Sie dehnen sich nämlich, insbesondere in neuem Zustande, sehr beträchtlich, verlieren ihre Spannung, fassen die Rollen nicht sicher, sondern gleiten auf denselben, ohne sie mitzunehmen.

Um das Abgleiten der Riemen von den Rollen zu verhindern, müssen die Umfänge der letzteren etwas gewölbt geformt werden. In diesem Falle berührt der Riemen die Rolle nur in der Mitte und nicht mit den Rändern, und gerade dadurch ist die dauernde Lage des Riemens gesichert. Macht man den Rollenumfang einfach cylindrisch oder etwas hohl, so fasst der Riemen die Rolle mit seinen Rändern und so wie einer der beiden Ränder etwas stärker anfasst, als der andere, glitscht der Riemen sogleich nach der Seite hin ab, wo die stärkere Spannung vorhanden ist.

Eine nicht geringe Schwierigkeit verursacht die Verbindung der Riemenenden, insbesondere bei stärkeren Dimensionen. Diese Verbindung würde keine besondere Schwierigkeit machen, wenn sich die Riemen im Gebrauch nicht ausstreckten, weil aber dies in einem sehr beträchtlichen Maasse statt findet, soll die Vereinigung der Riemenenden von der Art sein, dass sie 1) hinreichende Festigkeit gewährt; 2) leicht aufgehoben und wiederhergestellt werden kann; 3) zugleich wo möglich das Anspannen der Riemen bewirkt.

Es werden folgende Riemenverbindungen angewendet:

Bei dünnen Riemen werden gewöhnlich die Enden auf 20 bis 24 Centimeter Länge übereinander gelegt und vermittelst dünner Riemen zusammen geschnürt, wie Fig. 8, Tafel X. zeigt.

Auch Schnallen, wie Fig. 9., Tafel X. zeigt, können bei dünnen Riemen gebraucht werden. Eine solche Verbindung ist zwar nicht sehr fest, weil die Löcher gar bald ausreissen, sie gewährt aber den Vortheil, dass die Riemen leicht gespannt werden können.

Ganz starke Riemen werden am besten in der Weise wie Fig. 10, Tafel X. zeigt, mit Schraubennieten verbunden. Es sind aber zwei bis drei Nietenreihen erforderlich, damit die Festigkeit der Verbindung jener des Riemens nahe gleich kommt.

Nennt man e die Entfernung zweier Nieten in einer Querreihe, d den Durchmesser einer Niete, i die Anzahl der Nietreihen, so kann man zur Bestimmung von i die Gleichung aufstellen:

$$i = \left(\frac{e}{d} - 1\right)$$

$$\text{für } \frac{e}{d} = 2 \quad 3 \quad 4$$

$$\text{wird } i = 1 \quad 2 \quad 3$$

Vortheile und Nachtheile der Riementriebe. Die Riementriebe sind in mancher Hinsicht vortheilhaft, in anderer Hinsicht nachtheilig. Die Vortheile sind: 1) dass mit denselben äusserst rasche Bewegungen mit Stetigkeit und Weichheit übertragen werden können; 2) dass die Entfernung der Axen der Rollen sehr beträchtlich z. B. 10 Mal so gross, als der Rollendurchmesser sein kann; 3) dass sich Stösse, die etwa in der treibenden Axe vorkommen, durch den Riemen nicht forpflanzen; 4) die Leichtigkeit, die Verbindung zweier Axen herzustellen oder aufzuheben, durch Anbringung von Leer-Rollen; 5) die Leichtigkeit die Drehungsrichtung der getriebenen Rolle zu ändern, indem man äussere oder innere (gekreuzte) Riemen anwendet.

Die Nachtheile dagegen sind: 1) die beschränkte Anwendbarkeit der Riemen, indem stärkere Widerstände nicht überwunden werden können; 2) die Unsicherheit der Bewegung, indem die Riemen auf den Rollen oder die Rollen in den Riemen glitschen, wenn die Spannung nicht sehr stark ist; 3) der verhältnissmässig grosse Reibungswiderstand, welchen die Riemenspannungen verursachen, indem durch sie die Axen heftig in die Lager gepresst werden. Der daraus entstehende Reibungswiderstand ist wenigstens beträchtlich grösser, als die Zahnreibung bei gutgeformten und sorgfältig gearbeiteten Zahnrädern; 4) das Ausstrecken der Riemen, insbesondere so lange sie noch neu sind; 5) das Abfallen der Riemen von den Rollen, insbesondere wenn die Axen vertikal gestellt sind.

Spannrollen.

Zuweilen wird die Riemenspannung durch eine Rolle bewirkt, welche direkt durch ein Gewicht, oder indirekt durch einen Hebel, auf welchen ein Gewicht einwirkt, gegen den Riemen gedrückt wird. Fig. 11, Tafel X. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, den Druck zu bestimmen, mit welchem eine solche Spannrolle gegen den Riemen gedrückt werden muss, damit in demselben Spannungszustände eintreten, die so gross sind, dass ein Gleiten der treibenden Rolle in dem Riemen, oder ein Gleiten des letzteren auf der getriebenen Rolle nicht eintritt.

Nehmen wir an, der Riemen werde zuerst, bevor die Spannrolle angelegt und bevor Kraft und Widerstand auf die Rollen einwirken, auf gewöhnliche Weise durch Schnallen oder durch Verschnürungen so stark und gleichförmig angespannt, dass eine Spannung t eintritt, so entsteht in dem Riemen eine Ausdehnung, die nach dem Stabausdehnungsgesetz gleich $\frac{t\,L}{\Omega\,\varepsilon}$ ist, wobei L die anfängliche natürliche Länge des Riemens, Ω seinen Querschnitt, ε den Modulus der Elastizität des Materials bezeichnet. Denken wir uns nun, dass hierauf die Spannrolle mit einer Kraft q gegen das *geführte* Riemenstück so stark angedrückt werde, dass ein Gleiten des Riemens nicht eintritt, wenn wir an den Umfang der treibenden Rolle eine Kraft P und am Umfang der getriebenen Rolle einen Widerstand P einwirken lassen. Dann wird in dem führenden Riemenstück $A\,A_1$ eine gewisse Spannung $\mathfrak{T}_1$, in dem geführten Riemenstück $C\,C_1$ eine gewisse Spannung $\mathfrak{T}_2$ eintreten.

Vorausgetzt dass das Spannungsgewicht gerade nur so gross ist, dass durch den Spannungszustand ein Gleiten des Riemens nicht statt findet, hat man nach Seite 187:

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2\, e^{f\alpha_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wobei α_1 der Winkel ist (in Theilen des Halbmessers ausgedrückt), welcher dem Bogen entspricht, längs welchem der Riemen den Umfang der kleineren Rolle berührt.

Nennt man σ die Spannung in irgend einem Punkt m am Umfang der Rolle O, so ist nach Seite 187:

$$\sigma = \mathfrak{T}_2\, e^{f\varphi}$$

Die Ausdehnung, welche in dem die Rolle B berührenden Theil des Riemens durch alle zwischen C und A vorkommenden Spannungen entsteht, ist demnach nach dem Stabausdehnungsgesetz:

$$\int_0^\alpha \frac{\sigma \, R \, d\varphi}{\Omega \, \varepsilon} = \int_0^\alpha \frac{R \, \mathfrak{T}_2}{\Omega \, \varepsilon} e^{f\varphi} d\varphi = \frac{R \, \mathfrak{T}_2}{\Omega \, \varepsilon f} e^{f\alpha}$$

Auf gleiche Weise ist $\frac{r \, T_2}{\Omega \, \varepsilon f} e^{f\alpha_1}$ die Ausdehnung im Riemenbogen $A_1 C_1$. Nennt man l die natürliche Länge $A A_1$ eines der beiden geraden Riemenstücke, so sind $\frac{l \, \mathfrak{T}_1}{\varepsilon \, \Omega}, \frac{l \, \mathfrak{T}_2}{\varepsilon \, \Omega}$ die Ausdehnungen, welche in diesen Riementheilen durch die Spannungen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$ eintreten, der ganze Riemen ist also um

$$\frac{R \, \mathfrak{T}_2}{\Omega \, \varepsilon f} e^{f\alpha} + \frac{r \, \mathfrak{T}_2}{\Omega \, \varepsilon f} e^{f\alpha_1} + \frac{l \, \mathfrak{T}_1}{\varepsilon \, \Omega} + \frac{l \, \mathfrak{T}_2}{\varepsilon \, \Omega}$$

länger, als er im natürlichen Zustande war.

Diese Verlängerung muss nun gleich sein 1) derjenigen Verlängerung $\frac{L \, t}{\Omega \, \varepsilon}$, welche durch die anfängliche Anspannung eingetreten ist, mehr der Verlängerung $\frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$, welche durch das Spanngewicht eingetreten ist. Wir erhalten daher die Gleichheit:

$$\frac{R \, \mathfrak{T}_2}{\Omega \, \varepsilon f} e^{f\alpha} + \frac{r \, \mathfrak{T}_2}{\Omega \, \varepsilon f} e^{f\alpha_1} + \frac{l \, \mathfrak{T}_1}{\varepsilon \, \Omega} + \frac{l \, \mathfrak{T}_2}{\varepsilon \, \Omega} = \frac{L \, t}{\Omega \, \varepsilon} + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \quad (2)$$

Dabei bedeutet $x = \overline{g h}$ die Senkung des Spanngewichtes oder die Einbiegung des Riemens und sind $a = \overline{C h}$ $b = \overline{C_1 h}$ die Entfernungen des Spanngewichtes von dem Berührungspunkt C und C_1. Vernachlässigt man den Unterschied von α und α_1 und berücksichtiget die Gleichung (1), so wird der Ausdruck (2):

$$\frac{R \, \mathfrak{T}_1}{\Omega \, \varepsilon f} + \frac{r \, \mathfrak{T}_1}{\Omega \, \varepsilon f} + \frac{l \, \mathfrak{T}_1}{\varepsilon \, \Omega} + \frac{l \, \mathfrak{T}_2}{\varepsilon \, \Omega} = \frac{L \, t}{\Omega \, \varepsilon} + \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

und hieraus folgt:

$$x = \sqrt{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \left(\frac{R \, \mathfrak{T}_1}{\Omega \, \varepsilon f} + \frac{r \, \mathfrak{T}_1}{\Omega \, \varepsilon f} + \frac{l \, \mathfrak{T}_1}{\varepsilon \, \Omega} + \frac{l \, \mathfrak{T}_2}{\varepsilon \, \Omega} - \frac{L \, t}{\Omega \, \varepsilon}\right)} \quad . \quad (3)$$

Nun ist aber annähernd

$$\mathfrak{T}_2 \frac{x}{a} + \mathfrak{T}_2 \frac{x}{b} = q$$

oder:

$$q = \mathfrak{T}_2 \, x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Setzt man hier für x seinen Werth aus (3), so findet man:

$$q = \mathfrak{T}_2 \sqrt{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{1}{\Omega \, \varepsilon} \left(\frac{R \, \mathfrak{T}_1}{f} + \frac{r \, \mathfrak{T}_1}{f} + l \, \mathfrak{T}_1 + l \, \mathfrak{T}_2 - L \, t \right)}$$

oder auch:

$$q = \mathfrak{T}_2 \sqrt{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{\mathfrak{T}_1}{\Omega \, \varepsilon} \left(\frac{R}{f} + \frac{r}{f} + l + l \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} - L \frac{t}{\mathfrak{T}_1} \right)} \quad (4)$$

oder endlich:

$$q = \mathfrak{T}_2 \sqrt{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{\mathfrak{T}_1 \, L}{\Omega \, \varepsilon} \left[\frac{R}{L f} + \frac{r}{L f} + \frac{l}{L} \left(1 + \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} \right) - \frac{t}{\mathfrak{T}_1} \right]} \quad (5)$$

Wenn die Spannrolle gegen das führende (stark gespannte) Riemenstück angedrückt wird, ist

$$q = \mathfrak{T}_1 \, x \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und wird dann:

$$q = \mathfrak{T}_1 \sqrt{2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \frac{\mathfrak{T}_1 \, L}{\Omega \, \varepsilon} \left[\frac{R}{L f} + \frac{r}{L f} + \frac{l}{L} \left(1 + \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} \right) - \frac{t}{\mathfrak{T}_1} \right]} \quad (7)$$

Die Kraft, mit welcher die Spannrolle an den Riemen gedrückt werden muss, fällt also im Verhältniss $\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2}$ grösser aus als in dem Falle, wenn sie an dem geführten Riemenstück wirkt.

Es sei z. B.:

$$\frac{L}{a} = 8, \quad \frac{L}{b} = 8, \quad \frac{\mathfrak{T}_1}{\Omega} = 25, \quad \frac{R}{L} = \frac{1}{10}, \quad \frac{r}{L} = \frac{1}{10}, \quad \frac{l}{L} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{t}{\mathfrak{T}_1} = \frac{1}{2}, \quad \mathfrak{T}_1 = 2 \text{ P}, \quad f = 0{\cdot}28, \quad \varepsilon = 400$$

so wird:

nach Formel (5) $q = 1{\cdot}09$ P

nach Formel (7) $q = 2{\cdot}18$ P

Die in den Resultaten, vierte Auflage, Seite 66 aufgestellte Formel ist etwas weniger genau als die so eben hergeleitete. Die Formel der Resultate ergibt sich, wenn man annimmt: Es werde ein Gleiten der Riemen dann nicht eintreten, wenn in denselben durch das Andrücken der Spannrolle eine gleichförmige Spannung von der Grösse $1{\cdot}5\,P$ hervorgebracht wird, dabei stellt man sich aber vor, dass während der Anspannung des Riemens durch die Spannrolle, auf die Transmissionsrollen weder eine Kraft noch ein Widerstand einwirkt.

Geht man von dieser annähernd richtigen Annahme aus, so ist die Verlängerung $\frac{L\,1{\cdot}5\,P}{\Omega\,\varepsilon}$, welche durch die gleichförmige Spannung $1{\cdot}5\,P$ entsteht, gleich zu setzen der Verlängerung $\frac{L\,t}{\Omega\,\varepsilon}$, durch die initiale Spannung mehr der Verlängerung $\frac{1}{2}\,x^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, hat man also die Gleichung:

$$\frac{L\,1{\cdot}5\,P}{\Omega\,\varepsilon}=\frac{L\,t}{\Omega\,\varepsilon}+\frac{1}{2}\,x^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\quad\ldots\ldots\ (8)$$

Wird die Spannrolle gegen das führende Riemenstück gedrückt (wie es bei der Formel der Resultate angenommen ist), so hat man, weil im führenden Riemenstück in der Regel eine Spannung $2\,P$ herrscht,

$$q=2\,P\,x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ldots\ldots\ldots\ (9)$$

Durch Elimination von x aus (8) und (9) folgt:

$$q=2\,P\sqrt{\frac{2\,(a+b)}{a\,b}\;\frac{L\,(1{\cdot}5\,P-t)}{\Omega\,\varepsilon}}\quad\ldots\ldots\ (10)$$

welcher Ausdruck mit jenem der Resultate übereinstimmt.

Zahnräder.

(Resultate Seite 66 bis 76, Tafel XVII)

Erklärungen. Nimmt man zwei kreisrunde cylindrische oder konische Scheiben A und B, Fig. 1 und 2, Tafel XI., versieht jede derselben mit einer Axe, bringt sie hierauf in Berührung und presst sie gegen einander, so bewirkt eine Drehung einer dieser Scheiben zugleich eine Drehung der anderen, vorausgesetzt, dass der Bewegung der getriebenen Scheibe kein zu grosser Widerstand entgegen

wirkt. Diese Bewegung erfolgt in der Weise, dass die Peripheriegeschwindigkeiten der beiden Scheiben übereinstimmen; die Winkelgeschwindigkeiten der Scheiben oder ihre Umläufe in einer Minute müssen sich daher verkehrt wie die Halbmesser verhalten.

Derlei Friktionsscheiben bringen zwar eine sehr regelmässige, weiche, gleichförmige Bewegung hervor, allein sie sind nicht anwendbar, um grössere Kräfte zu übertragen, weil die Pressung zwischen den Scheiben zu gross werden müsste. Versieht man aber diese Scheiben mit zahnartigen Formen, die ineinander greifen, so brauchen die Scheiben nicht mehr gegen einander gepresst zu werden, und wird es bei geeigneter Form der Zähne möglich, eine eben so regelmässige und weiche Bewegung hervorzubringen, wie mit den Friktionsscheiben. Auf diese Weise entstehen die Zahnräder oder verzahnten Räder.

Diese Räder werden Stirnräder oder cylindrische Räder oder sie werden konische oder Kegelräder genannt, je nachdem die Grundform der Scheiben eine cylindrische oder eine konische ist. Die ersteren dienen zur Verbindung von parallelen Axen, die letzteren dagegen zur Verbindung von Axen, deren Richtungen einen Winkel bilden und sich schneiden. Man kann auch Axen, deren Richtungen einen Winkel bilden, sich aber nicht schneiden, durch Zahnräder verbinden; die hierzu dienlichen Räder erhalten in der Regel eine Grundform, die von der cylindrischen wie konischen abweicht.

Ein Räderpaar, durch welches die Verbindung zweier Axen so hergestellt wird, dass durch die drehende Bewegung einer der Axen auch eine drehende Bewegung in der anderen entsteht, wird eine Räderübersetzung genannt, und zwar je nach der Grundform der Räder, Stirnräder- oder Kegelräder-Uebersetzung.

Die Form, welche die Zähne erhalten müssen, damit sie eine Bewegung hervorbringen wie zwei Friktionsscheiben, wird in der später folgenden Theorie der Verzahnung gelehrt werden. Zur Aufstellung von Regeln zur Bestimmung aller Abmessungen der Räder genügt es, wenn wir aus der Verzahnungs-Theorie folgende elementare Sätze anführen.

Man nennt 1) Grundkreise oder Theilkreise: die Kreise der Friktionsscheiben, aus welchen man sich die Zahnräder entstanden denken kann; 2) Uebersetzungszahl: die Zahl, welche angibt, wie viele Umdrehungen das kleinere der Räder macht, wenn das grössere der Räder einmal umgeht; 3) Zahntheilung: die Entfernung der Mittel zweier unmittelbar aufeinander folgenden Zähne, gemessen auf dem Theilkreise; 4) Radhalbmesser: den Halbmesser der Grundkreise oder der Theilkreise.

Die Uebersetzungszahl ist gleich dem Verhältniss der Theilkreise.

Die Zahntheilungen zweier in einander greifenden Räder müssen gleich gross sein.

Die Zahnzahlen zweier in einander greifenden Räder verhalten sich demnach wie ihre Halbmesser.

Das Verhältniss der Zahnzahlen wird auch durch die Uebersetzungszahl ausgedrückt.

Die Umdrehungen zweier in einander greifenden Räder verhalten sich 1) verkehrt wie ihre Halbmesser; 2) verkehrt wie ihre Zahnzahlen.

Die Bestandtheile eines Rades sind 1) die Zähne, 2) der Radkranz, 3) die Radarme, 4) die Radnabe oder Radhülse. Tafel XVII. der Resultate.

Die Zähne sind entweder von Eisen oder von Holz. Im ersteren Falle werden sie an den Radkranz angegossen, im letzteren hingegen in den Radkranz eingesetzt und befestiget. Die Detailformen der Räder ersieht man aus den Figuren der Tafel XVII. der Resultate. Fig. 4, 5, 6 sind Radkränze, mit angegossenen Zähnen. Fig. 1, 2, 3, 7, 8, 9 Radkränze mit eingesetzten hölzernen Zähnen.

Stärke der Radtheile.

Halbmesser des Rades. Die wichtigsten Dimensionen eines Rades sind der Halbmesser und die Dimensionen der Zähne. Die Uebersetzungszahl bestimmt nur allein das Verhältniss der Radhalbmesser, nicht aber ihre absoluten Grössen. Diese letzteren werden durch die zu übertragenden Kräfte bestimmt. Nennt man $\mathfrak{M}$ das statische Moment der Kraft oder des Widerstandes im grösseren Rade, R den Halbmesser des Rades, so ist $\frac{\mathfrak{M}}{R}$ der auf den Umfang des grossen Rades reduzirte Druck, welchem die Zähne ausgesetzt sind. Der Druck zwischen den Zähnen steht also im verkehrten Verhältniss mit der Grösse des Rades. Die Zahndimensionen, welche natürlich von der Grösse des Druckes abhängen, werden also gross bei kleinen Rädern und klein bei grossen Rädern. Kleine Räder sind weniger kostspielig als grosse, geben aber keine so sanfte Bewegung als grosse und verursachen einen grösseren Reibungswiderstand. Eine rationelle Regel zur Bestimmung des Radhalbmessers kann nicht wohl aufgestellt werden, weil man die Kosten, Abnützung und Reibung nicht in Rechnung bringen kann, man muss daher eine empirische oder induktive Regel aufzustellen suchen.

Da überhaupt an den Rädern mancherlei Detaildimensionen vorkommen, die nur empirisch bestimmt werden können, so habe ich einstens eine sehr grosse Anzahl von gut ausgeführten Rädern hinsichtlich der an ihnen vorkommenden Dimensionen untersucht, und es hat sich dabei die sehr einfache Regel herausgestellt, dass der Halbmesser des grösseren zweier ineinander greifenden Räder in der Regel 5 bis 6 mal so gross ist, als der Durchmesser der Welle, welche der Kraft entspricht, die das Rad überträgt. Nennt man also N den Effekt in Pferdekräften, den die Räder übertragen, n die Anzahl der Umdrehungen des grösseren Rades, d den Durchmesser in Centimetern einer Welle für N Pferdekräfte und n Umdrehungen, so ist zu setzen:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \quad \frac{R}{d} = 5 \text{ bis } 6, \text{ selten } 7 \text{ oder } 8 \quad . \; . \quad (1)$$

Dieses Verhältniss nennen wir die relative Grösse des Rades, und sagen von einem Rade, dessen relative Grösse 5 oder 6 ist, es sei ein 5- oder 6-faches Rad in Bezug auf eine gewisse Welle.

Sieben- oder gar achtfache Räder kommen nur selten, nämlich nur bei sehr grossen Uebersetzungszahlen vor. Für gewöhnlichere Uebersetzungen, bei welchen also die Uebersetzungszahl 1, 2 oder höchstens 3 ist, finden wir bei guten Construktionen immer nur fünf- bis sechsfache Räder und zwar fünffache für aufrechte Wellen, sechsfache für Räder an liegenden Wellen.

Hat man auf diese Weise den Halbmesser R des grösseren der beiden Räder bestimmt, so ergibt sich dann der Halbmesser r des kleineren Rades, indem man den Halbmesser R des grösseren Rades durch die Uebersetzungszahl dividirt.

Der Durchmesser d, welcher die relative Grösse des Rades bestimmt, ist zugleich der wirkliche Durchmesser der Welle des grösseren Rades, wenn Welle und Rad einerlei Kraft übertragen. Ueberträgt aber das Rad nur einen Theil der in der Welle enthaltenen Kraft, so ist d nur als eine zur Berechnung dienende ideale Hilfsgrösse anzusehen, die nicht realisirt wird.

Zähne. Zur Beurtheilung der Festigkeit eines Zahnes können wir denselben als einen parallelepipedischen Körper betrachten, auf dessen Ende der Druck P einwirkt.

Nennen wir Fig. 3, Tafel XI. α die Zahndicke, γ die Zahnlänge, β die Radbreite, so haben wir nach den Regeln der relativen Festigkeit:

$$P \gamma = \frac{1}{6} \mathfrak{S} \alpha^2 \beta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

wobei $\mathfrak{S}$ das Maximum der Spannungsintensität bedeutet. Aus (2) folgt:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{6}{\mathfrak{S}} \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{\frac{\beta}{\alpha}}\right)} \times \sqrt{P} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Die Verhältnisse $\frac{\gamma}{\alpha}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ sind innerhalb gewisser Grenzen willkürlich. Gewöhnlich ist: a) Wenn die Zähne beider Räder von Eisen und an den Kranz gegossen sind: $\frac{\gamma}{\alpha} = 1{\cdot}5$, $\frac{\beta}{\alpha} = 6$. b) Wenn die Zähne eines der Räder von Holz, die des anderen von Eisen sind: $\frac{\gamma}{\alpha} = 1$, $\frac{\beta}{\alpha} = 4$. Man erhält Dimensionen, die mit guten Constructionen übereinstimmen, wenn man nimmt: für Eisen $\mathfrak{S} = 90$, demnach erhält man

für einen Zahn von Eisen: $\alpha = 0{\cdot}13 \sqrt{P}$, $\beta = 6\,\alpha$, $\gamma = 1{\cdot}5\,\alpha$ (4)

Diese Zähne sind nur auf $\frac{1}{20}$ ihrer relativen Festigkeit in Anspruch genommen. Ein Bruch ist demnach nicht so leicht zu befürchten.

Diese Regeln können zur Bestimmung der Zahndimensionen gebraucht werden, wenn der Druck P entweder unmittelbar gegeben ist oder leicht gefunden werden kann, was wohl zuweilen, nicht aber gewöhnlich der Fall ist.

Wenn Winden, Krahne und derlei Lastenhebungsmaschinen zu construiren sind, kann man in der Regel die zwischen den Zähnen der Räderwerke statt findenden Pressungen ohne umständliche Rechnungen finden. Wenn dagegen Räder für Transmissionen, hydraulische Kraftmaschinen oder Dampfmaschinen angeordnet werden sollen, ist in der Regel der in Pferdekräften ausgedrückte Effekt N, den ein Rad überträgt und die Anzahl der Umdrehungen n desselben in einer Minute gegeben, bedarf es also einer ziemlich zeitraubenden Rechnung, um aus diesen Daten und aus dem Halbmesser R des Rades den Druck P zu berechnen.

Die Methode der Verhältnisszahlen gibt uns auch in diesem Falle eine sehr lehrreiche und bequem anwendbare Regel zur Bestimmung der Zahndimensionen. Diese Regel erhalten wir auf folgende Weise.

Die Lehre von der Torsionsfestigkeit gibt uns für den Durchmesser einer Welle, die einem Torsionsmoment P R zu widerstehen hat:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi\, T}}\; \sqrt[3]{P\, R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Durch Verbindung der Gleichungen (2) und (5) folgt:

$$\frac{d^3\, \pi\, T}{16\, R}\, \gamma = \frac{1}{6}\, \mathfrak{S}\, \alpha^2\, \beta \text{ oder } \beta = \frac{6\, \pi\, T}{16\, \mathfrak{S}}\, \frac{d^3\, \gamma}{R\, \alpha^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $\frac{\beta}{d^2}$ und zieht sodann die Quadratwurzel aus, so findet man nach geeigneter Gruppirung der Grössen:

$$\frac{\beta}{d} = \sqrt{\frac{6\, \pi\, T}{16\, \mathfrak{S}}\, \frac{\gamma}{\alpha}}\; \frac{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\frac{R}{d}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Multiplizirt man dagegen die Gleichung (6) mit $\frac{\beta^2}{d^3}$ und zieht dann die Kubikwurzel aus, so ergibt sich:

$$\frac{d}{\beta} = \sqrt[3]{\frac{16\, \mathfrak{S}\, \alpha}{6\, \pi\, T\, \gamma}}\; \sqrt[3]{\frac{R}{\beta}\, \frac{\alpha}{\beta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Vorausgesetzt, dass wir wie bisher immer den Wellendurchmesser nach den Formeln (6), Seite 164, bestimmen, nämlich nach

$$d = 0{\cdot}39\, \sqrt[3]{P\, R} = 16\, \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$$

so ist die Torsionsspannung $T = 90$. Führt man auch in (7) und (8) für $\mathfrak{S}$ und $\frac{\gamma}{\alpha}$ die Seite 207 angegebenen Werthe ein, so findet man:

$$\text{für eiserne Zähne} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\gamma}{\alpha} = 1{\cdot}5, \quad T = 90, \quad \mathfrak{S} = 90 \\[1em] \frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33\, \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\, \frac{d}{R}} \\[1em] \frac{d}{\beta} = 0{\cdot}83\, \sqrt[3]{\frac{R}{\beta}\, \frac{\alpha}{\beta}} \end{array} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Die Formeln für $\frac{\beta}{d}$ bestimmen das Verhältniss zwischen der Radbreite und dem Wellendurchmesser, wenn die relative Grösse

$\frac{R}{d}$ des Rades und das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ zwischen der Radbreite und der Zahndicke gegeben sind. Die Formeln für $\frac{d}{\beta}$ dagegen bestimmen das Verhältniss zwischen dem Wellendurchmesser und der Radbreite, wenn die Verhältnisse $\frac{R}{\beta}$ und $\frac{\beta}{\alpha}$ gegeben sind. Durch die eine dieser Regeln wird so zu sagen das Rad bestimmt, wenn die Welle gegeben ist, durch die andere die Welle, wenn das Rad bekannt ist.

Um diese Regeln zu gebrauchen, muss man sich noch über das Verhältniss $\frac{\beta}{\alpha}$ aussprechen. Wenn man den ganzen Umfang der Praxis ins Auge fasst, erkennt man leicht, dass es nicht zweckmässig ist, unter allen Umständen für $\frac{\beta}{\alpha}$ den gleichen Werth zu nehmen, sondern es ist angemessen:

1) $\frac{\beta}{\alpha}$ nur gleich 4 bis 5 zu nehmen für Räder zu Maschinen, die durch Menschenhände und mit geringer Geschwindigkeit bewegt werden und wenn ferner eine so gar sanfte Bewegung nicht gefordert wird, denn nimmt man $\frac{\beta}{\alpha}$ klein, so werden die Zähne dick und die Zahntheilung gross, und wird die Anzahl der Zähne so wie die Radbreite klein. Diese Räder werden daher billig und genügen doch für die bezeichneten Zwecke.

Es ist ferner zweckmässig:

2) $\frac{\beta}{\alpha} = 6$ zu nehmen für gewöhnliche Transmissionsräder und Triebwerke, die wohl mit ziemlicher aber doch nicht mit extravaganter Geschwindigkeit laufen, denn so wie man $\frac{\beta}{\alpha}$ grösser nimmt, wird die Zahntheilung klein, die Anzahl der Zähne, so wie auch die Radbreite grösser, was zur Folge hat, dass die Bewegung sanfter und die Abnutzung der Zähne vermindert wird.

Endlich ist es angemessen:

3) $\frac{\beta}{\alpha}$ gleich 7 bis 8 zu nehmen bei sehr schnell laufenden Rädern, und wenn eine möglichst vollkommene Bewegung gefordert wird, wie z. B. bei Werkzeugmaschinen, die genauere und feinere Funktionen durchzuführen haben.

Berücksichtiget man diese Bemerkungen, so wird man in jedem besonderen Falle einen angemessenen Werth für $\frac{\beta}{\alpha}$ zu wählen wis-

sen, und ist dies geschehen und hat man sich bereits über die relative Grösse des Rades nach der Seite 206 aufgestellten Regel ausgesprochen, so kann man dann vermittelst der Gleichungen (9) die Zahndimensionen bestimmen.

Bevor wir dies durch Beispiele erläutern, wollen wir erst noch Regeln für die Bestimmung der übrigen Grössenverhältnisse der Räder aufstellen und zwar zunächst für die Anzahl der Zähne.

Nennt man Z die Anzahl der Zähne eines Rades, t die Zahntheilung, R den Halbmesser, so ist:

$$Z = \frac{2 R \pi}{t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

Diese Gleichung kann aber auch geschrieben werden wie folgt:

$$Z = 2 \pi \frac{\alpha}{t} \frac{\beta}{\alpha} \frac{d}{\beta} \frac{R}{d}$$

Führt man hier für $\frac{d}{\beta}$ den Werth ein, welchen die Gleichung (7) darbietet, so findet man:

$$Z = 2 \pi \frac{\alpha}{t} \sqrt{\frac{16 \mathfrak{S}}{6 \pi T} \frac{\alpha}{\gamma}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Sind die Zähne beider Räder von Eisen, so darf man $\frac{t}{\alpha} = 2 \cdot 1$ setzen. Sind dagegen die Zähne des einen Rades von Holz, die Zähne des anderen von Eisen, so ist $\frac{t}{\alpha} = 2 \cdot 67$, vorausgesetzt, dass man mit α die Dicke und überhaupt durch $\alpha\, \beta\, \gamma$ stets die Dimensionen des *Eisenzahnes* bezeichnet.

Für eiserne Zähne ist zu setzen:

$$\frac{t}{\alpha} = 2 \cdot 1, \quad \mathfrak{S} = 90, \quad T = 90, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \cdot 5$$

wird demnach:

$$Z = 2 \cdot 25 \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Sind dagegen die Zähne des einen Rades von Holz, die des anderen von Eisen, so ist zu setzen:

$$\frac{t}{\alpha} = 2 \cdot 67, \quad \mathfrak{S} = 90, \quad T = 90, \quad \frac{\gamma}{\alpha} = 1 \cdot 5$$

wird mithin:

$$Z = 1{\cdot}79 \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Die Radhülse. Die Dimensionen der Radhülse können nur durch empirische Regeln bestimmt werden. Die Länge hängt ab theils von der Radbreite, theils von dem Radhalbmesser. Die Metalldicke der Hülse hängt ab theils von der Wellendicke, theils von der Energie, mit welcher der Keil eingetrieben wird.

Folgende empirische Regeln geben angemessene Dimensionen:

Länge der Hülse	$l = \beta + 0{\cdot}06\ R$	(14)
Durchmesser der Höhlung und Durchmesser des Wellenkopfes, auf welchen das Rad aufgekeilt wird	$d_1 = \frac{5}{4}\ d$	
Metalldicke der Hülse	$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ d$	
Breite des Keiles	$k = 0{\cdot}9\ \delta$	
Dicke des Keiles	$k_1 = \frac{1}{2}\ k$	

Die Arme. Für die Anzahl der Arme des Rades stellen wir die Regel auf, dass diese Anzahl gleich genommen werden soll derjenigen ganzen Zahl, welche der relativen Grösse $\frac{R}{d}$ des Rades am nächsten liegt.

Die Querschnittsform der Arme ist entweder ⊤ oder + förmig. Die erstere dieser Formen wird bei Kegelrädern, die letztere bei Stirnrädern angewendet. Der am Umfang des Rades und in seiner Ebene wirkenden Kraft hat nur die eine der beiden Nerven des Querschnitts Widerstand zu leisten; die andere schützt gegen die Einwirkung von solchen störenden Kräften, deren Richtung auf der Ebene des Rades senkrecht steht. Nennt man $\mathfrak{b}$ die Dicke, $\mathfrak{h}$ die Breite der Hauptnerve des Armes, letztere Dimension gemessen an der Axe des Rades, so darf man nach den Regeln der relativen Festigkeit die Gleichung aufstellen:

$$\frac{P R}{\mathfrak{N}} = \frac{1}{6}\ \mathfrak{S}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{h}^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Anderseits hat man wiederum für die Welle $\mathfrak{d}$, welche der Kraft entspricht, die die Arme übertragen:

$$P\ R = \frac{T \pi}{16}\ \mathfrak{d}^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Durch Elimination von P R folgt aus diesen Gleichungen:

$$\frac{h}{d} = \frac{\sqrt[3]{\frac{6 \pi T}{16 \mathfrak{S}} \frac{h}{b}}}{\sqrt[3]{\mathfrak{N}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$\frac{h}{b}$ kann bei allen Rädern constant und zwar gleich 5 genommen werden. $\frac{6 \pi T}{16 \mathfrak{S}}$ ist selbstverständlich constant. Durch Vergleichung mit guten Construktionen hat es sich gezeigt, dass man setzen darf $\sqrt[3]{\frac{6 \pi T}{16 \mathfrak{S}} \frac{h}{b}} = 1{\cdot}7$, demnach:

$$\frac{h}{d} = \frac{1{\cdot}7}{\sqrt[3]{\mathfrak{N}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

welche Formel mit der für die Rollenarme aufgestellten übereinstimmt.

Hiermit haben wir nun alle Regeln zur Bestimmung der Detaildimensionen der Räder hergeleitet. Man findet diese Regeln in den Resultaten für den Maschinenbau, Seite 66 bis 75, in der Reihenfolge zusammengestellt und in Kürze erklärt, wie es der praktische Gebrauch solcher Formeln und Regeln erfordert.

Bisher haben wir angenommen, dass die totale in einer Welle enthaltene Kraft vermittelst zweier Räder auf eine zweite Welle übertragen werden soll, was nicht immer der Fall ist, sondern es kommen auch Fälle vor, in welchen nur ein Theil der Kraft übertragen und nicht blos an eine, sondern an mehrere Wellen übergeben wird.

Normale und anormale Räder. Wir nennen die Räder normale oder anormale Räder, je nachdem sie die totale in der treibenden Welle wirkende Kraft oder nur einen Theil dieser Kraft übertragen.

Unsere Regeln gelten auch für anormale Räder, wenn man den Berechnungen passende Wellendurchmesser zu Grunde legt. Man muss nämlich, um mit den aufgestellten Regeln irgend eine von den Dimensionen des Rades zu bestimmen, denjenigen Wellendurchmesser der Rechnung zu Grunde legen, welcher dem Effekt entspricht, den der Bestandtheil zu übertragen hat, und der Anzahl der Umdrehungen desselben in einer Minute. Uebertragen die Arme des Rades 20 Pferdekräfte mit 160 Umdrehungen, so muss man zur Berechnung

der *Arme* des Rades eine Welle von $16\sqrt[3]{\frac{20}{160}} = 8$ Centm. zu Grunde legen. Werden die 20 Pferdekräfte an *zwei* Räder abgegeben, und zwar an jedes 10 Pferdekräfte, so muss man zur Berechnung der Zähne der Räder eine Welle von $16\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}\,20}{160}} = 6{\cdot}4$ Centm. zu Grunde legen. Die folgenden Beispiele werden am besten zeigen, wie man sich in den mannigfaltigsten Fällen zu benehmen hat. Ich nehme an, dass man die „Resultate" zur Hand habe.

Erste Aufgabe. Es sollen normale Transmissionsräder A und B, Fig. 4, Tafel XI., für folgende Daten berechnet werden:

Pferdekraft in der treibenden Welle a, in den beiden Rädern A und B und in der getriebenen Welle b	20
Umdrehungen der treibenden Welle in 1 Minute	80
Umdrehungen der getriebenen Welle in 1 Minute	160

Der wirkliche Durchmesser der treibenden Welle ist

$16\sqrt[3]{\frac{20}{80}}$ $= 10$ Centm.

und so gross ist auch in der vorliegenden Aufgabe der Durchmesser der idealen Hilfswelle zur Berechnung der Arme und Zähne des treibenden Rades.

Durchmesser der getriebenen Welle $16\sqrt[3]{\frac{20}{160}}$. . .	$= 8$ „
Relative Grösse des treibenden Rades	$= 6$ „
Halbmesser des treibenden Rades 6×10	$= 60$ „
Halbmesser des getriebenen Rades	$= 30$ „
Für Transmissionsräder ist $\frac{\beta}{\alpha}$	$= 6$ „
Zahnbreite (für $\frac{R}{d} = 6$, $\frac{\beta}{\alpha} = 6$) $\beta = 1{\cdot}33 \times 10$.	$= 13{\cdot}3$ „

(Tabelle Seite 70 der Resultate.)

Wenn die Zähne beider Räder von Eisen sein sollen ist:

Anzahl der Zähne des treibenden Rades	82
Anzahl der Zähne des getriebenen Rades	41
Anzahl der Arme des treibenden Rades	6
Relative Grösse des getriebenen Rades $\frac{30}{8}$	4

Querschnittsdimensionen der Arme { treibendes Rad $0{\cdot}94 \times 10 = 9{\cdot}4$; getriebenes Rad $1{\cdot}08 \times 8 = 8{\cdot}6$ }

Länge der Radnabe oder Hülse . $\left\{\begin{array}{l}\text{treib. R. } 13 \cdot 3 + 0 \cdot 06 \times 60 = 16 \cdot 9 \\ \text{getr. R. } 13 \cdot 3 + 0 \cdot 06 \times 30 = 15 \cdot 1\end{array}\right.$

Durchmessser der Höhlung . . $\left\{\begin{array}{l}\text{treibendes Rad } \frac{5}{4}\, 10 = 12 \cdot 5 \\ \text{getriebenes Rad } \frac{5}{4}\, 8 = 10\end{array}\right.$

Metalldicke der Hülse $\left\{\begin{array}{l}\text{treibend. R. } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, 10 = 3 \cdot 83 \\ \text{getrieb. R. } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\, 8 = 3 \cdot 16\end{array}\right.$

Zweite Aufgabe. Es soll eine Radübersetzung, Fig. 5, Tafel XI., für den Fall berechnet werden, dass nur die Hälfte der in der treibenden Welle a enthaltenen Kraft auf die getriebene Welle b übertragen werden soll.

Der Durchmesser der treibenden Welle sei 14 Centimeter; die Geschwindigkeit von b drei mal so gross, als jene von a.

In diesem Falle sind die wirklichen Wellendurchmesser

für a	a_1	b
14	$\frac{14}{\sqrt[3]{2}} = 11 \cdot 1$	$14 \sqrt[3]{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 6 \cdot 0$

Zur Bestimmung der Arme und Zähne des Rades A dient eine Welle von $\frac{14}{\sqrt{2}} = 11 \cdot 1$ Centimeter. Wir erhalten demnach:

Halbmesser des Rades A $= 6 \times 11 \cdot 1$ $= 66 \cdot 6$

Halbmesser des Rades B $= 22 \cdot 2$

Zahnbreite (für $\frac{R}{d} = 6$, $\frac{\beta}{\alpha} = 6) = 1 \cdot 33 \times 11 \cdot 1$ $= 14 \cdot 8$

Relative Grösse des Rades B $\frac{22 \cdot 2}{6}$ nahe $= 4$

Arme . $\left\{\begin{array}{l}\text{Anzahl für A} \ldots\ldots = 6 \\ \text{Anzahl für B} \ldots\ldots = 4 \\ \text{Dimensionen h} \left\{\begin{array}{l}\text{für A } 11 \cdot 1 \times 0 \cdot 94 \ldots = 10 \cdot 4 \\ \text{für B } 6 \times 1 \cdot 08 \ldots = 6 \cdot 5\end{array}\right.\end{array}\right.$

Das Rad B ist in Bezug auf die Welle b ganz normal. Das Rad A dagegen weicht von einem Normalrad dadurch ab, dass die Höhlung seiner Nabe $\frac{5}{4}\, 14 = 17 \cdot 5$ Centimenter, also sehr gross sein muss, um auf die starke Welle von 14 Centimeter Durchmesser aufgekeilt werden zu können.

Dritte Aufgabe. Fig. 6 und 7, Tafel XI. Ein Theil der in einer Welle a enthaltenen Kraft soll an zwei andere Wellen b und c übertragen werden.

Die Welle a sei bereits richtig bestimmt, und ihr Durchmesser sei gleich d = 20 Centimeter, man kennt aber weder die Pferdekraft N noch die Anzahl der Umdrehungen n von a.

Durch die Uebersetzung von a auf b soll $\frac{1}{4}$ N übertragen werden und die Anzahl der Umdrehungen von B und b soll $\frac{3}{2}$ n sein.

Durch die Uebersetzung von a auf c soll $\frac{1}{6}$ N übertragen werden und die Anzahl der Umdrehungen von C und c sei $\frac{3}{2}$ n.

Berechnen wir zunächst die wirklichen Wellendurchmesser von b und c.

Es ist gegeben $d = 16\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$. . . , ... $= 20$

und es folgt nun:

Durchmesser von $b = 16\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4}N}{\frac{3}{2}n}} = \frac{d}{\sqrt[3]{6}}$ $= 11$

Durchmesser von $c = 16\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{6}N}{\frac{3}{2}n}} = \frac{d}{\sqrt[3]{9}}$ $= 9{\cdot}5$

Die Arme des Rades A übertragen $\frac{1}{4}N + \frac{1}{6}N = \frac{5}{12}N$

Pferdekräfte mit n Umdrehungen.

Die zur Berechnung der Arme von A gehörende ideale

Welle ist demnach $16\sqrt[3]{\frac{\frac{5}{12}N}{n}} = d\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$ $= 14{\cdot}8$

Geben wir dem Rade A sechs Arme, so werden die Dimensionen dieser Arme $h = 14{\cdot}8 \times 0{\cdot}94$ $=$ 14 Centm.

Die Zähne von A haben dem Rade B $\frac{1}{4}$ N, dem Rade C $\frac{1}{6}$ N Pferdekraft mitzutheilen. Da sie nicht zweierlei Dimensionen erhalten können, so bleibt nichts anderes übrig, als sie für $\frac{1}{4}$ N und n zu construiren. Die ideale Welle zur Berechnung der Zähne von A ist demnach:

$16\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{4}N}{n}} = \frac{d}{\sqrt[3]{4}}$ $= 12{\cdot}6$

Wir nehmen nun den Halbmesser von A = 12·6 × 6 . . . = 75·6

Halbmesser von B und C = 75·6 × $\frac{2}{3}$ = 50·4

Radbreite der Räder A B C = 1·33 × 12·6 = 16·7

Von diesen drei Rädern ist nur allein B ein Normalrad, die beiden andern erhalten abnorme Verhältnisse. A erhält starke Arme und schwache Zähne, C dagegen starke Zähne und schwache Arme. Für die praktische Ausführung wird es jedoch besser sein, B und C ganz übereinstimmend zu machen, um so die Kosten eines neuen Modells zu ersparen.

Vierte Aufgabe. Eine Dampfmaschine und eine Turbine haben zusammen eine Fabrik zu treiben, Fig. 8, Tafel XI.

a wird von der Dampfmaschine von 40 Pferdekräften getrieben, und macht 30 Umdrehungen, b wird von der Turbine von 20 Pferdekräften getrieben und macht 40 Umdrehungen, c nimmt die ganze Kraft von 40 + 20 = 60 Pferden in sich auf und soll 80 Umdrehungen machen.

Die wirklichen Wellen sind:

a	b	c
$16\sqrt[3]{\frac{40}{30}} = 17{\cdot}6$	$16\sqrt[3]{\frac{20}{40}} = 12{\cdot}7$	$16\sqrt[3]{\frac{60}{80}} = 14{\cdot}7$

Das Rad A ist als Normalrad zu behandeln, denn die Welle, Arme und Zähne übertragen die gleiche Kraft. Es ist also zu nehmen:

Halbmesser von A = 6 × 17·6 = 105·6

Zahnbreite β = 1·33 × 17·6 = 23·4

Anzahl der Arme = 6

Armbreite 17·6 × 0·94 = 16·5

Das Rad B kann nun nicht mehr normale Verhältnisse erhalten. Zunächst ist klar, dass die Umfangsgeschwindigkeiten von A, B und C übereinstimmen müssen. Es muss daher sein:

Halbmesser von B = 105·6 × $\frac{30}{40}$ = 79·2

Die relative Grösse des Rades B ist demnach $\frac{79{\cdot}2}{14{\cdot}7}$ nahe = 5

Die Zähne zweier in einander greifenden Räder müssen gleiche Theilungen und gleiche Dimensionen haben. Da nun C in A und in B eingreift, so müssen nothwendig die Zähne und Theilungen dieser

drei Räder übereinstimmen; die Zähne von B müssen also stärker gemacht werden, als für die Kraft, welche sie zu übertragen haben, nothwendig ist. Die Arme von B können nach der Welle b und die Arme von C nach der Welle c genommen werden. Der Halbmesser des Zwischenrades C wird durch die Uebersetzungszahlen bestimmt. Derselbe wird $\frac{30}{80}$ vom Halbmesser des Rades A oder $\frac{40}{80}$ vom Halbmesser des Rades B, demnach gleich 39·6 Centimeter.

Diese anormalen Räder muss man zwar so viel als möglich zu vermeiden suchen, weil ihre Herstellung kostspielig ist, indem man meistens neue Modelle machen muss, allein bei complizirteren Transmissionen und Anwendung von combinirten Betriebsmotoren lassen sie sich nun einmal nicht vermeiden. Indessen wenn die Räder durch Sandmassen geformt werden, sind die Anfertigungskosten eines abnormen Rades nicht grösser, als die eines normalen Rades.

Vortheile und Nachtheile der Räder mit angegossenen eisernen und mit eingesetzten hölzernen Zähnen.

Um zu entscheiden, ob in einem vorliegenden Fall die Zähne der Räder von Eisen oder von Holz gemacht werden sollen, muss man die Vortheile und Nachtheile dieser beiden Anordnungen in Erwägung ziehen.

Die Zähne beider Räder von Eisen.

Vortheile. a) Die Zähne sind mit dem Radkörper molekular verbunden, daher können sie zwar abgebrochen aber nicht gelockert werden. b) Eiserne Zähne werden durch die Reibung äusserst langsam deformirt; Räder mit eisernen Zähnen können daher durch sehr lange Zeit eine sanfte und richtige Bewegung gewähren. c) Bei starken Uebersetzungen und grosser Geschwindigkeit kommen in einer bestimmten Zeit die Zähne des Getriebes sehr oft in Eingriff, sind daher einer raschen Abnutzung ausgesetzt. Für kleine Getriebe sind demnach eiserne Zähne zweckmässig. d) Erfolgt die Bewegung einer Maschine langsam und wird kein hoher Grad von Genauigkeit der Bewegung verlangt (Krahnen, Winden), so können zur Anfertigung der Räder ältere bereits vorhandene Modelle selbst dann benutzt werden, wenn sich dieselben etwas verzogen haben sollten. In diesem Fall sind die Räder mit eisernen Zähnen am billigsten. e) Eiserne Zähne können selbst bei ganz kleinen Rädern, wie sie bei Arbeitsmaschinen oft vorkommen, gebraucht werden. f) Eiserne Zähne können zu-

weilen direkt geschnitten werden und dann gewähren dieselben für eine lange Dauer eine genaue Bewegung; sind jedoch kostspielig. Räder mit geschnittenen Zähnen sind für solche Arbeitsmaschinen, die eine sehr genaue Bewegung verlangen, sehr vortheilhaft.

Nachtheile. g) Wenn ein eiserner Zahn bricht, muss das ganze Rad durch ein neues ersetzt werden, und hat das Rad mit dem ausgebrochenen Zahne nur den Werth von altem Eisen. h) Wenn ein Rad mit eisernen Zähnen eine genaue Bewegung gewähren soll, kann es nicht vermittelst eines bereits vorhandenen alten Modells angefertigt werden, denn alte Modelle sind stets etwas unrund. Genaue Räder mit eisernen Zähnen erfordern daher in der Regel neue, demnach kostspielige Modelle. i) Räder mit eisernen Zähnen verursachen viel Geräusch, was in Arbeitssälen sehr störend ist. k) Wenn eiserne Zähne auch bei raschem Gang eine genaue Bewegung gewähren sollen, müssen die Zähne gemeisselt und gefeilt werden, was insbesondere bei grossen Rädern sehr kostspielig ist.

Die Zähne der Räder von Holz, die des Getriebes von Eisen.

Vortheile. m) Der Körper eines eisernen Rades mit hölzernen Zähnen ist so zu sagen von ewiger Dauer. Bricht ein Zahn, so ist er leicht ersetzt. Nutzen sich die Zähne ab, so können sie leicht durch neue ersetzt werden, ohne dass dabei der Radkörper im mindesten leidet. n) Zur Herstellung des Körpers eines Rades mit hölzernen Zähnen können alte Modelle gebraucht werden, selbst wenn sie sich etwas verzogen hätten; denn wenn auch der Umfang des Radkörpers etwas unrund sein sollte, so können dennoch die Zähne vollkommen richtig gemacht werden, wenn die ganze Masse der Zahnkörper, nachdem sie in das Rad eingesetzt worden sind, auf der Drehbank abgedreht, und der Theilriss auf den Zahnkörper aufgerissen wird. o) Sind die Zähne des Rades von Holz, so kann das gleiche Modell für sehr verschiedene Uebersetzungen gebraucht werden, weil sich mit der Uebersetzung zwar die Form der Zähne ändert, die Gestalt und Grösse des Radkörpers dagegen unverändert bleiben kann. p) Wenn Zähne von Holz und Eisen aufeinander wirken, entsteht weniger Geräusch, als wenn die Zähne beider Räder von Eisen sind.

Nachtheile. q) Die richtige Bewegung ist nicht von so langer Dauer, als wenn die Zähne beider Räder von Eisen sind. r) Eine

dauernd haltbare Befestigung der hölzernen Zahnkörper mit dem Radkörper ist kaum zu erreichen.

Aus den aufgezählten Vortheilen und Nachtheilen der beiden Anordnungen geht hervor:

A) Dass an den Radkörper angegossene Zähne zu wählen sind: 1) für kleine messingene Räder für Uhren oder feinere Werkzeugmaschinen; 2) für kleine Räder von Gusseisen für Spinnmaschinen und ähnliche Arbeitsmaschienen; 3) für Werkzeugmaschinen, Drehbänke, Hobelmaschinen etc.; 4) für Räder zu Krahnen, Winden; 5) für Getriebe, die in grosse Räder mit hölzernen Zähnen einzugreifen haben; 5) für Transmissionsräder, die einen dauernd richtigen und sanften Gang gewähren sollen.

B) Dass dagegen hölzerne Zähne zu wählen sind: 1) für grosse Räder bei starken Uebersetzungen; 2) für Transmissionsräder, die in Arbeitssälen zu treiben haben und kein Geräusch verursachen sollen.

Anfertigung der Räder. Die Anfertigungsweise der Räder richtet sich nach ihrer Grösse und nach dem Materiale.

Kleine Räder zu Uhren und feinen Arbeitsmaschinen werden aus Messing oder Rothguss hergestellt. Die Räder der Taschenuhren und kleineren Zimmeruhren werden aus Messingblech gemacht. Räder von 0·3 bis 1·5 Centimeter Zahnbreite werden gegossen, die Zähne eingeschnitten. Hat man nur einzelne Räder herzustellen, wie z. B. zu Modellen, so ist es am zweckmässigsten, die Zähne vermittelst eines nach den Zahnlücken geformten Meisels auszuhobeln. Hat man, wie es in der Uhrenfabrikation der Fall ist, eine grosse Anzahl gleicher Räder herzustellen, so bedient man sich zum Schneiden der Zähne einer rotirenden Fraise. Dünne Blechräder werden in grösserer Anzahl aufeinander geschichtet und mit der Fraise geschnitten, wie wenn die ganze Masse ein einziges Rad wäre. Das Schneiden geht sehr schnell vor sich, weil bei Messing und Rothguss die Umfangsgeschwindigkeit der Fraise ungemein gross sein kann, ohne dass eine Erhitzung derselben eintritt, bei welcher der Stahl seine Härte verliert.

Kleine gusseiserne Räder zu Spinnmaschinen werden mit messingenen Modellrädern geformt, die, wie so eben beschrieben wurde, hergestellt werden.

Grössere und ganz grosse Räder werden aus Gusseisen hergestellt und theils mit Modellen theils mit Sandmassen geformt.

Beide Anfertigungsweisen haben ihre Vortheile und Nachtheile. Ist man bereits im Besitz eines für einen bestimmten vorliegenden

Zweck tauglichen Modelles, das noch nicht gelitten hat, so ist der Modellguss die billigste Anfertigungsart; allein ein sehr genaues Rad erhält man auf diese Weise nicht, weil jedes alte Modell etwas unrund ist. Neue Modelle anzufertigen ist nur in dem Falle angemessen, wenn die Wahrscheinlichkeit vorhanden ist, dass das Modell in der Folge öfters gebraucht wird. Handelt es sich um sehr genaue oder um solche Räder, die in der Folge wohl sehr selten wiederholt herzustellen sind, wie es besonders bei anormalen Rädern der Fall ist, so ist es am zweckmässigsten, kein Modell anzufertigen, sondern mit Sandmasse zu formen, denn die Anfertigung der Formkästen zur Herstellung der Sandmasse ist nicht kostspielig, die Summe der Arbeiten, welche das Formen mit Sandmasse verursacht ist dagegen ziemlich beträchtlich.

Es ist hier nicht der Ort, die bei Anfertigung eines Radmodells vorkommende Schreinerarbeit im Detail zu besprechen, wir begnügen uns, diejenige Verfahrungsweise hervor zu heben, wodurch sehr genaue und vollkommene Räder erhalten werden. Um ein Modell herzustellen für ein Rad mit angegossenen Zähnen, wird zuerst der Radkörper aus einzelnen Holzstücken zusammengefügt, zusammengenagelt und theilweise zusammengeleimt. In diesen Radkörper werden dann die aus zartfaserigem Holz herzustellenden Zahnklötzchen mit Schwalbenschwänzen in der Weise eingesetzt, dass sie am Umfang des Rades eine continuirliche Masse bilden. Hierauf wird das Modellrad in eine Drehbank eingespannt und die Hülse ausgebohrt, wird der äussere Umfangstheil, insbesondere der Holzring der Zahnkörper glatt abgedreht und wird der Theilriss des Rades auf beiden Seiten desselben in die Holzmasse der Zahnkörper eingeritzt. Um endlich die Zähne zu formen, wird das Modellrad von der Drehbank abgenommen, wird der aufgeritzte Theilriss vermittelst eines zweispitzigen Zirkels nach der Anzahl der Zähne getheilt, wird hierauf jeder Zahn vermittelst einer genauen Lehre aus Messingblech aufgeritzt und werden endlich die Zahnlücken zuerst mit einer Säge, dann mit einer gröberen Raspel und zuletzt mit einer Schlichtfeile ausgearbeitet.

Um ein Rad mit eisernem Körper und hölzernen Zähnen anzufertigen, wird zuerst das Modell für den Radkörper hergestellt, dann abgeformt und gegossen. Hierauf werden in den Umfang des gegossenen Radkörpers die hölzernen Zahnkörper so eingesetzt und befestiget, dass sämmtliche Holzklötzchen am Umfang des Rades eine continuirliche Masse bilden. Nun wird die Hülse des Rades nach dem Durchmesser des Wellenkopfes, auf welchen das Rad aufzukeilen ist, ausgebohrt und wird hierauf das Rad auf den Well-

kopf wirklich aufgekeilt. Ist dies geschehen, so wird die mit dem Rade versehene Welle zwischen die Spitzen einer Drehbank eingespannt, wird die Holzmasse der Zahnkörper abgedreht und werden die Theilrisse des Rades zu beiden Seiten in den Holzring eingeritzt. Hierauf werden die Theilrisse mit einem zweispitzigen Zirkel in so viele gleiche Theile getheilt, als die Anzahl der Zähne beträgt, werden die Zahnformen vermittelst einer genauen Lehre aus Messingblech aufgeritzt und werden schliesslich die Zahnlücken mit Säge, Raspel und Schlichtfeile ausgearbeitet.

Bei diesem Verfahren muss das Rad vollkommen rund und absolut genau concentrisch mit der Drehungsaxe ausfallen.

Die Schraube ohne Ende.

(Resultate Seite 75.)

Um die einzelnen Dimensionen derjenigen mechanistischen Anordnung zu bestimmen, welche Schraube ohne Ende (in der Handwerkssprache Wurm und Wurmrad) genannt wird, muss man berücksichtigen, dass durch die Reibung zwischen den Gewinden der Schraube und den Zähnen des Rades ein beträchtlicher Theil der in der treibenden Axe enthaltenen Kraft verloren geht.

Nennen wir, Fig. 9, Tafel XI., d den Durchmesser der Schraubenaxe a, r den Halbmesser der Schraube A, n die Anzahl ihrer Umdrehungen in einer Minute, N den Effekt in Pferdekräften, welcher in dieser Axe a treibend wirkt, d_1 den Durchmesser der Axe des Zahnrades B, R den Halbmesser desselben, α und β die Zahndimensionen, n_1 die Anzahl der Umdrehungen der Radaxe in einer Minute, N_1 den Effekt in Pferdekräften, welchen die Radaxe empfängt, wenn die Schraubenaxe mit N Pferdekräften getrieben wird, $\mathfrak{z}$ die Anzahl der Zähne des Rades.

Da das Zahnrad bei einer Umdrehung der Schraube um eine Zahntheilung fortrückt, so gibt die Anzahl $\mathfrak{z}$ der Zähne des Rades an, wie oftmal die Schraubenaxe umgedreht werden muss, damit das Schraubenrad einen Umgang macht. Man hat daher:

$$\frac{n}{n_1} = \mathfrak{z} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Zur Bestimmung der Axendurchmesser hat man:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}, \quad d_1 = 16 \sqrt[3]{\frac{N_1}{n_1}} \quad \ldots \ldots (2)$$

hieraus folgt:

$$\frac{d_1}{d} = \frac{16\sqrt[3]{\frac{N_1}{n_1}}}{16\sqrt[3]{\frac{N}{n}}} = \sqrt[3]{\frac{N_1}{N}\,\frac{n}{n_1}}$$

oder weil vermöge (1) $\frac{n}{n_1} = 3$ ist:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[3]{\frac{N_1}{N}}\,\sqrt[3]{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Das Verhältniss $\frac{N_1}{N}$ hängt ab von der mehr oder weniger vollkommenen Ausführung; aber selbst für die bestmöglichsten Ausführungen ist $\frac{N_1}{N}$ nicht grösser als $\frac{1}{2}$, in der Regel sogar nur $\frac{1}{3}$. Dies wird in der Folge in der Theorie der Reibung nachgewiesen.

Die Zähne des Rades B sind wie für ein gewöhnliches mit einer Welle vom Durchmesser d_1 verbundenes Zahnrad zu bestimmen. Wir erhalten daher vermöge des Ausdruckes (12), Seite 210:

$$\mathfrak{z} = 2{\cdot}25 \left(\frac{R}{d_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sucht man aus diesem Ausdruck R und setzt für d_1 den Werth, welcher aus (3) folgt, so findet man:

$$\frac{R}{d} = \frac{\left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(2{\cdot}25\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}}\,\mathfrak{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese Gleichung bestimmt den Radhalbmesser, wenn d und $\mathfrak{z}$ gegeben sind.

Nun ist ferner vermöge (9), Seite 208, für ein Normal-Zahnrad

$$\frac{\beta}{d_1} = 1{\cdot}33\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\,\frac{d_1}{R}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

hieraus folgt:

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,\frac{d_1}{d}\sqrt{\frac{d_1}{R}} = 1{\cdot}33\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{\frac{d}{R}}\left(\frac{d_1}{d}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Setzt man in diesen Ausdruck für $\frac{d_1}{d}$ und für $\frac{d}{R}$ die Werthe, welche die Gleichungen (3) und (4) darbieten, so findet man:

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\left(2{\cdot}25\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}} \left(3\right)^{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}}$$

oder

$$\frac{\beta}{d} = 1{\cdot}33 \left(2{\cdot}25\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

hierdurch ist die Zahnbreite bestimmt.

Die Verhältnisse $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{r}{d}$ bleiben unbestimmt und können innerhalb gewisser Grenzen nach Belieben genommen werden.

Nehmen wir $\frac{\beta}{\alpha} = 4$, $\frac{r}{d} = 2$, so finden wir aus den Formeln (3), (5), (7):

für $\frac{N_1}{N} =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{d_1}{d} =$	$0{\cdot}78 \sqrt[3]{3}$	$0{\cdot}70 \sqrt[3]{3}$	$0{\cdot}63 \sqrt[3]{3}$
$\frac{R}{d} =$	$0{\cdot}28\ 3$	$0{\cdot}26\ 3$	$0{\cdot}23\ 3$
$\frac{\beta}{d} =$	3·43	3·00	2·77

. . . (8)

Vermittelst dieser Resultate kann man nun die richtigen Abmessungen des Wurmapparates leicht bestimmen.

Winkelhebel.

(Resultate Seite 76, Tafel XV.)

Winkelhebel von Schmiedeeisen.

Es sei Fig. 10, Tafel XI., A C B ein Winkelhebel. Am Ende jedes der beiden Schenkel sei ein Zapfen angebracht, der Hebel selbst sei auf einen feststehenden Zapfen gesteckt und drehe sich um denselben.

Diese spezielle Einrichtung des Hebels ist nur zum Behufe der Rechnung angenommen und weil sich andere Einrichtungen leicht

darauf zurückführen lassen. Die zu bestimmenden Grössen sind die drei Zapfen bei A, B und C und die Dimensionen des Querschnittes eines der Arme, gemessen am Drehungspunkt C.

Nennen wir:

p q die Längen der Schenkel A C und B C,

δ_p δ_q die Durchmesser der Zapfen bei A und B,

d den Durchmesser des Drehungszapfens bei C,

P und Q die bei A und B senkrecht gegen die Schenkel wirkenden Kräfte,

$\widehat{BCA} = \alpha$ den Winkel, den die Richtungen der Schenkel bilden,

Für einen zu construirenden Hebel dürfen wir P p q und α als die gegebenen Grössen ansehen. Im Gleichgewichtszustand der Kräfte ist $P p = Q q$, demnach $Q = P \frac{p}{q}$.

Nach den Seite 158 für schmiedeeiserne Zapfen aufgestellten Regeln erhalten wir zunächst:

$$\delta_p = 0{\cdot}12 \sqrt{P},$$

$$\delta_q = 0{\cdot}12 \sqrt{Q} = 0{\cdot}12 \sqrt{P \frac{p}{q}} = 0{\cdot}12 \sqrt{P} \sqrt{\frac{p}{q}} = \delta_p \sqrt{\frac{p}{q}}. \quad (1)$$

Um den Durchmesser d des Drehungszapfens zu bestimmen, muss zunächst der Druck R ausgemittelt werden, welchem derselbe ausgesetzt ist. Verlängern wir die Richtungen der Kräfte P und Q bis D, machen $D E = P$, $D G = Q$ und construiren das Parallelogramm D E F G, so ist die Diagonale D F der Grösse und Richtung nach der Druck R, welchen der Drehungszapfen auszuhalten hat und es muss, wegen des vorausgesetzten Gleichgewichtszustandes der Kräfte P und Q, die verlängerte Richtung von D F durch den Drehungspunkt C gehen. Aus der Figur folgt:

$$D F = R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2 P Q \cos \alpha}$$

oder auch wenn man für Q seinen Werth $P \frac{p}{q}$ substituirt:

$$R = P \sqrt{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \left(\frac{p}{q}\right) \cos \alpha}$$

Nun ist aber $d = 0{\cdot}12 \sqrt{R}$, demnach findet man wegen $\delta_p = 0{\cdot}12 \sqrt{P}$

$$d = \delta_p \sqrt[4]{1 + \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2 \left(\frac{p}{q}\right) \cos \alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Werthe dieser vierten Wurzel können leicht in eine Tabelle (Seite 77 der Resultate) gebracht werden, wodurch man jeder Rechnung überhoben wird. Ist z. B. $\frac{p}{q} = 5$, $\alpha = 120^0$, so findet man aus dieser Tabelle, dass der Werth der vierten Wurzel 2·4 beträgt; demnach wird $d = 2{\cdot}4\ \delta_p$.

Die Tabelle ist berechnet von $\alpha = 180^0$ bis $\alpha = 0^0$, $\alpha = 180^0$ entspricht einem geradlinigen zweiarmigen Hebel, $\alpha = 0^0$ einem geradlinigen einarmigen Hebel. Die Tabelle über 180⁰ auszudehnen ist nicht nothwendig, indem $\cos \alpha = \cos (2\pi - \alpha)$.

Nennen wir noch zur Berechnung eines Schenkelquerschnittes h und b die beiden Dimensionen des als Rechteck gedachten Querschnittes, c die Länge des Zapfens am Ende des Schenkels p, $\mathfrak{S}$ die grösste Spannungsintensität, welche im Zapfen δ_p wie im Arme bei C eintreten darf, so können wir für den Zapfen die Gleichung

$$P \frac{c}{2} = \mathfrak{S} \frac{\pi}{32} (\delta_p)^3$$

und für den Arm p die Gleichung

$$P\,p = \frac{1}{6} \mathfrak{S}\, b\, h^2$$

aufstellen. Eliminiren wir aus dieser Gleichung $\mathfrak{S}$, so resultirt ein Ausdruck, aus welchem man leicht nachstehende Beziehung herleiten kann:

$$\frac{h}{\delta_p} = \sqrt[3]{\frac{6\,\pi}{16} \left(\frac{h}{b}\right) \left(\frac{p}{\delta_p}\right) \left(\frac{\delta_p}{c}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Dieser scheinbar complizirte Ausdruck ist zur Berechnung einer kleinen Tabelle sehr bequem. Das Verhältniss $\frac{\delta_p}{c}$ ist als eine Constante anzusehen, für welche $\frac{2}{3}$ gesetzt werden darf, $\frac{p}{\delta_p}$ ist als eine gegebene Grösse anzusehen, wenn einmal δ_p aus P berechnet worden ist, $\frac{h}{b}$ ist je nach Umständen 2, 3 . . . zu setzen. Seite 78 der Resultate findet sich diese Tabelle. Angenommen es sei $p = 100$, $\delta_p = 5$, $\frac{h}{b} = 2$, so findet man aus der Tabelle $\frac{h}{\delta_p} = 3{\cdot}1$, demnach $h = 3{\cdot}1\ \delta_p = 3{\cdot}1 \times 5 = 15{\cdot}5$ und wegen $\frac{h}{b} = 2$, $b = \frac{15{\cdot}5}{2} = 7{\cdot}75$.

Für den Fall, dass an den Schenkelenden gar keine Zapfen anzubringen sind, benimmt man sich bei der Berechnung so, wie wenn solche Zapfen anzubringen wären, lässt sie aber in der Zeichnung weg. Wenn an den Schenkelenden Doppelzapfen angebracht werden sollen, benimmt man sich in der Rechnung so, wie wenn einfache Zapfen gefordert würden, nimmt aber in der Zeichnung die Zapfendurchmesser $\sqrt{\frac{1}{2}} = 0{\cdot}7$ mal schwächer, als die Rechnung für einfache Zapfen gegeben hat.

Ist der Hebel mit einer Drehungsaxe versehen, die an ihrem Ende mit Zapfen versehen werden soll, die gleich weit vom Hebelkörper entfernt sind, so benimmt man sich in der Rechnung wieder nur so, wie wenn der Hebel auf einen fixen Zapfen zu stecken wäre und berechnet vermittels der Tabelle Seite 77 der Resultate den Werth ven d, dann sind die richtigen Zapfendurchmesser der Drehungsaxe $0{\cdot}7\ d$.

Um das Zusammenwirken dieser für die Construktion der Winkelhebel aufgestellten Regeln zu zeigen, möge noch folgendes Beispiel dienen.

Es sei gegeben $p = 150$, $q = 50$, $\alpha = 120^{\circ}$, $P = 1000$ Kilogramm, so findet man $\delta_p = 0{\cdot}12\sqrt{1000} = 3{\cdot}8$, $\delta_q = 3{\cdot}8\sqrt{\frac{150}{50}} = 6{\cdot}57$. Nun ist $\frac{p}{q} = 3$, $\alpha = 120$, die Tabelle Seite 77 der Resultate gibt demnach $d = 1{\cdot}9\ \delta_p = 7{\cdot}22$. Zur Berechnung der Armquerschnitte hat man $\frac{p}{\delta_p} = \frac{150}{3{\cdot}8} = 40$, und kann man setzen $\frac{h}{b} = 3$, die Tabelle Seite 78 der Resultate gibt dann $\frac{h}{\delta_p} = 4{\cdot}5$, demnach $h = 4{\cdot}5 \times 3{\cdot}8 = 17{\cdot}1$, $b = \frac{17{\cdot}1}{3} = 5{\cdot}7$.

Kurbeln, kurbelartige Hebel und Kurbelaxen.

(Resultate Seite 78 bis 80, Tafel XV. und XVI.)

Kurbeln und kurbelartige Hebel.

Kurbeln und kurbelartige Hebel unterscheiden sich in construktiver Hinsicht von den gewöhnlichen Hebeln, dass bei ersteren die Drehungsaxe auf Torsion, bei letzteren auf relative Festigkeit in Anspruch genommen ist.

Die Aufstellung besonderer Regeln zur Bestimmung der einzelnen an einer Kurbel vorkommenden Dimensionen wäre eigentlich, nach dem was bereits vorgekommen ist, nicht nothwendig, denn für

Zapfen, Torsionsaxen und Hebelarme sind bereits Regeln aufgestellt und aus diesen drei Elementen ist gerade eine Kurbel zusammengesetzt. Allein die Vorsicht macht es doch rathsam, für die Kurbeln besondere Regeln herzuleiten, indem dieselben oftmals den Masseneinwirkungen der Schwungräder und Balanciers, also überhaupt dynamischen Einwirkungen ausgesetzt sind und ein Kurbelbruch insbesondere bei Dampfmaschinen heillose Zerstörungen und Unglücksfälle veranlassen kann. Denn wenn z. B. bei einer Balancier-Dampfmaschine der Kurbelzapfen bricht, so ist zunächst das Spiel des Dampfkolbens nicht mehr beschränkt, der Kolben wird daher durch die Wirkung des Dampfes gewaltsam gegen den Deckel oder Boden hingetrieben und schlägt daselbst an. Aber dies geschieht nicht nur einmal, sondern es wiederholt sich mehrmals, indem nach erfolgtem Kurbelbruch die Schwungradswelle wegen der lebendigen Kraft des Schwungrades fortläuft, was zur Folge hat, dass die Steurung in Thätigkeit bleibt, bis endlich die lebendige Kraft des Schwungrades erschöpft ist. Bei diesem wiederholten Auf- und Niederstossen des Kolbens wird der Balancier und die wegen des Kurbelbruches frei herabhängende Schubstange auf und nieder gerissen; ihr hin und her schwankendes Ende stösst dabei in der Regel gegen die Fundamentsteine, wird zerbrochen oder bringt in dem Balancier Beschädigungen oder Zerstörungen hervor. Dieses Beispiel wird genügen, um zu ersehen, dass es angemessen ist, für die Kurbelconstruktion besondere Regeln aufzustellen.

Wir wollen zunächst eine Regel aufstellen, welche die Abhängigkeit zwischen dem Durchmesser des Kurbelzapfens und dem Durchmesser der Kurbelwelle ausdrückt.

Nennen wir:

d den Durchmesser des Kurbelzapfens,
D den Durchmesser der Kurbelwelle,
A die Länge des Kurbelarmes, gemessen vom Mittel des Zapfens, bis zum Mittel der Welle,
c die Länge des Kurbelzapfens,
T und S die Intensitäten, welche den Spannungen an der Oberfläche der Welle und an der Wurzel des Zapfens entsprechen,
P den Druck gegen den Kurbelzapfen,

so hat man vermöge der Torsionsfestigkeit und relativen Festigkeit folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} PA &= T\frac{\pi}{16}D^3 \\ P\frac{c}{2} &= S\frac{\pi}{32}d^3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Aus diesen Gleichungen findet man leicht durch Elimination von P:

$$\frac{D}{d} = \sqrt[3]{\frac{S}{T} \frac{d}{c}} \sqrt[3]{\frac{A}{d}} \quad \text{. (2)}$$

$$\frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{T}{S} \frac{c}{d}} \sqrt[3]{\frac{D}{A}} \quad \text{. (3)}$$

Die erste dieser Gleichungen bestimmt den Durchmesser der Welle, wenn die Länge A des Kurbelarmes und der Durchmesser d des Zapfens gegeben ist. Die zweite dagegen bestimmt den Durchmesser des Zapfens, wenn der Durchmesser D der Welle und die Länge des Kurbelarmes bekannt sind.

Eine Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Dimensionen von gut construirten Kurbeln, die sich im Gebrauch bewährt haben, hat gezeigt, dass man mit den Thatsachen der Wirklichkeit gut übereinstimmende Resultate erhält, wenn man setzt:

$$\sqrt[3]{\frac{S}{T} \frac{d}{c}} = \begin{cases} 0{\cdot}9 & \text{wenn Zapfen und Welle von Schmiedeeisen,} \\ 1{\cdot}1 & \text{wenn der Zapfen von Schmiedeeisen, die Welle} \\ & \text{von Gusseisen ist,} \end{cases} \quad (4)$$

Da man setzen darf $\frac{d}{c} = \frac{2}{3}$, so folgt:

$$\frac{S}{T} = \begin{cases} \frac{c}{d} (0{\cdot}9)^3 = 1{\cdot}09 \\ \frac{c}{d} (1{\cdot}1)^3 = 2{\cdot}0 \end{cases} \quad \text{. (5)}$$

Nun sind aber die Festigkeits-Coeffizienten für den Bruch und für Torsion des Schmiedeeisens gleich gross (Tabelle Seite 95) und der Bruchcoeffizient für Schmiedeeisen ist nahe 2 mal so gross, als der Torsionscoeffizient von Gusseisen, und somit stellt sich das Ergebniss heraus, dass bei den in der Wirklichkeit vorkommenden Kurbeln die Zapfen gerade so stark in Anspruch genommen sind, als die Welle, ähnlich wie wir bei den Rädern gefunden haben, dass die Zähne und die Wellen gleich stark in Anspruch genommen werden. Weil aber die Wellen nur sehr wenig in Anspruch genommen werden, so gilt dies auch von den Kurbelzapfen und den Räderzähnen.

Vermittelst der Werthe (4) geben nun die Ausdrücke (2) und (3):

	Zapfen:	Welle:
$\frac{D}{d} = 0{\cdot}9 \sqrt[3]{\frac{A}{d}}$	Schmiedeeisen	Schmiedeeisen
$\frac{D}{d} = 1{\cdot}1 \sqrt[3]{\frac{A}{d}}$	Schmiedeeisen	Gusseisen
$\frac{d}{D} = 1{\cdot}2 \sqrt[2]{\frac{D}{A}}$	Schmiedeeisen	Schmiedeeisen
$\frac{d}{D} = 0{\cdot}877 \sqrt[2]{\frac{D}{A}}$	Schmiedeeisen	Gusseisen

Das Ergebniss dieser Formeln ist Seite 79 der Resultate in eine Tabelle gebracht.

Was nun die Kurbelarme anbelangt, so habe ich es vorgezogen, nur empirische und keine rationellen Regeln aufzustellen. Ein solcher Kurbelarm ist je nach der Stellung der Kurbel gegen die Schubstange bald auf relative, bald auf absolute, bald auf rückwirkende Festigkeit und auch noch auf Torsion in Anspruch genommen, eine rationelle Regel müsste also auf diese verschiedenen Festigkeitsverhältnisse Rücksicht nehmen, was zu unverhältnissmässigen Complikationen führen würde. Dann aber kommen ja diese Kurbeln nicht so häufig vor wie Räder, es ist daher aus ökonomischem Grunde erlaubt, die Kurbelarme so stark zu machen, dass ein durch eine empirische Regel etwa entstehender Fehler keine nachtheiligen Folgen haben kann.

Tafel XV. der Resultate findet man in den Fig. 5 und 6 eine gusseiserne und eine schmiedeeiserne Kurbel dargestellt und empirische Regeln zur Bestimmung der Arme und Hülse angegeben. Diese Regeln sind durch Induktion, durch Vergleichung der Dimensionen von gut geformten Kurbeln entstanden

Wenn kurbelartige Hebel zu construiren sind, die keinen Massenwirkungen ausgesetzt werden, wie z. B. die Steuerungshebel der Dampfmaschinen, kann man sich auch erlauben, die Dimensionen des Armes nach den Seite 225 aufgestellten Regeln zu bestimmen.

Einige Beispiele werden genügen, die für Kurbeln aufgestellten Regeln zu erklären.

Die Länge des Kurbelarmes sei 50 Centimeter, der Durchmesser des Zapfens 10 Centimeter, Kurbel und Welle sollen aus Schmiedeeisen gemacht werden, welches sind die Dimensionen der Welle und des Kurbelkörpers?

Es ist also $A = 50$, $d = 10$, die Tabelle Seite 79 gibt demnach für $\frac{A}{d} = 5$, $\frac{D}{d} = 1{\cdot}539$, demnach $D = 1{\cdot}539 \times 10 = 15{\cdot}39$ und vermittelst der Fig. 6, Tafel XV. der Resultate findet man nun:

Durchmesser der Zapfenhülse $2{\cdot}42 \times 10$			$= 24{\cdot}2$
Länge der Zapfenhülse $1{\cdot}5 \times 10$			$= 15$
Durchmesser der Wellenhülse $2{\cdot}27 \times 15{\cdot}39$			$= 34{\cdot}9$
Länge dieser Hülse $1{\cdot}5 \times 10 + 0{\cdot}056 \times 50$			$= 17{\cdot}8$
Dimensionen des Armes	an der Welle		$= 26{\cdot}8$
			$= 9{\cdot}4$
	am Zapfen		$= 18{\cdot}0$
			$= 8{\cdot}0$

Kurbelaxen.

Die Kurbelaxen gehören in construktiver Hinsicht in die Klasse der Maschinenbestandtheile, deren Festigkeit in mehrfacher Weise in Anspruch genommen wird. Zur Bestimmung irgend eines Querschnittes, der auf mehrfache Weise, z. B. sowohl auf Torsion als auch auf relative Festigkeit in Anspruch genommen ist, berechne man, wie stark der Querschnitt wegen jedes einzelnen Festigkeitsverhältnisses sein müsste und nehme für die Verzeichnung und Ausführung die stärksten von den so berechneten Dimensionen. Die nachfolgenden Beispiele werden das Constructions-Verfahren erläutern.

Erstes Beispiel. Es sei Fig. 11, Tafel XI., eine bei A und B in Lager gelegte Kurbelaxe, welche die auf den Zapfen wirkende Kraft nach einer Seite hin durch Torsion überträgt.

Bei dieser Axe sind die einzelnen Theile in folgender Weise in Anspruch genommen.

Der Zapfen C, der Zapfen B und das Wellenstück $B\,B_{II}$, so wie auch der Kurbelkörper $B_I\,C$ sind nur allein auf relative Festigkeit in Anspruch genommen.

Der Wellenhals A, das Wellenstück $A\,A_I$ und der Kurbelkörper $A_I\,C$ dagegen sind einerseits genau so auf relative Festigkeit in Anspruch genommen, wie $C\,B_I\,B$, aber andererseits auch auf Torsion.

Nennt man:

P die auf den Kurbelzapfen drückende Kraft,

r den Halbmesser der Kurbel oder die Länge des Kurbelarmes,

l die Entfernung der Zapfenmittel A B von der mittleren Ebene der Kurbel,

d den Durchmesser des Kurbelzapfens c,
d_1 den Durchmesser des Tragzapfens B,
c_1 die Länge des Tragzapfens B,
D den Durchmesser des Wellenhalses A,
S T die Spannungsintensitäten für relative Festigkeit und Torsion, so erhält man folgende Gleichungen:

Für den Zapfen B hat man

$$P \frac{c_1}{2} = S \frac{\pi}{32} d_1^{\,3} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Das Moment, welches den Kurbelzapfen c abzubrechen droht, ist $\frac{P}{2}\,l$, demnach hat man:

$$\frac{P}{2}\,l = S \frac{\pi}{32} d^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Das Torsionsmoment, welchem der Hals A zu widerstehen hat, ist $P\,r$, demnach ist zu setzen:

$$P\,r = T \frac{\pi}{16} D^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$d_1 = \sqrt[2]{\frac{16}{\pi S}\,\frac{c_1}{d_1}}\,\sqrt{P}, \quad D = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi T}}\,\sqrt[3]{P\,r}, \quad \frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{T}{S}}\,\sqrt[3]{\frac{l}{r}} \quad (4)$$

Wir wollen auch hier, wie bei den einfachen Kurbeln, die Theile in jeder Hinsicht gleich stark in Anspruch nehmen, und für T den Werth setsen, den wir für schmiedeeiserne Torsionswellen gefunden haben. Dann ist zu setzen: $T = S = 210$, und wenn wir überdies $\frac{c_1}{d_1} = 1{\cdot}5$ nehmen, so folgt aus der Gleichung (4):

$$d_1 = 0{\cdot}18\,\sqrt{P}, \quad D = 0{\cdot}33\,\sqrt[3]{P\,r}, \quad \frac{d}{D} = \sqrt[3]{\frac{l}{r}} \quad \ldots \quad (5)^*$$

Hat man diese drei Grössen d, d_1, D berechnet, so geschieht die Verzeichnung der Axe auf folgende Weise: Man verzeichnet zuerst mit dem berechneten Durchmesser die Zapfen B und C, so wie auch den Hals A, macht sodann $\overline{b\,b_1} = d$ und verbindet die Punkte $b\,b_1$ einerseits mit $c\,c_1$, andererseits mit $e\,e_1$, vorausgesetzt, dass

*) In den Resultaten Seite 80 sind die Coeffizienten kleiner als in diesen Formeln (5).

$d > D$ ist. Sollte aber $D > d$ sein, so müsste das Wellenstück $A A_1$ cylindrisch gemacht werden und zwar mit dem Durchmesser D. Zur Construktion der Arme darf man als Regel gelten lassen, dass deren Querschnitt genau oder nahe gleich dem Querschnitt des Kurbelzapfens, also gleich $d^2 \frac{\pi}{4}$ gemacht werden soll.

Zweites Beispiel. Es sei eine Kurbelaxe für den Fall zu construiren, dass die dem Kurbelzapfen mitgetheilte Kraft zur Hälfte nach der einen, zur Hälfte nach der anderen Seite übertragen werden soll. Fig 12, Tafel XI.

In diesem Falle erhalten die Hälften $A C$ und $C B$ congruente Formen, der Zapfen C ist einem Druck P und jeder der Hälse einem Torsionsmoment $\frac{1}{2} P r$ ausgesetzt, aber allerdings auch einem auf Bruch wirkenden Druck $\frac{1}{2} P$, allein der dem Torsionsmoment entsprechende Durchmesser fällt viel stärker aus, als der dem Druck $\frac{1}{2} P$ zukommende, daher sind die Hälse A und B mit dem Durchmesser zu zeichnen, den das Torsionsmoment liefert. Wir erhalten nun für den vorliegenden Fall folgende Gleichungen:

$$\frac{P}{2} l = S \frac{\pi}{32} d^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{1}{2} P r = T \frac{\pi}{16} D^3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} D &= \sqrt[3]{\frac{16}{\pi T}} \sqrt[3]{\frac{1}{2} P r} \\ \frac{d}{D} &= \sqrt[3]{2 \frac{T}{S}} \sqrt[3]{\frac{l}{r}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots (8)$$

und wenn man auch hier wie früher $S = T = 210$ nimmt:

$$\left.\begin{aligned} D &= 0{\cdot}33 \sqrt[3]{\frac{1}{2} P r} \\ \frac{d}{D} &= 1{\cdot}26 \sqrt[3]{\frac{l}{r}} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Schubstangen.

(Resultate Seite 81 bis 83, Tafel XXI. und XXIII.)

Die zur Verbindung eines hin- und hergehenden Kolbens oder eines oscillirenden Balanciers mit einer Kurbel dienenden Schubstangen werden meistens aus Schmiedeeisen, nur bei stärkeren Balancier-Dampfmaschinen aus Gusseisen angefertigt. Der Querschnitt einer solchen Stange wird bei Schmiedeeisen entweder kreisrund oder rechteckig, bei Gusseisen kreuzförmig gemacht. Die Enden der Stangen, die sogenannten Schubstangenköpfe erhalten Formen und Einrichtungen, die geeignet sind, die Zapfen anzufassen, ähnlich wie eine Hand einen Griff.

Nehmen wir zur Aufstellung einer Regel zur Bestimmung der Hauptdimensionen die in Fig. 1, Tafel XII. dargestellte einfachste Form an, die jedoch nur für Schmiedeeisen passend ist, und nennen wir d den Durchmesser eines Auges am Ende der Stange, l ihre Länge, d_1 den Durchmesser des mittleren kreisrunden Querschnittes, c die Länge der Augenhöhlung oder die Länge des Zapfens, welchen die Stange mit ihrem Auge anzufassen hat, $\mathfrak{S}$ die Spannungsintensität für den Zapfen, ε den Modulus der Elastizität des Materials, P die durch die Stange durch rückwirkende Festigkeit fortzupflanzende Kraft, $m P$ die Kraft, bei welcher die Stange in einen schwankenden Zustand gerathen würde, so können wir nun folgende Gleichungen aufstellen.

Für den Zapfen:

$$P \frac{c}{2} = \frac{\mathfrak{S} \pi}{32} d^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Für die Stange dagegen (wegen Gleichung (16) Seite 45):

$$m P = \frac{\varepsilon \pi^3}{64} \frac{d_1{}^4}{l^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Durch Elimination von P folgt aus diesen Gleichungen:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt[4]{\frac{4 m \mathfrak{S}}{\varepsilon \pi^2} \frac{d}{c}} \sqrt[2]{\frac{l}{d}} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

Da es etwas gewagt wäre, die Zahl m apriorisch zu bestimmen, so habe ich es vorgezogen, den ganzen Werth der vierten Wurzel

durch die bei guten Schubstangenformen vorkommenden Abmessungen empirisch zu bestimmen, und habe gefunden, dass man nehmen muss:

$$\sqrt[4]{\frac{4\,m\,\mathfrak{S}}{\varepsilon\,\pi^2}\,\frac{d}{c}} = 0{\cdot}229 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nun ist aber für schmiedeeiserne Zapfen

$$\mathfrak{S} = 210, \quad \varepsilon = 1500000, \quad \frac{d}{c} = \frac{2}{3}$$

und mit diesen Zahlen findet man:

$$m = \frac{1}{4}\,(0{\cdot}229)^4\,\frac{\varepsilon\,\pi^2}{\mathfrak{S}}\,\frac{c}{d} = 72$$

Die schmiedeeisernen Schubstangen sind also in der Wirklichkeit so construirt, dass sie erst bei einer 72-fachen Belastung in einen schwankenden Zustand kommen.

Versucht man den Gedanken zu verfolgen, dass der schwankende Zustand und der Zapfenbruch gleichzeitig eintreten sollten, so muss man in (3) $m = 1$, $\mathfrak{S} = 4000$ (Festigkeit des Schmiedeeisens in dickeren Stäben), $\varepsilon = 1500000$, $\frac{d}{c} = \frac{2}{3}$ setzen und findet dann:

$$\frac{d_1}{d} = 0{\cdot}16\,\sqrt[2]{\frac{1}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dieser Werth für die vierte Wurzel stimmt mit dem früher gefundenen, nämlich mit (4), nicht überein. Es ergibt sich demnach das Resultat, dass die schmiedeeisernen Schubstangen in der Wirklichkeit so gemacht werden, dass der Zapfenbruch früher eintritt, als der schwankende Zustand.

Wenn wir den Coeffizienten 0·229 nehmen, erhalten wir:

$$\frac{d_1}{d} = 0{\cdot}229\,\sqrt{\frac{1}{d}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Den numerischen Werth, welchen diese Formel liefert, findet man in den Resultaten Seite 82 in einer Tabelle zusammengestellt.

Will man statt eines runden Querschnittes einen viereckigen annehmen, so lässt sich dieser aus jenem leicht nach der Lehre von der Aequivalenz der Querschnitte bestimmen.

Ein kreisrunder und ein viereckiger Querschnitt sind nämlich in Bezug auf rückwirkende Festigkeit äquivalent, wenn man hat:

$$\frac{\varepsilon}{12}\,\pi^2\,\frac{a\,b^3}{l^2} = \frac{\varepsilon\,\pi^3}{64}\,\frac{d_1{}^4}{l^2}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{b}{d_1} = \sqrt[4]{\frac{6\,\pi}{32}\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \dots\dots\dots \quad (7)$$

Dabei ist b die kleinere, a die grössere von den Dimensionen des Rechteckes. Auch die numerischen Werthe dieser Formel findet man in den Resultaten Seite 82.

Man muss sich hüten, das Verhältniss $\frac{a}{b}$ zu gross anzunehmen, weil sonst die Dimensionen zu gross ausfallen. $\frac{a}{b}$ gleich 1 bis 1·5 gibt gute Abmessungen.

Für gusseiserne Schubstangen kann die in Fig. 4, 5, 6, Tafel XXIII. der Resultate dargestellte Form gewählt werden. Die untere Stelze ist etwas länger als die Kurbel und ihr Querschnitt ist an zwei parallelen Seiten flach, an den beiden anderen Seiten schwach gerundet. Der mittlere Theil ist im Längenprofil bauchig, im Querprofil kreuzförmig gehalten, das obere Ende ist gabelförmig mit Uebergangsformen.

Suchen wir nach der Methode der Verhältnisszahlen eine Regel zu finden, durch welche die Querschnittsdimensionen des mittleren Theiles der Stange bestimmt werden können.

Nennen wir l die ganze Länge der Stange, h die Höhe, b die Dicke der Nerve in der Mitte, d den Durchmesser des Kurbelzapfens, c die Länge desselben, P die Kraft, welche durch die Stange übertragen wird, so erhalten wir folgende Gleichungen:

1) Für die Zapfen:

$$P\,\frac{c}{2} = \frac{\mathfrak{S}\,\pi}{32}\,d^3 \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

2) Für den mittleren Querschnitt der Stange, vermöge Seite 21 der Resultate:

$$m\,P = \varepsilon\,\pi^2\,E\,\frac{z}{l^2} \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

Es ist aber hier zu setzen:

$$E = \frac{1}{6\,h}\left[h\,b^3 + b\,(h^3 - b^3)\right],\quad z = \frac{h}{2} \quad \dots\dots \quad (10)$$

und es bedeutet m P die Kraft, bei welcher die Stange in einen schwankenden Zustand gerathen würde. Da es sich jedoch nur um

Annäherungen handelt, darf man sich wohl erlauben in dem Ausdruck (10) $h b^3$ und b^4 gegen $b h^3$ zu vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung wird (9):

$$m P = \frac{\varepsilon}{12} \pi^2 \frac{b h^3}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Aus (8) und (11) findet man durch Elimination von p:

$$\frac{b}{h} = \frac{3}{4} \frac{m \mathfrak{S}}{\pi \varepsilon} \left(\frac{d}{c}\right) \left(\frac{l}{h}\right)^4 \left(\frac{d}{l}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Schubstangenköpfe. Die Enden der Schubstangen (die Schubstangenköpfe) müssen so eingerichtet werden, dass sie zum sichern Anfassen eines Zapfens geeignet sind. Ein Schubstangenkopf ist daher im Wesentlichen ein an einem Stangenende angebrachtes Axenlager oder Axenhalter. In der Regel wird der Zapfen ähnlich wie bei den gewöhnlichen Zapfenlagern von zwei innen nach der Rundung des Zapfens halb-cylindrisch ausgedrehten, aussen ebenflächig geformten Schalen aus Messing oder Rothguss umfasst. Diese Schalen werden in den Stangenkopf eingelegt und durch Keilungen gegen den Zapfen gedrückt. Die Keile werden angetrieben, wenn sich die Schalen durch den Gebrauch ausgeschliffen haben und dann nicht mehr ringsum an den Zapfen anliegen. Wird die innere Schalenhälfte hinausgekeilt, so entsteht eine Verlängerung der Schubstange, indem dadurch der Mittelpunkt des Zapfens relativ gegen den Stangenkörper nach dem Ende desselben hinausrückt. Wird die äussere Schalenhälfte hereingekeilt, so entsteht eine Verkürzung der Schubstange. Versieht man den Stangenkopf mit zwei Keilungen, von denen die eine die innere Schalenhälfte hinaus, die andere die äussere Schalenhälfte einwärts treibt, so kann man durch diese Doppelkeilung bewirken, dass der Mittelpunkt des Zapfens seine relative Lage gegen den Stangenkörper nicht ändert, dass mithin weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung der theoretischen Stangenlänge eintritt. In den meisten Fällen der Anwendung ist es von Wichtigkeit, dass durch die Wirkung der Keilungen die theoretische Stangenlänge (Abstand der Zapfenmittel) nicht geändert wird. Dies kann bewirkt werden, 1) indem man an dem einen Stangenkopf eine Keilung anbringt, welche die Stange verlängert, am andern Stangenkopf dagegen eine Keilung, welche die Stange verkürzt, oder 2) wenn man an jedem Stangenkopf eine Doppelkeilung anwendet. Das letztere Mittel wird nur selten angewendet, weil es complizirter und kostspieliger ist, als das erstere. Insbesondere für die Kupplungsstangen der Güterlokomotive ist die genaue Einhal-

tung der theoretischen Länge von Wichtigkeit, denn es entsteht sogleich ein heftiges Drängen oder Zerren, wenn die theoretische Länge einer solchen Kupplungsstange um eine Kleinigkeit länger oder kürzer ist, als die Axendistanz der durch die Stange zusammen gekuppelten Räder.

Anfertigung der Schubstangen. In den meisten Fällen werden die Schubstangen und ihre Kopfstücke aus Schmiedeeisen hergestellt. Bei grossen Balancier-Dampfmaschinen sind jedoch noch die schwerfälligen gusseisernen Schubstangen im Gebrauch. Bisweilen ist es, wenn auch nicht nothwenig, aber doch wünschenswerth, dass die Masse einer Schubstange möglichst klein ausfällt, und dann wird die Stange von Gussstahl hergestellt.

Die Anfertigung der schmiedeeisernen Schubstangen verursacht viele und kostspielige Arbeit. Zuerst werden die Stangen mit den Köpfen geschmiedet, ohne in den letzteren Oeffnungen anzubringen. Hierauf folgt die Bearbeitung der Stangenoberfläche vermittelst Feilmaschinen, Hobelmaschinen oder Drehbänken. Sodann wird auf dem Kopfe die Form der Oeffnung aufgerissen und werden durch den Kopf längs der Umfangsform der Oeffnung dicht neben einander Löcher gebohrt. Dann wird das Lochstück durch Hammerschläge ausgebrochen, worauf endlich auch die innere Fläche der Kopföffnung mit der Feile bearbeitet werden kann.

Die verschiedenen speziellen Anordnungen von Schubstangen werden in den Vorträgen durch Modelle und Zeichnungen erklärt; die Beschreibung derselben kann also hier unterlassen werden.

Balancier.

(Resultate Seite 83, Tafel XXIII.)

Balancier werden vorzugsweise bei grossen Dampfmaschinen angewendet. Dieselben werden aus Gusseisen, aus Eisenblech oder schmiedeeisernen Platten und Stangen hergestellt. Bis zu einem Gewicht von 200 Centnern kann Gusseisen gebraucht werden, über dieses Gewicht hinaus ist es rathsam, Blech oder Schmiedeeisen anzuwenden, denn so wie einmal die Ausdehnung und das Gewicht eines Balanciers eine gewisse Grenze erreicht, müssen in der Form mehrere Eingusslöcher angebracht werden, und dann ist man nie sicher, ob die durch diese Löcher eingegossenen Eisenmassen im Innern der Höhlung noch in einem vollkommen flüssigen Zustand zusammen treffen und ineinander fliessen, es entstehen daher leicht

bei so ausgedehnten und schweren Gussstücken unganze, d. h. solche Stellen, in welchen die molekulare Verbindung nur in unvollkommener Weise eintritt.

Die nachfolgenden Figuren zeigen die Formen und Construktionsweisen verschiedener Balanciers.

Fig. 2, Tafel XII. ist ein gusseiserner massiver Balancier. Die Endzapfen befinden sich an Hülsen, die um Zapfen drehbar sind, welche an den Enden des Balanciers nach seiner Längenrichtung angegossen sind. Durch diese Einrichtung wird die richtige Verbindung der Gehänge des Parallelogramms und der Schubstange sehr erleichtert. Werden die Endzapfen quer durch die Endköpfe des Balanciers gesteckt, so begegnet es gar leicht, dass diese Durchbohrungen und jene für die Hauptdrehungsaxe des Balanciers nicht parallel werden, was zur Folge hat, dass bei horizontaler Lagerung der Hauptaxe die Gehänge und die Schubstangenrichtung von der vertikalen Richtung abweichen.

Die Dimensionen eines solchen Balanciers können auf folgende Weise bestimmt werden. Als gegeben darf man ansehen: 1) die Länge $2\,l$ des Balanciers, 2) den Druck P auf jedes Ende desselben. Um dem Ganzen eine angemessene Form zu geben, ist die Höhe h in einem bestimmten Verhältniss zur Länge zu nehmen.

Wir nehmen $h = \frac{1}{3}\,l$. Vernachlässiget man das Gewicht des Balanciers, so ist der Druck, welchen einer der Zapfen der Axe auszuhalten hat, gleich P, der Durchmesser d eines solchen Zapfens wird daher $d = 0{\cdot}18\,\sqrt{P}$. Hier ist der, eigentlich für gusseiserne Zapfen geltende Coeffizient 0·18 genommen, obgleich die Axe von Schmiedeeisen hergestellt wird. Hierdurch wird aber der Fehler ausgeglichen, der durch die Vernachlässigung des Balanciergewichts entsteht. Der Durchmesser eines Zapfens an den Endhülsen ist $0{\cdot}18\sqrt{\frac{1}{2}\,P} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{\cdot}7\,d$. Die Länge der Axe des Balanciers darf gleich $0{\cdot}5\,l$ genommen werden. Die Dimensionen des Querschnittes können wir nach der Methode der Verhältnisszahlen bestimmen.

Da die mittlere gerade Nerve nur zur seitlichen Aussteifung angebracht ist, so können wir den Querschnitt des Körpers I-förmig in Rechnung bringen. Nach der Lehre von der relativen Festigkeit erhalten wir nun:

Für einen Zapfen der Axe des Balanciers:

$$\frac{1}{2}\,P\,c = \frac{\mathfrak{S}_1\,\pi}{32}\,d^3 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Für den Querschnitt des Balancier-Körpers (vermöge Tafel V. der Resultate):

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6\,h}\left[b_1\,h_1^3 + b\,(h^3 - h_1^3)\right] \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

In diesen Ausdrücken ist c die Länge des Axenzapfens, $\mathfrak{S}$ $\mathfrak{S}_1$ die Spannungsintensität für Gusseisen und Schmiedeeisen. Eliminirt man aus diesen Gleichungen P, so findet man leicht folgenden Ausdruck:

$$\frac{b_1}{h} = \frac{\frac{6\,\pi\,\mathfrak{S}_1}{16\,\mathfrak{S}}\;\frac{d}{c}\;\frac{l}{h}\left(\frac{d}{h}\right)^2}{\left(\frac{h_1}{h}\right)^3 + \frac{b}{b_1}\left[1 - \left(\frac{h_1}{h}\right)^3\right]} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Die Verhältnisse $\frac{d}{c}$, $\frac{l}{h}$, $\frac{h_1}{h}$, $\frac{b}{b_1}$ sind innerhalb gewisser Grenzen willkürlich. Es ist angemessen, zu nehmen:

$$\frac{d}{c} = \frac{2}{3}, \quad \frac{l}{h} = 3, \quad \frac{h_1}{h} = \frac{7}{8}, \quad \frac{b}{b_1} = 2$$

damit die Axe und der Körper des Balanciers gleich stark in Anspruch genommen werden, muss man $\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}} = \frac{4000}{3000} = \frac{4}{3}$ setzen. Mit diesen Annahmen findet man aus (3):

$$\frac{b_1}{h} = 2{\cdot}36\left(\frac{d}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Es sei z. B. $P = 7855$, $l = 300$ Centimeter, dann findet man nach den aufgestellten Regeln:

Durchmesser eines Axenzapfens $= 0{\cdot}18\sqrt{7855}$. . = 16 Centm.
Durchmesser eines Hülsenzapfens $0{\cdot}7 \times 16$ = 11 „
Höhe des Balanciers $h = \frac{l}{3}$ = 100 „

Es ist demnach $\frac{d}{h} = \frac{16}{100}$ und folglich gibt die Gleichung (4) $\frac{b_1}{h} = 2{\cdot}36\left(\frac{16}{100}\right)^2$ $= 0{\cdot}06$
demnach findet man $b_1 = 0{\cdot}06 \times 100$ = 6 „
wegen $\frac{h_1}{h} = \frac{7}{8}$, $\frac{b}{b_1} = 2$ findet man nun $\begin{cases} \ldots\; h_1 = 87{\cdot}5 \text{ „} \\ \ldots\; b_1 = 12 \end{cases}$

Die bei massiven gusseisernen Balanciers üblichen Detailverhältnisse findet man in den Resultaten Seite 83 zusammengestellt.

Fig. 3, Tafel XII. ist ein gusseiserner Gitterbalancier.

Diese Balanciers sind leicht und fest. Die äussere Begrenzung ist geradlinig, weil dadurch das Modell viel leichter hergestellt werden kann. Diese Form findet man bei grossen Dampfmaschinen zum Betrieb von Pumpwerken sehr häufig angewendet. Bei der Beurtheilung der Festigkeit eines solchen Balanciers darf das eigentliche Gitterwerk nicht in Anschlag gebracht werden, sondern nur allein der Querschnitt der Umfangsleisten.

Fig. 4, Tafel XII. ist eine Ansicht eines Blechbalanciers. Fig. 7, 8, 9 sind Durchschnitte dreier Blechbalanciers. Die Construktion Fig. 7 ist für leichte Maschinen, die Construktion Fig. 8 ist für stärkere, jene von Fig. 9 für ganz mächtige Maschinen. Die Herstellung dieser Balanciers erfordert viele Arbeit, sie gewähren jedoch bei sorgfältiger Ausführung weit mehr Sicherheit als die gusseisernen. Wesentlich ist, dass die Vernietungen der Hauptschilde und bei Fig. 9 die Vernietungen in dem Umfangsband solide angeordnet und sorgfältig ausgeführt werden. Band- oder Kettenvernietungen mit mehrfachen Nietreihen sind an diesen bedenklichen Stellen am Platz. Die gusseisernen Axen und Zapfenhülsen a verursachen eine beträchtliche Schwächung der Schilde. Die Metalldicke des durch die Schilde gehenden Theiles der Hülsen muss daher sehr schwach gehalten werden, was auch erlaubt ist, da diese Hülsentheile gleichsam nur Einlegescheiben sind, die eine Verschiebung der Hülsen gegen die Schilde zu verhindern haben.

Fig. 5, Tafel XII. ist ein aus drei Gussstücken zusammengesetzter grosser Balancier für eine Wasserhaltungsmaschine, die in der Maschinenbauanstalt zu *Seraing* für die Gruben zu *Bleiberg* ausgeführt wurde.

Der wesentliche Vortheil dieser Construktion besteht darin, dass an derselben kein übermässig schweres Gussstück vorkommt, dass man demnach mit grosser Wahrscheinlichkeit in den einzelnen Theilen des Balanciers einen fehlerfreien Guss erwarten darf. Aber allerdings müssen die Verbindungen der Gussstücke mit besonderer Sorgfalt ausgeführt werden.

Für derlei spezielle nur selten vorkommende Construktionen bedarf es keiner besonderen einfachen Regeln. Die allgemeinen Formeln über die Festigkeitsverhältnisse führen jedenfalls, bei richtigem Gebrauch, an das gewünschte Ziel, und wenn auch die Berechnungsweise nicht sehr einfach ist, so kommt dies nicht in Betrachtung bei Construktionen, die nicht tagtäglich auszuführen sind.

Traversen.

(Resultate Seite 81, Tafel XXI.)

Traversen sind hebelartige ganz auf relative Festigkeit in Anspruch genommene Bestandtheile, die in der Regel mit den Kolbenstangen der Dampfmaschinen verbunden werden, um von deren Enden aus vermittelst Schubstangen eine Verbindung mit Kurbeln oder mit Balanciers hervorzubringen.

In Fig. 1 bis 4, Tafel XIII. sind zwei Traversenformen dargestellt.

Die erstere wird wie ein kleiner Balancier vermittelst eines Bolzens in einen Gabelkopf, Fig. 2 und 3, eingehängt, mit welchem das Ende der Kolbenstange versehen werden muss. Die letztere, Fig. 4, ist in der Mitte mit einer cylindrischen Hülse versehen und wird vermittelst derselben durch einen Querkeil mit der Kolbenstange verbunden. Die Traverse Fig. 1 ist zwar leichter zu bearbeiten, als die Traverse Fig. 4, dafür aber ist bei ersterer auch der Kopf anzufertigen, der viele Arbeit verursacht. Die vertikalen Seitenflächen der Traversen sind ebene Flächen mit abgerundeten Endtheilen. Die oberen und unteren Flächen des Traversenkörpers sind nach Rotationsflächen geformt, so dass sie vermittelst der Drehbank leicht hergestellt werden können und die Durchschnittskurven der Rotationsfläche mit den vertikalen Ebenen mit vollkommener Reinheit aus dem Arbeitsprozess hervorgehen.

Nennt man:

A die halbe Länge der Traverse, d den Durchmesser, c die Länge eines der Zapfen an den Enden, b h die Querschnittsdimensionen eines Armes, in der Mitte gemessen, P den Druck auf einen Zapfen, so hat man, wie bei gewöhnlichen Hebeln:

$$d = 0{\cdot}12 \sqrt{P}$$

$$\frac{h}{d} = \sqrt[3]{\frac{6\pi}{16}\left(\frac{h}{b}\right)\left(\frac{A}{d}\right)\left(\frac{d}{c}\right)}$$

Für Traversen ist aber zu nehmen $\frac{h}{b} = 3$, $\frac{d}{c} = \frac{2}{3}$ und dann wird:

$$\frac{h}{d} = 1{\cdot}344 \sqrt[3]{\frac{A}{d}}$$

Seite 81 der Resultate für den Maschinenbau findet man eine kleine Tabelle, welche die numerischen Ergebnisse dieser Formel enthält. Es sei z. B. $A = 100$, $d = 10$, so findet man: wegen $\frac{A}{d} = \frac{100}{10} = 10$, $\frac{h}{d} = 2{\cdot}90$, demnach $h = 2{\cdot}9\ d = 2{\cdot}9 \times 10 = 29$ und wegen $\frac{h}{b} = 3$, $b = \frac{1}{3}\ 29 = 9{\cdot}67$ Centimeter.

Röhren und deren Verbindung.

(Resultate Seite 85 und 86, Tafel XXIV.)

Röhren werden zu mannigfachen Zwecken, insbesondere aber zur Leitung von Wasser, Gas, Dampf und anderen Flüssigkeiten gebraucht. Das Röhrenmaterial richtet sich nach dem Zwecke ihrer Verwendung. Röhren werden aus den verschiedensten Metallen aber auch aus Holz, Glas, Stein, Kautschuk, Leder etc. gemacht. Längere Röhren werden immer durch Verbindung von kürzeren Röhrenstücken gebildet. Diese Verbindungen werden wir später besprechen.

Abmessungen. Der Querschnitt Ω der Röhre wird bestimmt, theils durch die Flüssigkeitsmenge Q, die in einer Sekunde durch die Röhre geleitet werden soll, theils durch die Geschwindigkeit u, mit der sich die Flüssigkeit in der Röhre fortbewegen soll. Diese beiden Grössen Q und u sind jederzeit gegeben, und man hat dann $\Omega = \frac{Q}{u}$; hieraus folgt dann der Durchmesser d der Röhre $d = \sqrt{\frac{4\,\Omega}{\pi}}$. Weil wir in diesem Abschnitt alle Dimensionen in Centimetern ausdrücken, so muss u in Centimetern, Ω in Quadratcentimetern, Q in Kubikcentimetern genommen werden. In Wasser- und Gasleitungsröhren ist die Geschwindigkeit der Bewegung gewöhnlich 1 Meter in einer Sekunde, demnach $u = 100$ Centimeter.

Die Wanddicke der Röhren wird bestimmt, theils durch den Druck der Flüssigkeit, welchem sie ausgesetzt sind, theils durch den Anfertigungsprozess, theils endlich durch verschiedene praktische Nebenumstände. Würde man nur allein den innern Druck zu berücksichtigen haben, so wäre es ein Leichtes, eine rationelle Regel für die Wanddicke aufzustellen. Man würde nämlich vermöge Gleichung (12), Seite 64 annähernd schreiben dürfen:

$$\delta = \mathfrak{A}\,(n - 1)\,d \qquad (1)$$

wobei δ die Wanddicke, d den innern Durchmesser der Röhre und n den in Atmosphären ausgedrückten innern Druck bezeichnet, dem die Röhre ausgesetzt ist.

Ist die innere Pressung gering, so gibt diese Formel nothwendig so schwache Wanddicken, dass sich die Röhre vielleicht gar nicht herstellen liesse, oder dass sie durch zufällig einwirkende Kräfte zerbrochen würde. Alle diese Kräfte so wie die Anfertigungsprozesse lassen sich nicht rationell in Rechnung bringen, man muss sich daher mit dem „Zugeben" behelfen und demnach setzen:

$$\delta = \mathfrak{A}\,(n-1)\,d + \mathfrak{B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wobei $\mathfrak{B}$ eine Constante ist, die sich vorzugsweise nach der Natur des Materials richtet, aus welchem die Röhren bestehen.

Diese allgemeine Formel ist in der nachstehenden Zusammenstellung für die verschiedenen Röhrenarten spezialisirt.

Eisenblech . . .	$\delta = 0{\cdot}00125\,(n-1)\,d + 0{\cdot}30$	Centimeter.
Gusseisen . . .	$\delta = 0{\cdot}00400\,(n-1)\,d + 0{\cdot}50$	
Kupfer	$\delta = 0{\cdot}00200\,(n-1)\,d + 0{\cdot}10$	
Blei	$\delta = 0{\cdot}04000\,(n-1)\,d + 0{\cdot}10$	
Zink	$\delta = 0{\cdot}02500\,(n-1)\,d + 0{\cdot}10$	
Holz	$\delta = 0{\cdot}03230\,(n-1)\,d + 2{\cdot}70$	
Natürlicher Stein .	$\delta = 0{\cdot}03690\,(n-1)\,d + 3{\cdot}00$	
Künstlicher Stein .	$\delta = 0{\cdot}05380\,(n-1)\,d + 4{\cdot}00$	

Bei den metallenen Röhren ist der Coeffizient $\mathfrak{A}$ so bestimmt, dass die Röhren, wenn man das Glied $\mathfrak{B}$ wegliesse, bei einem Druck von n Atmosphären bis auf $\frac{1}{10}$ der absoluten Festigkeit in Anspruch genommen wären. Die Werthe des Coeffizienten $\mathfrak{B}$ sind theils nach der Natur des Materials, theils nach der Natur des Arbeitsprozesses, durch welchen die Röhren gebildet werden, gewählt. Bei Röhren aus Eisenblech kann das Blech nicht wohl dünner als 0·3 Centimeter genommen werden. Bei Gusseisen darf die Wanddicke nicht unter 0·5 Centimeter genommen werden, weil sonst die Ungleichheiten in der Wanddicke, die nie ganz vermieden werden können, einen zu merklichen nachtheiligen Einfluss ausüben könnten. Auch muss man sich darauf gefasst machen, dass der Guss da und dort porös ausfallen könnte, gegen welchen Fehler man sich auch nur durch eine hinreichende Wanddicke schützen kann. Bei Röhren aus Kupfer, Blei und Zink muss $\mathfrak{B}$ gleich 0·1 Centimeter genommen werden, weil die Arbeitsprozesse, durch welche diese Röhren gebildet werden, ein so geringes Minimum von Wanddicke erlauben.

Für cylindrische Gefässe, die nicht zur Leitung von Wasser,

Gas oder Dampf, sondern zu andern speziellen Zwecken dienen, wie z. B. Dampfcylinder, Cylinder für hydraulische Pressen, Dampfkessel, ist es angemessen, besondere Regeln aufzustellen.

Die Länge l der gusseisernen Wasser- und Gasleitungs-Röhrenstücke, aus denen eine solche Leitung hergestellt wird, kann nach der empirischen Regel $l = 200 + 5\,d$ bestimmt werden.

Wir haben nun von der Verbindung der verschiedenen Röhren zu sprechen.

Verbindung gußeiserner Röhren. Gusseiserne Röhren werden entweder mit Flantschen oder mit Muffen verbunden. Die Flantschenverbindung Fig. 5, Tafel XIII., geschieht vermittelst Schrauben. Sie gewährt den Vortheil, dass die einzelnen Röhrenstücke mit Leichtigkeit aus einem Röhrenstrang heraus genommen und wieder eingesetzt oder durch andere ersetzt werden können; allein eine dauerhafte dichte Verbindung ist auf diese Weise nur dann hervorzubringen, wenn die Schrauben weder dem Verrosten ausgesetzt, noch durch zufällig einwirkende Störungskräfte angegriffen werden. Diese Flantschenverbindung ist also nicht zu brauchen für Wasser- und Gasleitungen, wenn dieselben ganz einfach in den Erdboden gelegt oder eingegraben werden, denn in diesem Falle würde die Schraube bald rostig und mürbe werden, daher schon desshalb bald brechen; aber auch ein oberhalb einer Flantschenverbindung eintretender Druck oder Schlag gegen die Erde würde eine solche Schraubenverbindung beschädigen. In grossen Städten, wo die Wasser- und Gasleitungen zuweilen nicht eingegraben, sondern in gemauerten unterirdischen Gängen angebracht und dann ganz offen liegen aber sorgfältig unterstützt werden, kann man jedoch die Flantschenverbindung in Anwendung bringen. Insbesondere können Wasser-, Gas- oder Dampfleitungsröhren, die in ganz trockenen Lokalitäten aufzustellen sind und sorgfältig gelagert werden, mit Flantschenverbindungen versehen werden.

Die Flantschen werden meistens (nach radialer Richtung gemessen) zu lang und ihre Metalldicke wird gewöhnlich zu dünn gemacht. Sie sollen gerade nur so lang gemacht werden, dass die Schrauben Platz finden, dagegen im Verhältniss zur Wanddicke der Röhre ziemlich dick, denn eine solche Flantsche dient nicht nur als Verbindungsmittel, sondern sie ist auch zugleich eine Verstärkungsnerve. Durch Vergleichung guter Röhrenconstruktionen haben sich folgende induktive Regeln ergeben.

Länge einer Flantsche $1 + 1{\cdot}8\,\delta$,

Dicke einer Flantsche $0{\cdot}33 + 1{\cdot}17\,\delta$,

Anzahl der Schrauben $3 + \frac{d}{7}$,

Durchmesser eines Schraubenbolzens $0{\cdot}33 + 1{\cdot}17\ \delta$,

wobei δ die nach Seite 243 bestimmte Wanddicke der Röhre bedeutet.

Um die Contaktfläche zwischen den Enden zweier zu verbindenden Röhren zu verdichten, kann man je nach Umständen verschiedene Mittel in Anwendung bringen, aber jedenfalls sollen die Contaktflächen bearbeitet (abgedreht oder abgehobelt) werden. Als Dichtungsmittel kann man anwenden:

a) Für Wasserleitungsröhren oder Gasröhren: Lederringe, geölte Ringe aus Pappe, weissen Kitt, rothen Kitt;

b) Für Dampfleitungen ist es am besten, einen Ring von dünnem weichem Kupferblech zwischen die Contaktflächen einzuklemmen.

Die Muffenverbindung, Fig. 6, Tafel XIII., ist so zu sagen unverwüstlich, hat aber die fatale Eigenschaft, dass die Auswechslung einzelner Röhrenstücke viele umständliche Arbeit verursacht. Jedes einzelne Röhrenstück einer Leitung mit Muffenverbindungen ist an dem einen seiner beiden Enden mit einer ganz schmalen Flantsche, an dem anderen dagegen mit einem becherartigen Theil (Muffe genannt) versehen. Um zwei Röhren zu verbinden, wird das Flantschenende der einen Röhre in den Becher der anderen Röhre geschoben und der Zwischenraum mit Blei ausgegossen oder mit Eisenkitt ausgestopft. Das Verbleien hat den Vortheil, dass die Verbindung durch Schmelzung des Bleies durch glühende Kohlen leicht aufgehoben werden kann. Der Eisenkitt gibt dagegen eine sehr feste Verbindung, die jedoch beinahe eine molekulare wird, so dass eine Aufhebung der Verbindung kaum mehr oder doch nur sehr schwer möglich wird. Wasser- und Gasleitungsröhren, die nur in die Erde gelegt werden, daher dem Verrosten stark ausgesetzt sind, werden stets mit Muffen verbunden und die Verdichtung geschieht immer mit Blei.

Wasser- und Gasleitungsröhren sollen jederzeit so tief in die Erde gelegt werden, dass sie dem Temperaturunterschied zwischen Sommer und Winter nur in einem geringen Grade unterworfen sind. Dies ist insbesondere für Trinkwasserleitungen von Wichtigkeit.

Bei Wasserleitungen kommt es auch zuweilen vor, dass einzelne Röhrenstücke in einander verschiebbar eingerichtet werden müssen. Dies ist namentlich der Fall bei Röhren, die in freier Luft liegen und der Sonnenhitze wie der Winterkälte ausgesetzt sind, daher im Sommer länger, im Winter aber kürzer werden. In solchen Fällen werden sogenannte Expansionsröhren angewendet, wie Fig. 11 und 12, Tafel XXIV. der Resultate zeigen.

Diese Verbindung geschieht entweder mit einer Stopfbüchse oder mit einer Kolbendichtung, wie bei einer Druckpumpe.

Anfertigung und Verbindung schmiedeeiserner Röhren. Röhren von Schmiedeeisen werden entweder bei ganz kleinem oder bei ganz grossem, beinahe niemals bei mässigem Durchmesser angewendet. Ist nämlich der Durchmesser ganz klein, z. B. 2, 3, 4 Centimeter, so können solche Röhren geschweisst und gezogen werden, wie dies bei den Wasserheizungsröhren, Gasröhren und Schiffskessel- wie Lokomotivkesselröhren der Fall ist. Weite Röhren dagegen von 30 bis 60 Centimeter und noch mehr Durchmesser können aus Blech genietet werden. Röhren von 10 bis 20 Centimeter lassen sich aber sehr schwer aus Schmiedeeisen anfertigen, denn das Schweissen und Ziehen geht bei solchen Dimensionen nicht gut an, und auch das Vernieten ist mit Schwierigkeiten verbunden, weil man im Inneren den Nietköpfen nicht gut beikommen kann.

Die kleinen schmiedeeisernen Röhren von 2, 3, 4 Centimeter innerer Weite werden durch eine Art Kupplungshülse in der Art zusammengeschraubt, wie Fig. 7 und 8, Tafel XXIV. der Resultate zeigen.

Weite Röhren von 60 und mehr Centimetern werden verbunden, indem man sie ineinanderschiebt und vernietet, wie dies bei runden Kesseln üblich ist, oder indem man an den Rohrenden Winkeleisen annietet, die dann Flantschen bilden, vermittelst welchen die Verbindung mit Schrauben geschehen kann.

Die erstere dieser Verbindungen gewährt Festigkeit, die letztere dagegen hat die gute Eigenschaft, dass die Verbindung leicht aufgehoben werden kann, was für viele Fälle von praktischem Werth ist.

Röhren aus Kupfer und Messing. Kupferröhren werden durch Löthen und Ziehen angefertiget. Ihre Verbindung geschieht in einer Weise, wie Fig. 7, Tafel XIII. zeigt, durch schmiedeeiserne Ringe, die die Stelle von Flantschen vertreten.

Es werden nämlich über jede Röhre zwei Ringe aus Schmiedeeisen geschoben, dann die Ränder der Röhre umgebogen, so dass gleichsam kleine Flantschen entstehen. Stösst man zwei Röhrenenden mit ihren kleinen Flantschen aneinander, schiebt die schmiedeeisernen Ringe bis sie an die Kupferflantschen anstossen und schraubt endlich die Ringe zusammen, so entsteht eine Verbindung, die hinsichtlich der Festigkeit wie Dichte nichts zu wünschen übrig lässt.

Messingröhren können auf mannigfaltige Weise verbunden werden. Fig. 3, 4, 5, Tafel XXIV. der Resultate sind Beispiele von solchen Verbindungen.

Ventile, Hahnen, Schieber, Klappen.

(Resultate Seite 87, Tafel XXV. und XXVI.)

Ventile, Hahnen, Schieber, Klappen sind Bestandtheile, vermittelst welchen die Kommunikation in Röhren hergestellt oder aufgehoben werden kann.

Einfache Kegel-Ventile. Nach ihrer Grundform sind die Ventile Kegelventile, Kugelventile oder Klappenventile. Die beiden ersteren werden stets aus Metall, die letzteren zuweilen aus Metall, zuweilen aus Leder oder Kautschuk hergestellt. Die wesentlichsten Bedingungen, welche solche Ventile erfüllen sollen, sind, dass sie leicht und rechtzeitig geöffnet und geschlossen werden können, im geschlossenen Zustande vollkommen dicht verschliessen und im geöffneten Zustande dem Durchgang des Wassers oder der Flüssigkeiten keinerlei erhebliche Hindernisse in den Weg legen. Das Oeffnen der Ventile geschieht bei Pumpen durch Wasserdruck, bei den Dampfmaschinen dagegen durch einen geometrischen Zusammenhang des Ventiles mit anderen aktiven Maschinenbestandtheilen. Die ersteren kann man auch selbstwirkende Ventile nennen.

Wir wollen nun sehen, durch welche Formen und Verhältnisse gute Ventile zu Stande gebracht werden können.

Es sei Fig. 8, Tafel XIII., ein konisches Druckventil für eine Pumpe, d_1 der grössere, d der kleinere Durchmesser des Ventilkörpers, p_1 der Druck, welchen das in der Steigröhre befindliche Wasser gegen jeden Quadratcentimeter der oberen Ventilfläche ausübt, q das Gewicht des Ventils, so ist $\frac{d_1^2 \pi}{4} p_1 + q$ die zum Heben des Ventils nothwendige Kraft. Allein bei einer Druckpumpe geschieht die Erhebung des Druckventils durch das unter dem Ventil befindliche Wasser. Nennen wir nun p den Druck, welcher auf jeden Quadratcentimeter der unteren Fläche des Ventils ausgeübt werden muss, damit der vertikal abwärts gerichtete Druck überwunden werden kann, so hat man offenbar:

$$\frac{d^2 \pi}{4} p = \frac{d_1^2 \pi}{4} p_1 + q$$

Hieraus folgt:

$$p = p_1 \left(\frac{d_1}{d}\right)^2 + \frac{4 q}{d^2 \pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Das letzte vom Gewicht des Ventils herrührende Glied kann in allen Fällen gegen das erstere vernachlässiget werden; es ist daher mit genügender Genauigkeit $p = p_1 \left(\frac{d_1}{d}\right)^2$, woraus zu ersehen ist, dass dieser untere Druck, den der Kolben hervorbringen muss, sehr stark ausfällt, wenn der grosse Durchmesser des Ventiles beträchtlich grösser ist, als der kleine. Bei guten Anordnungen von Ventilen findet man, dass $\frac{d_1}{d} = 1{\cdot}2$ ist, und dann wird

$$\frac{p}{p_1} = (1{\cdot}2)^2 = 1{\cdot}44$$

Damit das Druckventil sich hebt, muss also der Kolben anfangs beinahe um die Hälfte stärker getrieben werden, als später, wenn sich das Ventil gehoben hat, und nur noch der Druck p_1 zu bewältigen ist. Dieser plötzliche im Moment des Oeffnens eintretende Uebergang aus dem starken Druck p in den schwächeren p_1 bringt jederzeit harte Stösse und Erschütterungen hervor, ist daher nachtheilig.

Damit das Ventil, wenn es in dem Ventilsitz liegt, möglichst genau abschliesst, müssen zunächst das Ventil und der Ventilsitz vollkommen übereinstimmende Formen haben, was durch Einschleifen des Ventiles in den Sitz mit Schmirgel erreicht werden kann. Allein eine mathematisch genaue Congruenz dieser Flächen wird man doch niemals hervorbringen können, oder würde sich doch nicht dauernd erhalten lassen, man muss daher dafür sorgen, dass kleine Unvollkommenheiten der Ausführung nicht leicht erhebliche Nachtheile hervorbringen können, und dies wird durch angemessene Breite der Auflage des Ventils erreicht.

Man erhält angemessene Formen, wenn man als Regel aufstellt, dass die Höhe des Ventilkörpers (und nicht die Auflage) constant und zwar gleich 1·2 Centimeter gemacht werden soll. Nach dieser Regel nimmt die Breite der Auflage mit der Grösse des Ventiles etwas zu, und werden die kleinen Ventile sehr spitzkeglich, die grösseren Ventile dagegen ganz flachkeglich, so zwar, dass man bei Ventilen, deren Durchmesser circa 20 Centimeter beträgt, eine ebene Platte für die Kegelform substituiren darf.

Berechnet man nach den zwei Regeln $\frac{d_1}{d} = 1{\cdot}2$ und $h = 1{\cdot}2$ Centimeter eine Reihe von Ventilen, und zwar in der Weise, dass der kleinere Durchmesser eines Ventils gleich ist dem grösseren Durchmesser des zunächst kleineren Ventils der Reihe und legt sodann alle Ventile nach der Reihenfolge ihrer Grösse auf-

einander, so bilden die Kegelseiten sämmtlicher Ventile ein Polygon, und man kann sich die Aufgabe stellen, die stetige krumme Linie zu finden, welche durch sämmtliche Punkte dieses Polygons geht. Man findet leicht, dass die Gleichung dieser Linie AMB, Fig. 9, Tafel XIII. ausgedrückt wird durch:

$$y = A \left(p \right)^{\frac{x}{h}} \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Hierbei ist $OP = x$, $MP = y$, $p = \frac{d_1}{d} = 1{\cdot}2$ das Verhältniss der Durchmesser irgend eines Ventiles, $h = PP_1 = 1{\cdot}2$ Centimeter die constante Höhe eines Ventilkörpers, A eine willkürliche Constante, deren Werth von dem willkürlichen Ort des Anfangspunktes der Coordinaten abhängt. Für $x = o$ wird $y = A$, es ist mithin A der Halbmesser desjenigen Ventils, nach welchem man den Anfangspunkt verlegt.

Die Kenntniss dieser Linie, die durch die Gleichung (1) bestimmt wird, hat nur in sofern einen praktischen Werth, als dadurch das Formensystem aller Kegelventile zur klaren Anschauung gebracht wird.

Damit die richtige Form eines Ventiles und seines Sitzes sich dauernd erhalten kann, ist es von Wichtigkeit, dass das Ventil genau die Grösse des Sitzes habe, Fig. 10, Tafel XIII., denn so wie das Ventil kleiner, Fig. 11, oder grösser, Fig. 12, ist als der Sitz, werden die Berührungsflächen durch die hämmernde Bewegung des Ventils nur theilweise angegriffen und verlieren dadurch ihre konische Form. Auch ist es gut, wenn die Ränder des Ventilkörpers wie des Sitzes etwas abgerundet werden, Fig. 13, weil die scharfen Kanten am leichtesten Formverletzungen veranlassen können.

Damit das Wasser wenn das Ventil gehoben ist ohne Hinderniss und ohne beschleunigt werden zu müssen aus dem Saugrohr um das Ventil herum in das Druckrohr gelangen kann, sollen die ringförmigen Querschnitte zwischen dem Sitz und der Ventilfläche, so wie auch zwischen dem oberen Rand des Ventils und dem inneren Umfang des Ventilgehäuses so gross sein, als der Querschnitt des Saugrohres.

Nennt man d_2 den Durchmesser des Ventilgehäuses, Δ die normale Entfernung der Ventilfläche von der Sitzfläche, die bei gehobenem Ventil vorhanden sein soll, so hat man zur Bestimmung von d_2 und Δ

$$d_2^2 \frac{\pi}{4} - \frac{d_1^2 \pi}{4} = d \pi \Delta = d^2 \frac{\pi}{4}$$

demnach

$$d_2^2 = d^2 \left[1 + \left(\frac{d_1}{d}\right)^2\right]$$

$$\Delta = \frac{d}{4}$$

oder weil wir als Regel aufgestellt haben, dass $\frac{d_1}{d} = 1 \cdot 2$ sein soll:

$$d_2 = 1 \cdot 56\ d, \quad \Delta = 0 \cdot 25\ d$$

Ein für das prompte Spiel der Ventile wichtiges Moment ist noch die Führung des Ventiles beim Heben und Niederfallen desselben. Diese Führung geschieht bei ganz kleinen Ventilen bis zu 2 Centimeter Durchmesser durch einen cannelirten Stiel, bei grösseren bis zu 6 Centimeter Durchmesser vermittelst eines Hohlcylinders mit durchbrochenen Wänden, bei noch grösseren bis zu 10 Centimeter Durchmesser durch einen Rundstab, der in einer Leitung schleift, endlich bei ganz grossen Ventilen durch einen runden Stiel, der oberhalb und unterhalb des Ventiles in Leitungen schleift, Fig. 7 bis 10, Tafel XXV. der Resultate.

Selbstwirkende Doppelsitz-Ventile. Eine besondere Art von Pumpenventilen sind die Doppelsitzventile, Fig. 12, Tafel XXV. der Resultate Dieselben sind zuerst von *Wicksteed* bei den Londoner Pumpwerken in Anwendung gebracht worden und gewähren den Vortheil, dass sie nur sehr wenig gehoben zu werden brauchen, um für den Durchgang des Wassers hinreichend grosse Oeffnungen darzubieten, haben jedoch den Nachtheil, dass sie einen heftigen inneren Wasserdruck erfordern, um vom Sitz gehoben zu werden. Um dies nachzuweisen, dient Fig. 15, Tafel XIII.

Es sei A der Querschnitt der inneren Ventilhöhlung, a der Querschnitt des oberen Ventilsitzes, $f\ f_1$ die Ringflächen, in welchen das Ventil die beiden Sitze berührt, p_1 und p die Intensitäten der äusseren und inneren Pressungen. Soll das Ventil gehoben werden, so muss der innere und nach aufwärts wirkende Druck $(A - a)\ p$ wenigstens so gross sein, als der äussere nach abwärts wirkende Druck $(A - a + f + f_1)\ p_1$. Für den kleinsten Werth von p, welcher die Hebung des Ventils zu bewirken vermag, ist demnach:

$$(A - a)\ p = (A - a + f + f_1)\ p_1$$

oder

$$p = \frac{A - a + f + f_1}{A - a}\ p_1 = \left(1 + \frac{f + f_1}{A - a}\right) p_1$$

Dieser Druck wird um so kleiner, je kleiner $f\,f_1$ und a ist, wird also am kleinsten, wenn $a = 0$ genommen wird. Dann aber verwandelt sich das Doppelsitzventil in ein ganz einfaches Ventil. Dass diese Ventile, obgleich sie sich so schwer heben lassen, dennoch gute Dienste leisten, rührt nicht von den Ventilen her, sondern hat seinen Grund in der eigenthümlichen Construktions- und Wirkungsweise der Pumpen, bei welchen sie angewendet werden.

Bei diesen Pumpen geschieht nämlich die Hebung des Wassers durch ein schweres Gewicht, das durch die Kraftmaschine gehoben, hierauf aber frei gelassen wird, um den Kolben in den Pumpencylinder hineinzutreiben. Würde man diese Doppelsitzventile bei Pumpen anwenden, deren Kolben durch die Kraftmaschine vermittelst eines geometrischen Zusammenhanges getrieben wird, so würde man die Erfahrung machen, dass sie da keine guten Dienste leisten, denn es würde beim Beginn jedes Kolbenschubes ein harter Stoss entstehen.

Doppelsitzventile für Dampfmaschinen. Bei grossen Dampfmaschinen zum Heben von Trinkwasser, so wie auch bei den sogenannten Wasserhaltungsmaschinen der Bergwerke werden Ventilsteuerungen gebraucht, und diese Ventile sind ebenfalls mit Doppelsitzen versehen; allein in dieser Anwendung sind diese Ventile tadellos, denn sie lassen sich leicht öffnen und gewähren bei geringer Erhebung einen freien Dampfdurchgang. Fig. 1, Tafel XIV. ist eine theoretische Darstellung eines solchen Ventiles.

Es sei A der innere Querschnitt des unteren Ventilsitzes, a der Querschnitt des oberen Ventilsitzes, $f\,f_1$ die untere und obere ringförmige Auflagefläche, p_1 der starke äussere, p der schwache innere Druck, K die Kraft, mit welcher auf den Ventilstiel nach vertikaler Richtung aufwärts eingewirkt werden muss, damit die Hebung des Ventils erfolgt, so hat man, wenn man das Gewicht des Ventiles vernachlässiget:

$$K = (A - a + f + f_1)\, p_1 - (A - a)\, p$$

oder

$$K = (A - a)(p_1 - p) + (f + f_1)\, p_1$$

Diese Kraft K fällt also klein aus, wenn a gross genommen wird, und wenn die Auflageflächen $f\,f_1$ klein sind.

Man erkennt die leichte Erhebung eines solchen Doppelventiles noch besser, wenn man demselben die Einrichtung Fig. 2, Tafel XIV. gibt, aus der man sieht, dass diese Anordnung aus zwei gewöhnlichen mit einander verbundenen Ventilen von ungleicher Grösse

besteht, von denen das kleine nur bestimmt ist, einen Theil des Druckes, der das Heben des grossen Ventiles erschwert, zu balanciren.

Heisst man A und a die untere Fläche der beiden Ventile, $f\,f_1$ die ringförmigen Auflagen derselben, p_1 den innen wirkenden Dampfdruck, p den aussen wirkenden Druck, K die zum Heben des Doppelventiles erforderliche Kraft, so hat man:

$$K = (A + f)\,p_1 + (a + f_1)\,p - a\,p_1 - A\,p$$

oder

$$K = (A - a)\,(p_1 - p) + f\,p_1 + f_1\,p$$

Klappenventile aus Metall. Die metallenen Klappenventile, Fig. 5 und 6, Tafel XXV. der Resultate, werden nur bei Pumpwerken gebraucht, vermittelst welchen sehr grosse Wassermengen auf geringe Höhen zu heben sind. Sie geben nämlich sehr grosse Oeffnungen, verschliessen aber nie so genau als Kegelventile, denn es hält sehr schwer, die Gewerbe so vollkommen anzufertigen und in dauerndem guten Zustand zu erhalten, wie es für einen dichten Verschluss bei hohem Wasserdruck nothwendig ist. Auch bei den sogenannten Luftpumpen der condensirenden Dampfmaschinen werden metallene Klappenventile gebraucht. Wenn die Ventilöffnung sehr gross sein muss, wird sie nicht rund oder quadratisch, sondern länglich viereckig gemacht, und zwar so, dass die lange Seite des Viereckes parallel läuft mit der Drehungsaxe der Klappe. Bei dieser Form braucht die Klappe nur sehr wenig gehoben zu werden, um den Flüssigkeiten einen hinreichend freien Durchgang darzubieten.

Klappenventile aus Leder. Fig. 13, Tafel XXV. der Resultate. Lederklappenventile werden oftmals und insbesondere bei Schachtpumpwerken gebraucht. Die ganze Klappe besteht aus einer runden, zwischen vier halbmondförmigen Metallplatten eingeklemmten Lederscheibe. Längs ihres Durchmessers ist dieselbe zwischen einer an dem Ventilsitz angegossenen Querstange und einem oben darüberliegenden Eisenstab vermittelst Schrauben eingeklemmt. Das Leder bildet durch seine Biegsamkeit ein natürliches dichtschliessendes Gewerbe. Das Ueble bei diesen Lederklappen ist nur, dass das Leder durch die fortdauernde Nässe, der es ausgesetzt ist, bald schwammig, oder gar chemisch verändert wird und desshalb oft erneut werden muss. In neuerer Zeit wird bei Ventilen oftmals Kautschuk statt Leder angewendet, Fig. 14, Tafel XXV. der Resultate.

Hahnen.

Hahnen werden vorzugsweise bei kleineren Wasserleitungsröhren gebraucht, um die verschiedenen Communikationen herzustellen oder aufzuheben.

Fig. 1 und 2, Tafel XXV. der Resultate ist ein Hahn, um eine gerade fortlaufendeRöhre zu verschliessen.

Fig. 3 und 4 ist ein Hahn für zwei unter rechtem Winkel zusammentreffende Röhren.

Ueber die Formen dieser Hahnen ist folgendes zu bemerken: Die Oeffnungen sind an dem Hahngehäuse aussen an der Flantsche kreisrund, innen an dem Hahnkörper und im Hahnkörper selbst viereckig, die beiden Querschnitte sind jedoch von gleicher Grösse. Diese Verschiedenheit in der Querschnittsform ist nur deshalb angenommen, weil der Hahn bei einer schmalen und hohen Oeffnung einen beträchtlich kleineren Durchmesser erhalten kann, als bei einer kreisrunden Oeffnung, und dadurch wird der ganze Gegenstand leichter, was bei dem kostspieligen Material, aus welchem die Hahnen angefertigt werden, wohl zu berücksichtigen ist, und überdies erhält der ganze Gegenstand eine gefälligere Form.

Die äussere Form des Gehäuses entspricht einerseits der innern Höhlung, ist aber andererseits so beschaffen, dass sie sich auf Werkzeugmaschinen regelmässig bearbeiten lässt. Die konische Form des Hahnkörpers hat den Zweck, den Hahn an die Gehäusehöhlung anschliessen zu machen, wenn sich die Berührungsflächen durch den Gebrauch abgerieben haben. Für grosse Röhren sind diese Hahneneinrichtungen nicht angemessen, sie fallen zu schwer und daher kostspielig aus, und das Herumdrehen eines grossen Hahnen geht zu schwer.

Drehklappen.

Fig. 3, Tafel XXVI. der Resultate. Drehklappen sind vorzugsweise zum Verschliessen weiter Röhren sehr geeignet, insbesondere wenn nicht der höchste Grad von Dichte verlangt wird. Die Einrichtung ist verhältnissmässig sehr einfach, leicht zu bearbeiten und gewährt den Vortheil der leichten Beweglichkeit, indem nur allein die Zapfenreibung der Klappenaxe zu überwinden ist. Wegen ihrer Beweglichkeit werden die Drehklappen auch bei Dampfmaschinen gebraucht, um die Dampfzuströmung mit Hilfe eines Schwungkugelregulators so zu reguliren, dass keine beträchtlichen Ungleichförmigkeiten im Gang der Maschine eintreten können.

Schieber.

Die Schieber bewirken bei sorgfältiger Ausführung und wenn insbesondere Schieber und Bahn auf einander geschliffen werden, einen sehr exakten und möglicher Weise den besten Verschluss, den man überhaupt hervorbringen kann. Die ganze Einrichtung ist aber eine verhältnissmässig complizirte und kostspielige und erfordert bei intensivem Druck gegen die Schieber ziemlich viel Kraft. Die Anordnung Fig. 2, Tafel XXVI. der Resultate, bei welcher der Schieber durch eine Schraube bewegt wird, ist für Wasserleitungen angemessen. Die Anordnung Fig. 1, wobei der Schieber durch Zahnstange und Getriebe bewegt wird, ist angemessen für Gaswerke, und wird auch zu diesem Zwecke allgemein gebraucht.

Deckel mit Stopfbüchsen für Dampfcylinder und Pumpencylinder.

(Resultate Seite 86, Tafel XXIV.)

Der Durchmesser und die innere Länge (von Deckel zu Deckel gemessen) der Dampf- und Pumpencylinder ergibt sich aus dem Studium dieser Maschinen. Hier betrachten wir diese Grössen als gegebene Daten, aus welchen die übrigen Detailabmessungen der Cylinder und Deckel mit Stopfbüchsen bestimmt werden können.

Die wichtigste Detaildimension ist die Wanddicke δ eines Dampf- oder Pumpencylinders, wenn der Durchmesser D gegeben ist.

Wenn man nur allein die Pressung des Dampfes oder des Wassers und den von aussen her gegen einen solchen Cylinder wirkenden atmosphärischen Druck zu berücksichtigen hätte, würde in der Regel eine ungemein schwache Wanddicke vollständig genügen. Allein diese Cylinder müssen gegen das Entweichen des Dampfes einen hohen Grad von Dichte gewähren, und müssen überdies sehr steif sein, damit sie durch das gewaltsame Einspannen in Drehbänke und Bohrmaschinen nicht merklich deformirt werden. Denn wenn ein Cylinder durch das Einspannen deformirt und dann ausgebohrt wird, entsteht eine Höhlung, die nur so lange cylindrisch ist, als sich der Cylinder noch im eingespannten Zustand befindet, die aber aufhört cylindrisch zu sein, so wie die Einspannung beseitigt wird.

Die Wanddicke, welche ein Cylinder erhalten muss, um nicht nur dem inneren Dampfdruck und äusseren atmosphärischen Druck,

sondern auch diesen gewaltsamen, bei der Bearbeitung vorkommenden Einwirkungen hinreichenden Widerstand zu leisten, und um ferner auch bei einer etwas porösen Beschaffenheit des Gusses eine hinreichende Dichte zu gewähren, kann selbstverständlich auf rationellem Wege nicht gefunden, sondern muss aus Erfahrungsthatsachen gefolgert werden, und eben so verhält es sich auch mit den übrigen an einem Cylinder und dessen Deckel vorkommenden Detailabmessungen.

Eine Vergleichung grösserer und kleinerer Dampfcylinder hat zu folgenden empirischen Regeln geführt.

Wanddicke des Cylinders $\delta = 1{\cdot}5 + \frac{D}{60}$

Anzahl der Deckelschrauben $= 3 + \frac{D}{7}$

Metalldicke der Deckelplatte $= \delta$

Dicke der Deckelschraubenbolzen $= \delta$

Breite einer Flantsche des Deckels oder des Cylinders $= 2\ \delta$

Dicke einer Flantsche $= 1{\cdot}33\ \delta$

Entfernung eines Schraubenbolzenmittels vom Rand des Deckels $= 1{\cdot}2\ \delta$

Untergeordnetere Detailverhältnisse sind in Fig. 1, Tafel XXIV. der Resultate eingeschrieben.

Die Deckelfläche ist in der Regel eine ebene Fläche, dies ist aber nur dann richtig, wenn die Kolbenfläche selbst eine Ebene bildet. Ist dagegen die Kolbenfläche gewölbt, oder hat sie aus irgend einem Grund eine von der Ebene abweichende Form, so muss auch die Deckelfläche eine mit der Kolbenoberfläche übereinstimmende Form erhalten, vorausgesetzt, dass der Raum zwischen dem Deckel und Kolben am Ende seines Schubes ein schädlicher Raum ist. Bei einfach wirkenden Dampfmaschinen kommt z. B. nur *ein* schädlicher Raum vor und zwar an der Seite, wo der Dampf eintritt. Zuweilen werden die Stopfbüchsendeckel mit doppelten Wänden versehen, also hohl gegossen, wodurch sie nicht nur an Festigkeit gewinnen, sondern noch den Vortheil gewähren, dass man diesen Hohlraum mit Dampf heizen kann, um so den im Cylinder wirkenden Dampf gegen Abkühlung und Condensation zu schützen. Dies ist insbesondere bei Expansionsmaschinen von Wichtigkeit. Aus dem gleichen Grunde umgibt man auch bei Expansionsmaschinen den Cylinder mit einem zweiten dichten Cylinder, und heizt den ringförmigen Zwischenraum mit Dampf.

Unter allen Umständen soll ein Dampfcylinder mit einer die Wärme nicht leitenden Umhüllung aus Haaren oder Filz umgeben

und um diese herum eine Verkleidung aus Holz oder Blech angebracht werden.

Fig, 2 und 6, Tafel XXIV. der Resultate sind Stopfbüchsen aus Messing für Pumpencylinder.

Kolben für Pumpen und Dampfmaschinen.

(Resultate Seite 87 und 88, Tafel XXVII.)

Von den Kolben der Pumpen und Dampfmaschinen werden Eigenschaften verlangt, die sich schwer vereinigen lassen. Sie sollen dicht schliessen und doch nur wenig Reibungswiderstand verursachen. Mehrere von den Kolben, deren Beschreibung nun folgt, haben in der That diese Eigenschaften.

Bei Pumpen, die nicht continuirlich, sondern nur von Zeit zu Zeit zu arbeiten haben, kann ein ganz einfacher metallener Kolben recht wohl gebraucht werden. Es ist dies insbesondere die für Löschspritzen geeignetste Einrichtung.

Eine früher oft bei grossen Pumpenkolben angewendete Construktion mit Lederdichtung besteht aus aufeinandergeschichteten Lederringen, die durch den Kolbendeckel zusammengepresst und dadurch auch auseinandergedrängt werden. Es ist dies eine ausser Gebrauch gekommene Einrichtung. Sie ist wegen des vielen Leders kostspielig, gewährt keinen dauernd sicheren Verschluss und ver ursacht in der Regel viele Reibung, weil es nicht möglich ist, den Lederringen gerade die rechte Grösse zu geben.

Fig. 9, Tafel XXVII. der Resultate ist ein ganz vorzüglicher Kolben für eine doppelt wirkende Druckpumpe, der Kolben besteht aus zwei tassenförmig gepressten Lederscheiben, die zwischen drei Metallscheiben eingeklemmt sind. Der Rand dieser Lederkörper wird durch den Wasserdruck selbst gegen die Cylinderwand gepresst und verhindert dadurch das Entweichen des Wassers.

Fig. 8 ist ein kleiner, Fig. 7 ein grosser Ventilkolben für Brunnen- und Hebepumpen. Diese Kolben sind ganz ähnlich eingerichtet, wie die Seite 252 beschriebenen Lederklappenventile, nur ist bei den Kolben an deren Umfang eine Lederumwicklung vorhanden, die von einem Metallring gehalten wird. Der über den Kolbenkörper hinausragende Rand dieses Leders wird von dem Wasserdruck gegen die Cylinderwand gepresst und bringt dadurch den dichten Schluss hervor.

Fig. 12 ist ein kleiner Kolben mit Hanfdichtung für Warmwasserpumpen, bei welchen Leder wegen des Verkochens nicht angewendet werden darf. Diese Dichtung besteht aus aufeinandergeschichteten eingeölten Ringen aus zartem Hanf geflochten. Durch den Kolbendeckel können diese Ringe zusammengepresst und dadurch indireckt fest gegen die Cylinderwand gepresst werden.

Fig. 11 ist ein ähnlicher Kolben, er ist jedoch mit einem Ventil versehen und kann für kleinere Dampfmaschinen - Luftpumpen gebraucht werden.

Bei einer Vergleichung verschiedener grosser und kleiner Pumpenkolben hat sich die empirische Regel ergeben, dass die Höhe der Kolbendichtung oder die Höhe des Kolbens gleich $8\left(1+\frac{D}{100}\right)$ genommen werden darf, wobei D den Durchmesser des Kolbens in Centimetern bedeutet.

Fig. 4 zeigt die Einrichtung eines Kolbens für Gebläse. Die Dichtung geschieht wie bei den Wasserpumpenkolben, vermittelst Lederringen mit aufwärts und abwärts gebogenem Rand.

Fig. 2 zeigt die Stopfbüchsendichtung für Taucherkolben.

Fig. 5 ist ein Kolben mit Hanfdichtung für eine Dampfmaschine. Die Dichtung besteht auch hier aus aufeinandergeschichteten und eingefetteten Ringen von Hanfgeflechten, und sie kann durch Niederschrauben der Deckelplatte zusammengepresst und dadurch zugleich indirekt auseinandergetrieben werden. Diese Kolben haben die vortreffliche Eigenschaft, dass sie die Cylinder nicht angreifen, sondern im Gegentheil auf das Feinste ausschleifen, allein sie haben auch mehrere sehr nachtheilige Eigenschaften. Eine derselben ist, dass der Verschluss nicht gleich dicht bleibt, denn die Hanfmasse nützt sich ab und verliert ihre Elastizität, so, dass man in nicht gar langen Zeitintervallen gezwungen ist, die Dichtung entweder ganz zu erneuen, oder doch nachzuhelfen. Für die Niederdruck - Dampfmaschinen der Dampfschiffe sind diese Kolben gut brauchbar und werden da auch sehr allgemein angewendet, allein für Hochdruckmaschinen ist der Verschluss nicht dicht genug.

Für Hochdruckdampfmaschinen werden gegenwärtig ganz allgemein Kolben mit Metalldichtung gebraucht. Diese Metalldichtung besteht entweder aus zwei sich federnden Metallringen, oder aus zwei Schichten von Metallsegmenten, die durch Federn nach aussen getrieben werden.

Fig. 1 ist ein Ringkolben. Die Ringe werden gewöhnlich von Gusseisen, zuweilen aber auch von Schmiedeeisen, Kanonenmetall oder aus Metallcomposition hergestellt. Welches Metall das beste ist, ist

noch nicht entschieden, wahrscheinlich ist der Unterschied zwischen dem einen und dem andern so gering, dass er sich thatsächlich kaum erkennen lässt. Auch über die Form der Ringe ist man nicht im Reinen. Zuweilen werden die Ringe überall gleich breit (nach radialer Richtung) gehalten, zuweilen wird der Ring da, wo er aufgeschnitten ist, zuweilen aber an der diametral gegenüber befindlichen Stelle breiter gehalten. Wahrscheinlich ist es beinahe gleichgültig, ob man den Ring gleich oder ungleich breit hält, weil aber die gleiche Breite die einfachere Form ist, so möchte sie wohl den Vorzug verdienen. Auch in der Einrichtung der Federung, durch welche die Ringe gespannt werden, hat man auf die mannigfaltigste Weise variirt, aber gegenwärtig wird diese ganze innere Federung meistens ganz weggelassen, so dass die Ringe nur durch ihre eigene Elastizität an der Cylinderwand anliegen. Von besonderer Wichtigkeit ist die sorgfältige Bearbeitung der Ringe und der innern Flächen, mit welchen die Ringe in Berührung kommen. Die Ringe dürfen ja nicht eingeklemmt werden, sondern sie müssen aufeinander und an den inneren Seiten der Kolbenplatten spielen können. Denkt man sich, dass der innere Abstand der Kolbenplatten etwas grösser ist als die Höhe beider Ringe zusammen, so kann man sich leicht überzeugen, dass der innere Raum des Kolbens stets mit dem Theil des Cylinderraumes communizirt, nach welchem hin der Kolben sich bewegt. Denn zunächst wird der Kolbenkörper fortgetrieben und dieser nimmt dann erst die Ringe mit sich fort, es muss also, wie Fig. 3, Tafel XIV. zeigt, im Innern des Kolbens stets nur ein schwacher Druck herrschen. Man hat auch Kolben construirt, bei welchen im Gegentheil im Innern des Kolbens stets der starke Dampfdruck wirkt, allein diese verursachen wahrscheinlich viele Reibung.

Nicht nur bei diesen Ringkolben, sondern noch mehr bei den Segmentkolben hat man unendlich vielerlei Einrichtungen und Federwerke versucht, und überhaupt auf die kleinlichste Weise herumgepröbelt, aber es scheint mir das alles keinen praktischen Werth zu haben und ich glaube, dass man dieses Segmentwerk ganz verlassen und auch für ganz grosse Maschinen einfache Ringkolben anwenden wird.

Bei Maschinen mit liegenden Cylindern kann man ohnedies nur Ringkolben gebrauchen, weil bei dieser Lage der Cylinder die Segmente leicht in Unordnung gerathen könnten, und so werden sich schon aus diesem Grunde die Ringkolben mehr und mehr verbreiten. Die Lokomotiv-Maschinen, Seedampf-Maschinen und kleineren Fabrik-Maschinen haben meistens horizontale Cylinder.

Die nach der Richtung der Cylinderaxe gemessene Summe h der Ringhöhen oder Segmentschichten ist wegen des dichten Verschlusses so wie auch wegen der Cylinderabnutzung von Wichtigkeit. Damit ein Kolben gut schliesst, muss der Gesammtdruck der Dichtung gegen die Cylinderfläche eine gewisse Grösse haben. Die Intensität des Druckes (Druck per 1 Quadratcentimeter) der Dichtung gegen den Cylinder kann daher klein gemacht werden, wenn die Dichtungshöhe h gross gemacht wird, wodurch der Cylinder gegen das Ausschleifen geschützt wird. Es ist also eine verhältnissmässig hohe aber weich anliegende Dichtung besser, als eine niedrige streng anliegende.

Eine Vergleichung der Kolben von gut ausgeführten grösseren und kleineren Dampfmaschinen hat zu der Regel geführt, dass die Höhe h der Metalldichtung gleich $4\left(1+\frac{D}{100}\right)$, die Höhe einer Hanfdichtung dagegen gleich $8\left(1+\frac{D}{100}\right)$ genommen werden darf.

DRITTER ABSCHNITT.

Berechnung der Widerstände.

A. Reibung, B. Steifheit der Seile und Ketten, C. Wälzungswiderstand.

A. Reibung.

Die empirischen Gesetze, nach welchen sich die Reibungswiderstände richten, sind in den „Prinzipien" in dem Abschnitt, welcher von der Reibung handelt, ausführlich erklärt worden. Die Kenntniss dieser Gesetze kann also hier vorausgesetzt werden, und es soll in diesem Abschnitt nur die Berechnung der Reibungswiderstände, welche die verschiedenen Maschinentheile verursachen, behandelt werden.

Reibung eines auf einer schiefen Ebene liegenden Körpers. Ein Körper liege auf einer schiefen Ebene, man soll, mit Berücksichtigung der Reibung, die Kraft bestimmen, welche im Stande ist, den Körper längs der schiefen Ebene hinaufzubewegen.

Es sei Fig. 4, Tafel XIV. Q das Gewicht des Körpers, α die Neigung der schiefen Ebene, P die Kraft, welche den Körper längs der schiefen Ebene hinauf zu bewegen im Stande ist, β der Winkel, den die Richtung der Kraft P mit der schiefen Ebene bildet, f der Reibungscoeffizient.

Dies vorausgesetzt ist $Q \cos \alpha - P \sin \beta$ der Normaldruck des Körpers gegen die schiefe Ebene, demnach $f\,(Q \cos \alpha - P \sin \beta)$ der daraus entstehende Reibungswiderstand. Ferner sind $P \cos \beta$, $Q \sin \alpha$ die zur schiefen Ebene parallelen Componenten der Kräfte P und Q. Damit nun der Körper längs der schiefen Ebene hinauf bewegt

wird, muss $P \cos \beta$ nicht nur $Q \sin \alpha$, sondern auch die Reibung $f(Q \cos \alpha - P \sin \beta)$ zu überwinden im Stande sein. Man hat daher:

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha + f(Q \cos \alpha - P \sin \beta)$$

Hieraus folgt:

$$P = Q \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Will man die Kraft P_1 kennen lernen, welche statt P im Stande ist, das Herabgleiten zu verhindern, so hat man nur in dem Ausdruck (1) P_1 statt P und $-f$ statt f zu setzen. Man findet demnach:

$$P_1 = Q \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wirken die Kräfte P und P_1 nach horizontaler Richtung, so ist $\beta = -\alpha$ und dann wird:

$$\left.\begin{array}{l} P = Q \dfrac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = Q \dfrac{\tan \alpha + f}{1 - f \tan \alpha} \\[2ex] P_1 = Q \dfrac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = Q \dfrac{\tan \alpha - f}{1 + f \tan \alpha} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Die Kraft P_1 wird Null, d. h. der Körper gleitet selbst dann nicht herab, wenn er gar nicht gehalten wird, wenn

$$\tan \alpha = f \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Kraft P wird unendlich gross, wenn

$$\tan \alpha = \frac{1}{f} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Kreuzkopf und Linealführung. Der Druck des Kreuzkopfes gegen das Führungslineal ist veränderlich mit der Stellung der Kurbel.

Nennt man Fig. 5, Tafel XIV. P die Kraft, mit welcher der Kolben getrieben wird, r den Halbmesser der Kurbel, α den Winkel, den in irgend einem Augenblick der Bewegung ihre Richtung mit jener der Kolbenstange bildet, l die Länge der Schubstange, β den veränderlichen Winkel, den ihre Richtung mit jener der Kolbenstange bildet, N die wechselseitige Pressung zwischen dem Kreuzkopf und dem Führungslineal, S den in der Schubstange wirkenden Widerstand, f den Reibungscoeffizienten. Dies vorausgesetzt hat die Kraft P nicht nur den Widerstand $S \cos \beta$, sondern auch die Reibung $N f$ zu überwinden.

Man hat daher:

$$S \cos \beta + f N = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist aber ferner:

$$S \sin \beta = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Hieraus folgt, wenn man S eliminirt und N sucht:

$$N = P \frac{\sin \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Der Reibungswiderstand beträgt also in dem Augenblick, wenn die Schubstange mit der Kolbenrichtung einen Winkel β bildet:

$$N f = P f \frac{\sin \beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieser Reibungswiderstand ist mit β variabel, suchen wir also den mittleren Werth desselben von $\beta = 0$ bis zu $\beta = \frac{r}{l}$, d. h. für die Bewegung der Kurbel durch nahe einen Quadranten.

Heissen wir diesen mittleren Werth F_m und setzen $\frac{r}{l} = \gamma$, so ist:

$$F_m = \frac{1}{\gamma} \int_0^{\gamma} N f \, d\beta$$

oder wenn man für $N f$ seinen Werth aus (4) einführt:

$$F_m = \frac{P f}{\gamma} \int_0^{\gamma} \frac{\sin \beta \, d\beta}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Das genaue Integrale dieser Gleichung ist ein sehr complizirter Ausdruck; für unsern Zweck genügt eine Annäherung, die wir erhalten, wenn wir bedenken, dass in allen Anordnungen γ eine kleine Grösse ist. Wir setzen daher:

$$\cos \beta = 1, \quad \sin \beta = \beta$$

Dann wird:

$$F_m = \frac{P f}{\gamma} \int_0^{\gamma} \frac{\beta \, d\beta}{1 + f \beta}$$

Es ist aber:

$$\frac{\beta}{1 + f \beta} = \frac{1}{f} \left(1 - \frac{1}{1 + f \beta}\right)$$

Demnach:

$$F_m = \frac{P}{\gamma}\int_0^{\gamma}\left(1 - \frac{1}{1+f\beta}\right) d\beta$$

Das Integrale ist:

$$F_m = \frac{P}{\gamma}\left[\gamma - \frac{1}{f}\,\text{lognat}\,(1+f\gamma)\right]$$

oder

$$F_m = P\left[1 - \frac{1}{f\gamma}\,\text{lognat}\,(1+f\gamma)\right]$$

Weil das Produkt $f\,\gamma$ gegen die Einheit jederzeit sehr klein ist, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man setzt:

$$\text{lognat}\,(1+f\gamma) = f\gamma - \frac{1}{2}f^2\gamma^2$$

und dann wird

$$F_m = \frac{1}{2}Pf\gamma = \frac{1}{2}Pf\frac{r}{l} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Nennt man v die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens und e den zur Ueberwindung der Reibung erforderlichen Krafteffekt, so ist $e = v\,F_m$ demnach

$$\left.\begin{aligned} e &= \frac{1}{2}Pf\frac{rv}{l} = Pv\,\frac{1}{2}\frac{r}{l}f \\ \frac{e}{Pv} &= \frac{1}{2}\frac{r}{l}f \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Dieser Quotient ist das Verhältniss des Effektes, der verloren geht, und des im Kolben wirkenden Effektes. Derselbe drückt also den verhältnissmässigen Effektverlust aus. Bei Lokomotiven ist $\frac{r}{l} = \frac{1}{6}$ $f = \frac{1}{10}$, demnach

$$\frac{e}{Pv} = \frac{1}{120} = 0{\cdot}008$$

Der Verlust beträgt also in diesem Falle kaum 1 Prozent, wäre also leicht zu verschmerzen, wenn nicht der fatale Umstand wäre, dass durch die Reibung des Kreuzkopfes am Lineal ein Hohlausschleifen desselben entstünde, weil der Druck N am Anfang und

Ende eines Kolbenschubes gleich Null, in der Mitte des Kolbenschubes dagegen $\mathrm{P}\ \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{l}}$ wird.

Es ist noch zu bemerken, dass der Kreuzkopf immer nur gegen das eine der beiden Lineale einen Druck ausübt, so lange die Bewegungsrichtung der Kurbel keine Aenderung erleidet. Beim Vorwärtsfahren drückt der Kreuzkopf gegen das obere Lineal, dies wird also vorzugsweise ausgeschliffen, und muss insbesondere sorgfältig geölt werden, was aber dadurch geschehen sollte, indem man mit dem Kreuzkopf selbst das Oelgefäss verbindet und hin- und herlaufen lässt.

Kolbenreibung. Damit eine Kolbendichtung, ohne unnöthige Reibung zu veranlassen, hinreichend verschliesst, muss dieselbe eine gewisse Höhe haben, und mit einer gewissen Intensität gegen die Wandfläche angepresst werden.

Nennt man D den Durchmesser des Kolbens, h die parallel mit der Axe gemessene Höhe der Kolbendichtung, $\mathfrak{p}$ die Intensität der Pressung, d. h. die Kraft, mit welcher jeder Quadratcentimeter der Dichtungsfläche gegen die Wand gepresst ist, f den Reibungscoeffizienten, p die Differenz der Pressungen der Flüssigkeit vor und hinter dem Kolben, auf 1 Quadratcentimeter bezogen, so ist der Betrag der Kolbenreibung:

$$\mathrm{D}\,\pi\,\mathrm{h}\,\mathfrak{p}\,f$$

Dagegen ist die Kraft, mit welcher der Kolben fortgetrieben wird: $\frac{\mathrm{D}^2\,\pi}{4}\,\mathrm{p}$. Das Verhältniss des Reibungswiderstandes zur gesammten Kraft, die auf den Kolben wirkt, ist demnach:

$$\frac{\mathrm{D}\,\pi\,\mathrm{h}\,\mathfrak{p}\,f}{\frac{1}{4}\mathrm{D}^2\,\pi\,\mathrm{p}} = \frac{4}{\mathrm{D}}\,\frac{\mathrm{h}\,\mathfrak{p}}{\mathrm{p}}\,f$$

Es scheint, dass der Quotient $\frac{\mathrm{h}\,\mathfrak{p}}{\mathrm{p}}$ genau oder nahe einen constanten Werth hat. Unter dieser Voraussetzung ist der verhältnissmässige Kraftverlust, den eine Kolbenreibung verursacht, dem Reibungscoeffizienten direkt und dem Durchmesser des Kolbens verkehrt proportional.

Kleinere Kolben verursachen demnach verhältnissmässig grössere Kraftverluste als grosse, daher in dieser Hinsicht grosse Pumpen und Dampfmaschinen vortheilhafter sind, als kleine. Leider gibt es

keine verlässlichen Versuche, durch welche der numerische Werth von $\frac{4\,h\,\mathfrak{p}}{p} f$ für verschiedene Kolbenanordnungen bestimmt wäre; man ist daher heut zu Tage noch nicht im Stande, eine Kolbenreibung mit Zuverlässigkeit zu berechnen. Indessen ist der aus dieser Unkenntniss entstehende Nachtheil in praktischer Hinsicht doch von keiner Bedeutung, denn was man zu thun hat, um die Kolbenreibung klein zu machen, weiss man ja doch, und diese Reibung wird durch eine genaue Berechnung weder grösser noch kleiner.

Zapfenreibungen.

Umfangsreibung eines continuirlich rotirenden cylindrischen Zapfens. Es sei P der Druck, mit welchem die Umfangsfläche eines Zapfens gegen sein Lager gepresst wird, f der Reibungscoeffizient, v die Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens in Metern und in einer Sekunde, d der Durchmesser des Zapfens in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute, so ist: $P f$ die Umfangsreibung und $P f v$ der in Kilogramm-Metern ausgedrückte Effekt der Zapfenreibung. Nun ist $v = \frac{d \pi . n}{100 \times 60}$, daher wird dieser Effekt auch:

$$e = \frac{n\,d\,P\,f}{1910} \text{ Kilogramm-Met. } \ldots \ldots \quad (1)$$

Der Betrag einer solchen Zapfenreibung ist in der Regel nicht sehr von Belang im Verhältniss zur Kraft, die durch eine Welle übertragen wird. Auch ist die Abnutzung, in so ferne als sie ringsum stattfindet, daher eine Formänderung nicht hervorbringt, von keinem Belang. Nur allein das Warmlaufen ist bei schnell sich drehenden Zapfen zu befürchten, daher ist für derlei Zapfen ein grosser Durchmesser und eine beträchtliche Länge zu empfehlen, man muss aber auch für ein gleichmässiges Aufliegen des Zapfens im Lager Sorge tragen.

Bodenreibung bei stehenden cylindrischen Zapfen. Vorausgesetzt dass die Grundfläche eines stehenden Zapfens ganz gleichmässig gegen die Pfanne gepresst wird, ergibt sich der Reibungswiderstand auf folgende Weise. Nennt man P_1 den Druck der Zapfengrundfläche gegen die Pfanne, d den Durchmesser des Zapfens in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute, so ist $\frac{P_1}{\frac{1}{4} d^2 \pi}$

der Druck jedes Quadratcentimeters der Grundfläche gegen den Boden. Verzeichnet man auf die Grundfläche mit zwei Halbmessern x und $x + \delta x$ concentrische Kreise (wobei δ das Differentialzeichen bedeutet), so ist der Druck der zwischen diesen Kreisen enthaltenen ringförmigen Fläche gegen den Boden der Pfanne:

$$2 x \pi \delta x \frac{P_1}{\frac{1}{4} d^2 \pi} = \frac{8 P_1}{d^2} x \delta x$$

Die daraus entstehende Reibung ist demnach:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f x \delta x$$

Das Moment des ganzen Reibungswiderstandes ist demnach:

$$\frac{8 P_1}{d^2} f \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 \delta x = \frac{1}{3} P_1 f d$$

Die Kraft, welche am Umfange des Zapfens wirken muss, um dieses Reibungsmoment zu bewältigen ist demnach:

$$\frac{\frac{1}{3} P_1 f d}{\frac{1}{2} d} = \frac{2}{3} P_1 f$$

und der zur Bewältigung der Reibung erforderliche Effekt e_1 ist folglich:

$$e_1 = \frac{2}{3} \frac{n d P_1 f}{1910}$$

Wird die Umfangsfläche eines stehenden Zapfens mit einer Kraft P, die Grundfläche mit einer Kraft P_1 gedrückt, so ist der zur Bewältigung beider Reibungen erforderliche Effekt:

$$e_2 = \frac{n d f}{1910} \left(P + \frac{2}{3} P_1\right)$$

Umfangsreibung bei Zapfen, die sich hin und her drehen. Bei Zapfen, die nicht rund umlaufen, sondern sich nur um einen gewissen Winkel α hin und her drehen, ist der Reibungseffekt offenbar im Verhältniss $\frac{2 \alpha}{360}$ kleiner als bei continuirlich rund umlaufenden. Man hat daher für hin und her drehende Zapfen:

$$e = \frac{n\, d\, P\, f}{1910}\, \frac{2\,\alpha}{360}$$

wobei n die Zahl ist, welche ausdrückt, wie viel mal der Zapfen in einer Minute hin und her gedreht wird. Eine Hin- und Herdrehung als Eins gerechnet.

Dieser Reibungswiderstand ist insbesondere von keinem Belang, wenn $2\,\alpha$ gegen 360^0 klein ist, z. B. bei den Zapfen an einem Dampfmaschinenbalancier. Allein ein Umstand ist bei derlei Zapfen sehr nachtheilig, nämlich das Unrundwerden dieser Zapfen, weil nicht die ganze Oberfläche, sondern nur ein Theil derselben dem Abschleifen ausgesetzt ist.

Reibung eines stehenden Zapfens, der nach einer Rotationsfläche geformt ist. Nehmen wir an, der Zapfen einer vertikalen Welle sei nach einer Rotationsfläche geformt und eben so auch die Pfanne, in der er sich dreht, Fig. 6, Tafel XIV. Der Zapfen werde mit einer Kraft Q nach vertikaler Richtung in die Pfanne gedrückt. Nehmen wir einen beliebigen Punkt O der Axe als Anfangspunkt eines Coordinatensystems; die geometrische Axe des Zapfens als Abscissenaxe. $O\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m des Meridianschnittes der Rotationsfläche, $O\,p_1 = x + d\,x$, $m_1\,p_1 = y + d\,y$ die Coordinaten eines von m unendlich wenig entfernten Punktes m_1, $\overline{m\,m_1} = d\,s$. Nennt man N die auf die Flächeneinheit bezogene Pressung, welche nach normaler Richtung gegen jeden Punkt des zwischen den Ebenen $m\,p$ und $m_1\,p_1$ befindlichen Theiles der Oberfläche des Zapfens wirkt, so ist $2\,\pi\,y\,d\,s\,N$ der gesammte Normaldruck gegen diesen Flächentheil und $2\,\pi\,y\,d\,s\,N \sin\varphi$ die Kraft, mit welcher der Zapfen vermöge dieses Normaldruckes nach vertikaler Richtung aufwärts gedrückt wird. In diesem Ausdruck bedeutet φ den Winkel, den die zum Punkte m gezogene Berührungslinie mit der Axe des Zapfens bildet.

Es ist also $\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N \sin\varphi$ der aus sämmtlichen Normalpressungen entspringende, nach vertikaler Richtung aufwärts wirkende Druck. Man hat daher:

$$\int_{r_0}^{r} 2\,\pi\,y\,d\,s\,N \sin\varphi = Q \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

In diesem Ausdruck sind r_0 und r die Halbmesser $B\,B_1$ und $A\,A_1$. Allein es ist $\sin\varphi = \frac{d\,y}{d\,s}$, daher findet man:

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^{r} y\, N\, dy \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nennt man ω die Winkelgeschwindigkeit der Axe, so ist ωy die Geschwindigkeit, mit der die Reibung überwunden wird, die aus dem Normaldruck $2\pi y\, ds\, N$ entsteht. Der Effekt e, welcher der Ueberwindung der totalen Reibung entspricht, ist demnach:

$$e = \int_{r_0}^{r} 2\pi y\, ds\, N f y\, \omega = \omega\, 2\pi f \int_{r_0}^{r} y^2\, N\, ds \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Der im Allgemeinen variable Normaldruck N richtet sich nach der Form des Zapfens und muss aus diesem durch statische Betrachtungen ausgemittelt werden, was nunmehr geschehen soll.

Nehmen wir an, der Zapfen werde zuerst so in die Pfanne gesetzt, dass zwischen den Berührungsflächen nur eine geometrische Berührung und keine Pressung statt findet. Lässt man hierauf die Kraft Q einwirken, so entstehen zwischen den Berührungsflächen Normalpressungen, die so lange zunehmen, bis sie der Kraft Q das Gleichgewicht halten. Dabei wird die Zapfenfläche, so wie auch die Fläche der Pfanne deformirt, aber in der Weise, dass Zapfen und Pfanne in jedem Augenblick übereinstimmende Formen haben. Diese Formen werden aber auch entstehen, wenn wir sowohl die Axe als auch die Pfanne festhalten und sowohl gegen die Fläche des Zapfens als auch gegen die Fläche der Pfanne Normalpressungen einwirken lassen, die jenen gleich sind, welche eintreten, wenn der Zapfen mit einer Kraft Q in die Pfanne gedrückt wird. Durch die Normalpressungen gegen den Zapfen geht derselbe aus der Form AB in die Form CD über, Fig. 7, Tafel XIV., und durch die Normalpressungen gegen die Pfanne geht dieselbe aus der Form AB in die Form EF über. Diese Formen CD und EF müssen aber nothwendig übereinstimmen, wenn die Entfernung $\overline{st}$ der Punkte, in welchen die Linien CD und EF durch irgend eine vertikal gezogene Linie smt geschnitten werden, von gleicher Grösse ist, denn ist dies der Fall, so wird die Fläche CD mit EF zusammen fallen, wenn man die deformirte Zapfenfläche um die constante Länge st niederbewegt.

Zieht man durch m die Normale $n\,m\,q\,u$, so sind $\overline{mq}$ und $\overline{mn}$ die Zusammenpressungen des Zapfens und der Pfanne durch den Normaldruck N, man darf daher setzen $\overline{mq} = \varepsilon N$, $\overline{mn} = \varepsilon_1 N$, wobei $\varepsilon\, \varepsilon_1$ constante Grössen bezeichnen, die von der Elastizität des Materials abhängen, aus welchem Zapfen und Pfanne gefertiget sind.

Da die Zusammendrückungen sehr klein sind, so darf man m s q und m n t als unendlich kleine, geradlinige Dreiecke ansehen, es ist demnach:

$$\overline{mq} = \overline{ms} \sin \varphi, \quad \overline{mn} = \overline{mt} \sin \varphi$$

oder:

$$\overline{mq} + \overline{mn} = \sin \varphi \, (\overline{ms} + \overline{mt})$$

Setzt man für $\overline{mq}$ und $\overline{mn}$ die oben aufgestellten Werthe und bezeichnet die constant sein sollende Länge $\overline{ms} + \overline{mt} = st$ mit λ, so erhält man:

$$\varepsilon \, N + \varepsilon_1 \, N = \lambda \sin \varphi$$

und hieraus folgt:

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

Hierdurch ist nun der Normaldruck N berechnet und man erhält, wenn man denselben in (2) und (3) einführt:

$$Q = 2 \pi \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \, y \, dy = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin \varphi \, dy$$

$$e = 2 \pi f \omega \int_{r_0}^{r} \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \varphi \, y^2 \, ds = 2 \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \sin \varphi \, ds$$

oder auch weil $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$ ist:

$$Q = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y \frac{dy}{ds} \, dy \quad \ldots \ldots \ldots (5)$$

$$e = 2 \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} y^2 \, dy \quad \ldots \ldots \ldots (6)$$

oder weil $\int_{r_0}^{r} y^2 \, dy = \frac{1}{3} (r^3 - r_0^3)$ ist:

$$e = \frac{2}{3} \pi f \omega \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} (r^3 - r_0^3) \quad \ldots \ldots \ldots (7)$$

auch findet man durch Division von (7) und (5):

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega \frac{r^3 - r_0^3}{\int_{r_0}^{r} y \frac{dy}{ds} \, dy} \quad \ldots \ldots \ldots (8)$$

Beispiele. Wir wollen diese Formeln auf spezielle Zapfenformen anwenden.

Für einen Zapfen mit ebener kreisförmiger Grundfläche ist $r_0 = o$, $ds = dy$, daher vermöge (5):

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^r y\, dy = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$$

$$\lambda = (\varepsilon + \varepsilon_1) \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Ferner vermöge (4) und (8):

$$N = \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin 90^0 = \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f \omega r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Für einen konischen oder Spitzzapfen, Fig. 8, Tafel XIV., ist $r_0 = o$, $ds \sin \beta = dy$, $\sin \varphi = \sin \beta$, man findet also:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^r y \sin \beta\, dy$$

$$Q = \pi r^2 \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \sin \beta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

$$N = \frac{Q}{r^2 \pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\frac{e}{Q} = \frac{2}{3} f \omega \frac{r}{\sin \beta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Für einen halbkugelförmigen Zapfen darf man mit Berücksichtigung von Fig. 9, Tafel XIV setzen:

$$x = r(1 - \cos \psi), \quad y = r \sin \psi, \quad ds = r\, d\psi, \quad r_0 = o$$

und dann wird:

$$dx = r \sin \psi\, d\psi, \quad dy = r \cos \psi\, d\psi$$

demnach:

$$Q = 2\pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_o^{\frac{\pi}{2}} r \sin \psi \cos \psi\, r \cos \psi\, d\psi$$

$$Q = \frac{2}{3} \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} r^3 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

$$\frac{e}{Q} = f\,\omega\,r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$N = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{r^2\,\pi}\cos\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Zapfenform, welche die geringste Erwärmung verursacht. Wir wollen uns die Aufgabe stellen, die Form eines Zapfens so zu bestimmen, dass die durch die Reibung entstehende Erwärmung an jedem Punkt der Berührungsfläche zwischen Zapfen und Pfanne einen gleichen aber geringen Werth erhält. Durch einen Zapfen, welcher diese Eigenschaft besitzt, wird man sich wohl am besten gegen das so nachtheilige Abnutzen und Warmlaufen schütsen.

Die an einer Stelle der Oberfläche des Zapfens in Folge der Reibung entstehende Erwärmung muss wahrscheinlich nach der Arbeit beurtheilt werden, welche der Ueberwindung der Reibung entspricht, die auf der Einheit der Fläche stattfindet. Diese Arbeit muss also für jeden Punkt der Oberfläche des Zapfens constant sein.

Nun ist für eine Stelle des Zapfens, welche einem Halbmesser y entspricht, Fig. 6, $N f$ der Reibungswiderstand auf der Flächeneinheit und $\omega\,y$ die Geschwindigkeit, mit welcher die Reibung überwunden wird, wir haben daher zu setzen:

$$N\,f\,\omega\,y = \text{const} = k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

wobei k eine durch Erfahrung zu bestimmende constante Grösse bedeutet.

Setzen wir für N seinen Werth aus (4), so wird:

$$\frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}\sin\varphi\,f\,\omega\,y = k$$

oder:

$$y\sin\varphi = \frac{k\,(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda\,f\,\omega}$$

Das Produkt $y \sin \varphi$ muss also für jeden Punkt des Zapfens einen und denselben Werth haben. Nennen wir α den Werth von φ, welcher dem grössten Halbmesser $y = r$ entspricht, so haben wir:

$$y\sin\varphi = r\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\frac{k\,(\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda\,f\,\omega} = r\sin\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Die Gleichung (19) bestimmt die Form des Zapfens. Es ist nämlich $\sin\varphi = \frac{dy}{ds}$, daher erhalten wir aus (19):

$$y\,dy = r \sin\alpha\, ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{1}{2} y^2 = r\,s \sin\alpha + \text{const}$$

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Punkt B_1, Fig. 6, Tafel XIV, so ist für $y = r_0$, $s = o$, demnach:

$$\frac{1}{2} r_0^2 = o + \text{const}$$

demnach:

$$\frac{1}{2}(y^2 - r_0^2) = r\,s \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Dies ist die Gleichung der Zapfenform, ausgedrückt durch y und s. Suchen wir aber auch die Gleichung der Zapfenlinie durch x und y darzustellen.

Es ist $ds = dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$. Führt man diesen Werth von ds in (21) ein, so findet man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$dx = dy\sqrt{\left(\frac{y}{r\sin\alpha}\right)^2 - 1}$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$x = + \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{y^2}{r^2 \sin^2\alpha} - 1} - \frac{r \sin\alpha}{2} \operatorname{lognat}\left(\frac{y}{r\sin\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1}\right) + \text{const}$$

y kann nie kleiner werden als $r \sin\alpha$, weil sonst die Wurzelgrösse $\sqrt{\left(\frac{y}{r\sin\alpha}\right)^2 - 1}$ imaginär würde. Der kleinste zulässige Zapfenhalbmesser ist demnach gleich $r \sin\alpha$ oder:

$$r_0 = r \sin\alpha$$

Für $y = r_0 = r\sin\alpha$ wird aber $x = o$, daher findet man $\text{const} = o$ und die Gleichung der Zapfenkurve wird:

$$x = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1} - \frac{r\sin\alpha}{2} \operatorname{lognat}\left(\frac{y}{r\sin\alpha} + \sqrt{\frac{y^2}{r^2\sin^2\alpha} - 1}\right) \quad (23)$$

Der grösste Halbmesser ist $y = r$. Nennt man h die Höhe des Zapfens, setzt also $A_1 B_1 = h$, Fig. 6, so muss für $y = r$, $x = h$ werden, daher hat man:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{2} \text{ lognat} \left(\frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Hierdurch ist das Verhältniss zwischen der Höhe des Zapfens und seinem grössten Halbmesser r bestimmt. Berechnen wir nun auch den Werth von Q und von e.

Vermöge (19) und (20) wird:

$$Q = 2 \pi \frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1} \int_{r_0}^{r} \frac{k (\varepsilon + \varepsilon_1)}{\lambda f \omega} d y = 2 \pi \frac{k}{f \omega} (r - r_0)$$

oder weil $r_0 = r \sin \alpha$ ist:

$$Q = 2 \pi \frac{k}{f \omega} (1 - \sin \alpha) r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Hieraus ergibt sich der Zapfenhalbmesser:

$$r = \frac{f \omega}{2 \pi k} \frac{Q}{(1 - \sin \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Führt man in (7) für $\frac{\lambda}{\varepsilon + \varepsilon_1}$ den Werth ein, welcher aus (20) folgt, so findet man:

$$e = \frac{2}{3} \pi k r^2 \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

oder endlich, wenn man vermittelst (26) den Werth von r wegbringt:

$$e = \frac{1}{6 \pi} \frac{1}{k} f^2 \omega^2 Q^2 \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Auch ist:

$$\frac{e}{Q} = \frac{1}{3} f \omega r \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Um für die Constante k einen angemessenen Werth zu finden, können wir von der Thatsache ausgehen, dass für einen gewöhnlichen cylindrischen Zapfen mit kreisrunder Grundfläche ein Durchmesser von 12 Centimeter hinreichend ist, wenn der Druck auf einen Quadratcentimeter der Grundfläche 20 Kilogramm beträgt und die Welle in einer Minute 150 Umdrehungen macht. Setzen wir für einen solchen Zapfen auf analoge Weise

$$\frac{Q}{r^2 \pi} f \omega r = k$$

und nehmen

$$\frac{Q}{r^2 \pi} = 20, \; f = 0{\cdot}08, \; \omega = \frac{2 \pi \times 150}{60} = 15{\cdot}7, \; r = 6 \text{ Centimeter}$$

so wird:

$$k = 20 \times 0{\cdot}08 \times 15{\cdot}7 \times 6 = 154 \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Um zur Einsicht zu kommen, was man von dieser Art Zapfen erwarten darf, dienen folgende numerische Rechnungen.

Setzen wir in die Formeln $k = 154$, $f = 0{\cdot}054$ (sorgfältige continuirliche Oelung) $\pi = 3{\cdot}142$, so findet man:

für	$\alpha = 20^0$	30^0	40^0
aus (26) $\frac{r}{Q\,\omega}$	$= \frac{1}{11844}$	$\frac{1}{9000}$	$\frac{1}{6426}$
aus (28) $\frac{e}{Q^2\,\omega^2}$	$= \frac{1}{154700}$	$\frac{1}{142860}$	$\frac{1}{111111}$

oder wenn man statt der in Centimetern ausgedrückten Winkelgeschwindigkeit die Anzahl n der Umdrehungen des Zapfens in einer Minute einführt, also $\omega = \frac{2\pi}{60}$ n setzt:

$\frac{r}{Q\,n}$	$= \frac{1}{113086}$	$\frac{1}{85732}$	$\frac{1}{61355}$
$\frac{e}{Q^2\,n^2}$	$= \frac{1}{14077700}$	$\frac{1}{13000260}$	$\frac{1}{10111101}$

auch wird:

$\frac{e}{r^2}$	$= 906$	567	372

Nennt man e_1 den Reibungseffekt für einen gewöhnlichen Zapfen mit ebener kreisförmiger Basis, so ist:

$$e_1 = \frac{2}{3} Q f r \omega$$

Aus dieser und der Formel (29) folgt:

$$\frac{e_1}{e} = \frac{2}{\dfrac{1 - \sin^3 \alpha}{\sin \alpha \, (1 - \sin \alpha)}}$$

und man findet für

$$\alpha = 20^0 \qquad 30^0 \qquad 40^0$$

$$\frac{e_1}{e} = \frac{1}{3\cdot23} \qquad \frac{1}{3\cdot50} \qquad \frac{1}{4\cdot5}$$

Hinsichtlich des Reibungsverlustes ist demnach dieser künstlich geformte Zapfen gar nicht empfehlenswerth. Ob man sich in der That mit diesem künstlichen Zapfen gegen das Warmlaufen schützen kann, müsste die Erfahrung entscheiden, denn die ganze Theorie beruht doch auf zwei Annahmen, deren Richtigkeit von vornherein nicht unbedingt behauptet werden kann.

Der „Antifrictions"-Zapfen. Der sogenannte „Antifrictions"-Zapfen ist eine Erfindung von *Schiele*. Er ist nach einer Kurve A B, Fig. 10, Tafel XIV., gebildet, die die Eigenschaft hat, dass die Länge des Tangentenstückes $m\,p$ für jeden Punkt der Kurve constant ist. Nennt man t die Länge $m\,p$ des Tangentenstückes, so ist $t \sin \varphi = y$, es ist aber $\sin \varphi = \frac{d\,y}{d\,s}$, demnach:

$$t \frac{d\,y}{d\,s} = y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Dies ist die Differenzialgleichung der Kurve. Das Integrale gibt

$$t \log y = s + \text{const}$$

Nennt man r_o den kleinsten Halbmesser und rechnet von da an die Bogenlänge s, so ist für $s = o$, $y = r_o$, demnach:

$$t \log r_o = o + \text{const}$$

und dann wird:

$$t \log \frac{y}{r_o} = s \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$\frac{y}{r_o} = e^{\frac{s}{t}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Will man die Gleichung der Kurve zwischen x und y ausdrücken, so hat man wegen $d\,s = d\,y \sqrt{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}$

$$\frac{t}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2}} = y, \quad \text{oder} \quad \frac{d\,x}{d\,y} = \frac{\sqrt{t^2 - y^2}}{y}$$

Das Integrale dieses Ausdruckes ist:

$$y = \sqrt{t^2 - y^2} + \frac{1}{2} t \operatorname{lognat} \frac{\sqrt{t^2 - y^2} - t}{\sqrt{t^2 - y^2} + t} + \text{const}$$

Zu dieser Kurve kommt man, wenn man den Normaldruck N nicht, wie wir gefunden haben, dem Sinus des Winkels φ proportional setzt, sondern im Gegentheil

$$N = \frac{\gamma}{\sin \varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

setzt, wobei γ eine Constante bezeichnet, und wenn man ferner, wie auch wir gethan haben,

$$N f \omega y = k \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5)$$

nimmt, denn in diesem Falle wird:

$$\frac{\gamma}{\sin \varphi} f \omega y = k, \qquad \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{k}{\gamma f \omega}$$

Allein es ist $\frac{\gamma}{\sin \varphi} = t$, demnach folgt unter den Annahmen (1) und (2), dass $t = \frac{k}{\gamma f \omega}$ sein soll, oder dass t eine constante Grösse sein soll. Allein die Annahme $N = \frac{\gamma}{\sin \varphi}$ ist offenbar verfehlt, daher beruht der Antifrictions-Zapfen von Herrn *Schiele* auf einem Irrthum und ist zu verwerfen.

Kurbelzapfen und Excentrik. Die Formel, welche wir für den Effekt der Reibung am Umfang von rundumlaufenden Zapfen gefunden haben, nämlich:

$$e = \frac{n d f P}{1910}$$

gilt auch für Kurbelzapfen und für excentrische Scheiben, wenn man d den in Centimetern ausgedrückten Durchmesser des Kurbelzapfens oder den Durchmesser der excentrischen Scheibe bedeuten lässt. Man sieht hieraus, dass diese excentrischen Scheiben sehr krafterschöpfend werden können, indem ihr Durchmesser immer sehr gross ausfällt. Zur Uebertragung grösserer Effekte darf desshalb die excentrische Scheibe nicht gebraucht werden, und wird auch heut zu Tage in solchen Fällen nicht gebraucht.

Reibung an Ringflächen. Ringförmige Flächen, die sich drehen und gegen eine Fläche gepresst werden, kommen bei verschiedenen Maschinentheilen vor.

Nennen wir P den gesammten Druck der Ringfläche gegen die ruhende Fläche, d_0 den inneren, d_1 den äusseren Durchmesser des Ringes, f den Reibungscoeffizienten, so ist zunächst $\frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2-d_0^2)}$ der Druck auf einen Quadratcentimeter der Ringfläche. Beschreibt man mit x und $x + \delta x$ (wobei δ das Differenzialzeichen bedeutet), zwei concentrische Kreise, so ist: $2 \pi x \delta x \frac{P}{\frac{\pi}{4}(d_1^2-d_0^2)} f$ der Reibungswiderstand auf diesen Ring von der Breite δx. Multiplizirt man diesen Ausdruck mit x und dividirt ihn durch $\frac{d_1}{2}$, so erhält man die Kraft, welche am Umfang des Zapfens wirkend im Stande ist, die an der Fläche $2 \pi x \delta x$ stattfindende Reibung zu überwinden. Diese Kraft ist demnach:

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} x^2 \delta x$$

Die Kraft, welche am Umfang des Zapfens wirken muss, um die Reibung, welche an der ganzen Ringfläche stattfindet, zu überwinden, ist demnach:

$$16 \frac{P f}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)} \int_{\frac{1}{2} d_0}^{\frac{1}{2} d_1} x^2 \delta x = \frac{2}{3} P f \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1 (d_1^2 - d_0^2)}$$

Wird d_0 und d_1 in Centimetern ausgedrückt und nennt man n die Anzahl der Umdrehungen des Ringes in einer Minute, so ist $\frac{d_1 \pi n}{100 \times 60}$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rings in Metern ausgedrückt. Der Effekt e der Ringreibung wird demnach:

$$e = \frac{n P f}{1910} \frac{d_1^3 - d_0^3}{d_1^2 - d_0^2}$$

Frictionsrollen. Es sei A ein Wellenzapfen, der nicht in ein Lager, sondern auf eine mit zwei Zapfen B versehene Rolle C gelegt ist, jeder der Zapfen B liege in gewöhnlichen Lagern D, der Zapfen A befinde sich in einer Gabel, so dass er keine Horizontalbewegung machen kann. Eine solche Anordnung wird Friktionsrolle genannt.

Wird der Zapfen gedreht, so rollt derselbe auf der Rolle C und diese dreht sich dabei um ihre Zapfen. Wenn die Zapfen B und der Rollenumfang glatt bearbeitet sind, kann der Wälzungswider-

stand ganz vernachlässigt werden, und ist dann bei dieser Einrichtung nur die Reibung an den Zapfen der Friktionsrolle zu überwinden.

Nennt man P den Druck des Zapfens A gegen den Rollenumfang, d den Durchmesser des Zapfens A, D den Durchmesser der Rolle C und Δ den Durchmesser eines der Zapfen B, n die Anzahl der Umdrehungen des Zapfens A in einer Minute, so ist $\frac{1}{2}$ P der Druck eines der Zapfen B gegen das Lager, $\frac{1}{2}$ P f der daraus entspringende Reibungswiderstand, welcher mit der Umfangsgeschwindigkeit des Zapfens B überwunden wird. Diese letztere ist aber im Verhältniss $\frac{\Delta}{D}$ kleiner als die Umfangsgeschwindigkeit von C oder von A, ist demnach $\frac{\Delta}{D} \frac{d \pi n}{60 \times 100}$. Der Effekt e der Reibungen an den beiden Zapfen B ist demnach:

$$e = 2 \times \frac{1}{2} P f \times \frac{\Delta}{D} \frac{d \pi n}{60 \times 100}$$

oder

$$e = \frac{n d P f}{1910} \frac{\Delta}{D}$$

Der Reibungseffekt ist demnach bei einer Friktionsrolle im Verhältniss des Durchmessers des Rollenzapfens und der Rolle selbst kleiner, als bei einer gewöhnlichen Zapfeneinrichtung.

Axenreibung eines Wagens. Bei Strassenwagen sind die Axen mit dem Gestelle verbunden und drehen sich die Räder um die Axen. Bei Eisenbahnwagen sind die Axen mit den Rädern verbunden und liegt das Wagengestelle auf den Axen. Diese Verschiedenheit der Wagenconstruktion hat jedoch auf den Betrag der Axenreibung keinen Einfluss. Wir wollen einen Eisenbahnwagen der Berechnung zu Grunde legen.

Es sei d der Durchmesser eines Zapfens, D der Durchmesser eines Rades, i die Anzahl der Räder des Wagens, Q_1, Q_2, Q_3 die Pressungen gegen die Zapfen der Axen, v die Fahrgeschwindigkeit des Wagens. Dies vorausgesetzt, sind $Q_1 f$, $Q_2 f$, $Q_3 f$ die Reibungswiderstände an den Zapfenumfängen; diese werden aber mit einer Geschwindigkeit v $\frac{d}{D}$ überwunden, daher hat man für den Effekt e sämmtlicher Axenreibungen:

$$e = Q_1 f v \frac{d}{D} + Q_2 f v \frac{d}{D} + \ldots$$

oder

$$e = f\, v\, \frac{d}{D} (Q_1 + Q_2 + \ldots)$$

Allein $Q_1 + Q_2 + \ldots$ ist die totale Belastung sämmtlicher Zapfen; bezeichnet man dieselbe mit Q, so erhält man:

$$e = Q f \frac{d}{D} v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Demnach ist die zur Ueberwältigung der Axenreibung erforderliche Zugkraft Z:

$$Z = Q f \frac{d}{D} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für Eisenbahnwagen ist in der Regel $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$ und darf man, weil continuirlich geölt wird, $f = 0{\cdot}054$ setzen, dann wird:

$$Z = \frac{Q}{260}$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) sieht man, dass es vortheilhaft ist, wenn die Räder im Verhältniss zu den Zapfendurchmessern gross sind. Auch erkennt man leicht, dass es hinsichtlich der Axenreibung auf die Anzahl der Räder nicht ankommt. Allein da bei einer grösseren Räderzahl der Druck auf jeden Zapfen kleiner ausfällt, wodurch die Zapfendurchmesser kleiner sein können, so dürfen auch die Räder kleiner gemacht werden. Wagen mit wenig Rädern erfordern also starke Zapfen und grosse Räder, Wagen mit vielen Rädern dagegen können kleine Zapfen und kleine Räder erhalten. Bei Lokomotiven mit äusseren Rahmen und äusseren Axenzapfen ist $\frac{d}{D}$ beträchtlich kleiner, als bei Lokomotiven mit inneren auf den Axen selbst aufsitzenden Rahmen. Die Lokomotive der ersten Art verursachen daher einen geringeren Axenreibungswiderstand als die der zweiten Art.

Würde man bei Eisenbahnwagen Frictionsrollen anwenden, so könnte der Axenreibungswiderstand in der That verschwindend klein gemacht werden, denn die Zugkraft für einen solchen mit Frictionsrollen versehenen Zapfen wäre:

$$Z = Q f \frac{d}{D} \frac{d_1}{D_1}$$

wobei D_1 den Durchmesser der Frictionsrolle und d_1 den Zapfen dieser Rolle bezeichnet.

Für $f = 0{.}054$, $\frac{d}{D} = \frac{1}{14}$, $\frac{d_1}{D_1} = \frac{1}{5}$ würde

$$Z = \frac{Q}{1300}$$

Leider ist die Anwendung der Friktionsrollen bei Eisenbahnwagen, so wie überhaupt bei Maschinen, in welchen mächtigere Kräfte wirken, nicht wohl zulässig. Die Construktion ist zu complizirt und die Axenlagerung zu unsicher.

Die Schraube mit flachem Gewinde. Eine genaue Bestimmung des bei einer Schraube vorkommenden Reibungswiderstandes verursacht sehr weitläufige Rechnungen und führt zu so complizirten Formeln, dass es wohl Niemand in den Sinn kommen würde, darnach numerische Rechnungen zu machen. Auch würde die Genauigkeit doch nur illusorisch sein, indem man in den Anwendungen niemals in der Lage ist, den Werth des Reibungscoeffizienten mit Zuverlässigkeit anzugeben. Wir begnügen uns daher mit einer Annäherungsrechnung, die sich ergiebt, wenn man die Gewindtiefe unendlich klein annimmt, in welchem Falle 1) alle Punkte der Schraubenfläche gleiche Geschwindigkeit haben, 2) die Neigung der Schraubenfläche gegen den Horizont für alle Punkte derselben einerlei Grösse hat.

Wird die Mutter festgehalten und die Spindel gedreht, so erhält dieselbe auch eine fortschreitende Bewegung nach der Richtung ihrer Axe und dabei gleitet die Spindelfläche an der Mutterfläche hinauf, wie ein auf einer schiefen Ebene liegender, durch eine Horizontalkraft getriebener Körper.

Wir werden daher die Formel, welche wir Seite 261 für die schiefe Ebene aufgestellt haben, anwenden können und erhalten daher für die Kraft P, welche am Umfang der Spindel horizontal drehend wirken muss, um die an derselben hängende Last aufzuziehen und die zwischen Mutter und Spindel statt findende Reibung zu überwinden, folgenden Ausdruck:

$$P = Q \frac{\tang \alpha + f}{1 - f \tang \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wobei nun α den Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen eine auf die Axe senkrechte Ebene bedeutet.

Nennt man d den Durchmesser der Spindel, h die Höhe eines Schraubenganges, so darf man setzen:

$$\text{tang}\ \alpha = \frac{h}{d\,\pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

demnach ist auch:

$$P = Q\,\frac{\frac{h}{d\,\pi} + f}{1 - f\,\frac{h}{d\,\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft P entwickeln muss, damit die Last Q auf eine Höhe H gehoben wird, ist $P\,\frac{H}{\text{tang}\,\alpha}$, oder

$$W = Q\,H\,\frac{\text{tang}\ \alpha + f}{\text{tang}\ \alpha - f\,\text{tang}^2\ \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum für

$$\text{tang}\ \alpha = -f + \sqrt{1 + f^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Diese hinsichtlich des Erhebungseffektes vortheilhafteste Schraube fällt in der Regel sehr steil aus, indem für gut ausgeführte Metallschrauben f nie grösser als $\frac{1}{10}$ ist.

Gewöhnlich wird eine Schraube angewendet, um mit einer gewissen Kraft einen sehr grossen Druck auszuüben, und dann muss tang α klein gemacht werden, oder muss eine Schraube von geringer Steilheit genommen werden, dann aber ist das Güteverhältniss einer solchen Schraube, nämlich $\frac{W}{Q\,H} = \frac{\text{tang}\ \alpha + f}{\text{tang}\ \alpha\ (1 - f\ \text{tang}\ \alpha)}$, äusserst ungünstig, denn wenn z. B. $f = 0{\cdot}1$ und tang $\alpha = 0{\cdot}1$ ist, wird dieses Verhältniss $\frac{W}{Q\,H} = \frac{2}{1 - 0{\cdot}01} = \frac{2}{0{\cdot}99} = 2$ (nahe), d. h. die zum Erheben erforderliche Wirkung wird noch einmal so gross, als sie wäre, wenn keine Reibung statt fände, oder mit anderen Worten, es geht in diesem Falle von der drehenden Kraft die Hälfte verloren. Die Schraube ist daher leider ein sehr schlechter Mechanismus zur Transmittirung grosser Kräfte. Wenn man mit einer Schraube 100 Pferdekraft übertragen wollte, würden 50 verloren gehen, und diese verlorene Kraft würde noch überdies auf Abnutzung der Spindel und Mutter wirken. Um die Mutter gegen Abnützung zu schützen, ist es nothwendig, derselben eine sehr grosse Ausdehnung zu geben, um so die Intensität des Druckes zwischen Spindel und Mutter zu mässigen.

Frägt man nach der Kraft P_1, die am Umfang der Schraube wirken muss, um zu verhindern, dass sich die Spindel durch den

Zug der Last Q nicht dreht, so findet man dieselbe, wenn man in (1) P_1 statt P und $-f$ statt f setzt Man hat daher:

$$P_1 = Q \frac{\tang \alpha - f}{1 + f \tang \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Schrauben, die zum Festhalten dienen, müssen so eingerichtet werden, dass sie sich durch die längs der Spindel wirkende Kraft von selbst nicht aufdrehen. Hierzu ist vermöge Gleichung (6) erforderlich, dass

$$\tang \alpha \overline{\leq} f$$

ist. Will man dagegen umgekehrt, dass sich die Spindel, wenn auf sie keine drehende Kraft einwirkt, dreht, so muss

$$\tang \alpha > f$$

genommen werden.

Schraube mit scharfem Gewinde. Die genaue Berechnung der Reibung bei einer Schraube mit scharfem Gewinde ist mit Weitläufigkeiten und Schwierigkeiten verbunden, die in keinem Verhältniss stehen mit dem geringen praktischen Nutzen, der aus einer ganz genauen Berechnung entstehen könnte. Will man die Sache ganz genau nehmen, so ist diese Berechnung heut zu Tage noch ganz unmöglich, denn man müsste mit Rücksicht einerseits auf das sehr complizirte Bildungsgesetz der Schraubenfläche, andererseits auf die Elastizität des Materials, aus welchem Spindel und Mutter besteht, die in jedem Berührungspunkt zwischen Spindel und Mutter statt findende Pressungsintensität bestimmen. Ich habe diese Rechnungen so weit als möglich durchgeführt, halte es aber nicht für angemessen, sie hier zu produziren, sondern beschränke mich auf die praktischen Bedürfnisse, für welche eine Annäherungsrechnung ganz ausreichend ist.

Nennt man für eine dreikantige Schraube, Fig. 12, Tafel XIV., α die Neigung der äusseren Schraubenlinie der Spindel gegen eine auf die Axe der Schraube senkrechte Ebene, β die Hälfte des Kantenwinkels des Gewindes und nimmt P, Q, f in dem früher angegebenen Sinn, so ist $\frac{Q \cos \alpha + P \sin \alpha}{\cos \beta}$ der Normaldruck zwischen Mutter und Spindel, die Kraft $P \cos \alpha$ muss nun den Widerstand $Q \sin \alpha$ und die aus obigem Normaldruck entstehende Reibung überwinden, daher hat man:

$$P \cos \alpha = Q \sin \alpha + \frac{Q \cos \alpha + P \sin \alpha}{\cos \beta} f$$

hieraus folgt:

$$P = Q \frac{\text{tang}\ \alpha \cos \beta + f}{\cos \beta - f \text{ tang}\ \alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Die Wirkung W, welche die Kraft P entwickeln muss, um die Last auf eine Höhe H zu heben, ist $P \frac{H}{\text{tang}\ \alpha} = W$, daher wird:

$$\frac{W}{Q\,H} = \frac{\text{tang}\ \alpha \cos \beta + f}{(\cos \beta - f \text{ tang}\ \alpha) \text{ tang}\ \alpha} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Dieses Verhältniss ist noch ungünstiger als das ähnliche für eine Schraube mit flachem Gewinde, denn es wird, weil $\cos \beta < 1$ ist, noch grösser, als wenn $\cos \beta = 1$ ist, d. h. noch grösser als für eine Schraube mit flachen Gewinden. Diese Schrauben mit scharfen Gewinden sollen daher zur Uebertragung von grossen Kräften durchaus nicht angewendet werden, und werden es auch in der That nicht, dagegen sind sie zur Befestigung sehr geeignet, denn die Bedingung, dass sich eine solche Schraube von selbst nicht aufdreht, ist

$$\text{tang}\ \alpha \ \overset{=}{<} \ \frac{f}{\cos \beta}$$

d. h. wenn eine solche Schraube steiler ist als eine flache Schraube, so wird sie sich doch noch nicht aufdrehen.

Die Schraube ohne Ende. Eine endlose Schraube mit dem zugehörigen Rade kann hinsichtlich der Reibung so angesehen werden, wie wenn der in das Gewinde eingreifende Zahn des Rades ein Stück einer Mutter wäre, das die Schraubengewinde nicht ringsum umgibt. Man kann daher die Reibung annähernd wie bei einer Schraubenspindel mit vollständiger Mutter berechnen, kann daher schreiben:

Für eine Schraube mit flachem Gewinde:

$$P = Q \frac{\text{tang}\ \alpha + f}{1 - f \text{ tang}\ \alpha}$$

Für eine Schraube mit scharfem Gewinde:

$$P = Q \frac{\text{tang}\ \alpha \cos \beta + f}{\cos \beta - f \text{ tang}\ \alpha}$$

und dabei bedeutet:

Q den Widerstand, welcher am Umfang des Schraubenrades wirkt, P die Kraft, welche am Umfang des Wurmrades wirken muss,

um den Widerstand Q und die daraus entstehende Reibung zu überwinden, α den Winkel, den die äussere Schraubenlinie des Wurmes mit einer auf der Axe senkrecht stehenden Ebene bildet, β die Hälfte des Kantenwinkels des Gewindes, falls dasselbe dreieckig ist. Es ist selbstverständlich, dass diese Rechnungsweise nur eine Annäherung ist und strenge genommen nur gilt, 1) wenn die Gewindtiefe unendlich klein ist, 2) wenn der Halbmesser des Schraubenrades sehr gross oder gar unendlich gross ist.

Auch die Schraube ohne Ende ist zur Transmittirung grösserer Kräfte nicht zu empfehlen, indem fast in allen Fällen der Anwendung die Hälfte der Kraft durch Reibung verloren geht und diese verlorne Kraft nothwendig bei continuirlicher Bewegung eine rasche Abnützung der Gewinde und Zähne zur Folge hat. Handelt es sich aber überhaupt nur um sanfte feine Bewegungen, die nur von schwachen Kräften begleitet sind, so ist dagegen die Schraube ohne Ende wie die gewöhnliche Schraube ein vortrefflicher Mechanismus, denn es ist diese Schraube ohne Ende der compendiöseste Mechanismus, um mit einer schwachen Kraft einen grossen Widerstand zu bewältigen, und sie gewährt den in vielen Anwendungen sehr nützlichen Vortheil, dass eine rückgängige Bewegung nicht von selbst, d. h. auch dann nicht eintritt, wenn auf die Schraube keine drehende Kraft einwirkt, was für Winden und Aufzüge eine sehr wünschenswerthe Eigenschaft ist.

Reibung einer Stirnräderverzahnung. Bei allen Verzahnungen, welche wir in der Folge für Stirnräder werden kennen lernen, geht die dem Berührungspunkt zweier Zähne entsprechende Normale durch den Berührungspunkt der Theilkreise. Wir wollen daher auch der nachfolgenden Rechnung eine Verzahnung zu Grunde legen, welcher diese Eigenschaft hinsichtlich der Richtung der Normale zukommt.

Es seien K k die im Punkt a sich berührenden Theilkreise der beiden Räder, Z ein Zahn des Rades K, z ein Zahn des Rades k, b der Punkt, in welchem sich die beiden Zähne in irgend einem Augenblick ihrer wechselseitigen Einwirkung berühren, e b a E die dem Punkt b der beiden Zähne gemeinschaftliche Normale, Q der am Umfang von k wirkende Widerstand, P die am Umfang von K nothwendige Kraft, um den Widerstand Q und die zwischen den Zähnen statt findende Reibung zu überwinden, R und r die Halbmesser der Theilkreise K und k, N die wechselseitige Pressung der Zähne. Diese Pressung wirkt nach der Richtung $b\,n_1$ auf den Zahn z und nach der Richtung b n auf den Zahn Z. Aus diesem Druck entspringt ein Reibungswiderstand N f und dieser wirkt auf den

Zahn z nach der Richtung $b\,t_{\prime}$, auf den Zahn Z nach der Richtung $b\,t$. Das Gleichgewicht zwischen P, Q und der Reibung erfordert nun 1) dass P (am Umfang von K wirkend) mit N nach der Richtung $b\,n$ wirkend und mit $N\,f$ nach der Richtung $b\,t$ wirkend im Gleichgewicht ist, 2) dass Q am Umfang von k wirkend mit N nach $b\,n_{\prime}$ wirkend und mit $N\,f$ nach der Richtung $b\,t_{\prime}$ wirkend im Gleichgewicht ist. Wir erhalten daher, wenn wir $\widehat{a\,C\,E} = \varphi$ und $a\,b = p$ setzen, folgende Momentengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P\,R &= N\,R\cos\varphi + N\,f\,(R\sin\varphi + p) \\ Q\,r &= N\,r\cos\varphi + N\,f\,(r\sin\varphi - p) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

Durch Division dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi + \frac{p}{R}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots (2)$$

Berechnet man hieraus $\frac{P-Q}{Q} = \frac{P}{Q} - 1$, so findet man:

$$\frac{P-Q}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots (3)$$

Allein $P - Q$ ist offenbar der Betrag des Reibungswiderstandes, setzt man denselben F, so hat man:

$$\frac{F}{Q} = \frac{f\,p\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)}{\cos\varphi + f\left(\sin\varphi - \frac{p}{R}\right)} \quad \ldots\ldots (4)$$

Diese Gleichung ist streng richtig und man kann vermittelst derselben den Reibungswiderstand für jede Verzahnungsart berechnen, wenn man nach der Form der Zähne den Werth von p als Funktion von φ ausdrückt.

Wir wollen uns jedoch nicht damit befassen, die Reibungswiderstände für die verschiedenen Verzahnungsarten ganz genau zu berechnen, sondern begnügen uns mit einer Annäherungsrechnung, die auf alle Verzahnungsarten anwendbar ist. Da nämlich in allen Fällen der Anwendung die Zahntheilung klein ist, so darf man φ

als einen sehr kleinen Winkel ansehen, und dann wird man keinen merklichen Fehler begehen, wenn man den Nenner des Ausdruckes (4) gleich Eins setzt, denn $\cos \varphi$ ist beinahe 1 und $f\left(\sin \varphi - \frac{p}{R}\right)$ ist jedenfalls eine äusserst kleine Grösse, denn f ist klein, φ und $\frac{p}{R}$ sind es ebenfalls. Wir erhalten demnach für alle Verzahnungen annähernd:

$$\frac{F}{Q} = f\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) p \quad \dots\dots\dots (5)$$

Der Reibungswiderstand ist also mit p, demnach mit der Stellung, in welcher sich die Zähne während ihrer Aufeinanderwirkung befinden, veränderlich. Suchen wir daher den mittleren Werth von F, so werden wir diesen erhalten, wenn wir für p den mittleren Werth setzen. Bewegen sich die Zähne durch eine Theilung von a an, so ist der kleinste Werth von p gleich Null und der grösste Werth von p sehr nahe gleich der Länge eines Theilungsbogens t, daher der mittlere Werth von p gleich $\frac{1}{2}\,t$, gleich der Hälfte einer Theilung. Der mittlere Werth F_m des Reibungswiderstandes ist demnach:

$$\frac{F_m}{Q} = \frac{1}{2} f\, t \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

Nennt man M und m die Anzahl der Zähne der Räder K und k, so ist $t = \frac{2 R \pi}{M}$ und $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$, daher wird:

$$\frac{F_m}{Q} = f\,\pi \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \quad \dots\dots\dots (7)$$

und somit ist annähernd der Reibungswiderstand für Stirnräder berechnet und zwar für jede Verzahnungsform.

Hieraus geht zunächst hervor, dass der Reibungswiderstand bei allen Verzahnungen sehr nahe gleich gross ist, wenn die Zahntheilungen klein sind. Sodann folgt aus (7), dass der Reibungswiderstand mit der Anzahl der Zähne der Räder abnimmt, dass also eine grosse Zahnzahl oder eine feine Theilung vortheilhaft ist. Endlich folgt aus (7), dass dieser Reibungswiderstand von sehr geringem Belang ist, wenn die Zahnzahlen gross sind, denn ist z. B. $f = \frac{1}{8}$, $M = m = 12$, so wird:

$$\frac{F_m}{Q} = 3\cdot142 \times \frac{1}{8}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{15}$$

Es beträgt also dieser Reibungswiderstand selbst dann, wenn der Reibungscoeffizient $\frac{1}{8}$ beträgt und jedes Rad nur 12 Zähne hat, dennoch nur $\frac{1}{15}$ von dem am Umfang des getriebenen Rades wirkenden Widerstande.

$$\text{für} \quad f = \frac{1}{10}, \quad M = 48, \quad m = 48$$

$$\text{wird} \quad F_m = 3{\cdot}142 \times \frac{1}{10}\left(\frac{1}{48} + \frac{1}{48}\right) Q = \frac{1}{76}\, Q$$

also sehr klein.

Die Verzahnungen müssen daher hinsichtlich des Reibungswiderstandes vortreffliche Anordnungen genannt werden.

Reibung konischer Räder. Wir werden in der Folge zeigen, dass richtige Zahnformen für Kegelräder gefunden werden, wenn man die Zähne von zwei Stirnrädern verzeichnet, deren Halbmesser gleich sind den Seiten der Ergänzungskegel der Kegelräder. Wir werden daher auch sagen dürfen, dass der Reibungswiderstand der Kegelräder so gross ist, als der Reibungswiderstand zweier Stirnräder, deren Halbmesser so gross sind, als die Seiten der Ergänzungskegel und deren Theilung mit jener der Kegelräder übereinstimmt.

Es seien, Fig. 1, Tafel XV., $O\,A$ und $O\,a$ die Axen der Räder, $\widehat{A\,O\,a} = \alpha$ der Winkel, den ihre Richtungen einschliessen, R und r die Halbmesser der Räder, S und s die Seiten der Ergänzungskegel, M und m die Anzahl der Zähne der beiden Kegelräder, M_1 m_1 die Anzahl der Zähne der oben erwähnten idealen Stirnräder.

Dies vorausgesetzt bestehen zunächst wegen der Gleichheit der Zahntheilungen der realen und idealen Räder die Beziehungen:

$$\frac{2\,R\,\pi}{M} = \frac{2\,r\,\pi}{m} = \frac{2\,S\,\pi}{M_1} = \frac{2\,s\,\pi}{m_1} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{m_1} &= \frac{R}{M\,s} \\ \frac{1}{M_1} &= \frac{R}{M\,S} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Da die idealen Räder Stirnräder sind, so ist nach Gleichung (7), Seite 286 der Reibungswiderstand derselben:

$$F = Q\,\pi\,f\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{M_1}\right)$$

oder wenn man für $\frac{1}{m_1}$ und $\frac{1}{M_1}$ die Werthe aus (2) einführt:

$$F = Q \pi f \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{S}\right) \frac{R}{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es handelt sich also nur noch um die Berechnung der Seiten der Ergänzungskegel aus r, R und α.

Nun ist:

$$\frac{1}{S} = \frac{\cos \beta}{R}, \qquad \frac{1}{s} = \frac{\cos \gamma}{r}$$

wobei β und γ die Winkel sind, welche die Berührungslinie O B der Grundkegel mit den Axen bildet. Führt man diese Werthe in (3) ein, so erhält man, mit Berücksichtigung dass $\frac{R}{r} = \frac{M}{m}$ ist:

$$F = Q \pi f \left(\frac{\cos \beta}{M} + \frac{\cos \gamma}{m}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Zur Bestimmung der Winkel β und γ hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \beta + \gamma = \alpha \\ \frac{R}{r} = \frac{M}{m} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{m}{M}} \\ \operatorname{tang} \gamma = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + \frac{M}{m}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

und daraus folgt wegen $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \beta}}$, $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \gamma}}$

$$\left.\begin{array}{l} \cos \beta = \frac{\frac{\cos \alpha}{m} + \frac{1}{M}}{\sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha}} \\ \cos \gamma = \frac{\frac{\cos \alpha}{M} + \frac{1}{m}}{\sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha}} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

Führt man diese Werthe in (4) ein, so findet man nach einigen ganz gewöhnlichen Reduktionen:

$$F = Q \pi f \sqrt{\frac{1}{M^2} + \frac{1}{m^2} + 2 \frac{1}{M} \frac{1}{m} \cos \alpha} \quad . \ . \ . \ . \ (8)$$

Der Werth der Wurzelgrösse ist kleiner als $\frac{1}{M} + \frac{1}{m}$ so lange α nicht gleich Null ist. Hieraus folgt nun, dass die Reibung einer Kegelräder-Verzahnung noch kleiner ist, als die einer Stirnräder-Verzahnung. Der Unterschied ist jedoch von keiner praktischen Bedeutung, weil überhaupt die grössten Beträge dieser Reibung (für $\alpha = o$) sehr klein sind.

Dieser geringe Zahn-Reibungswiderstand ist von sehr grosser praktischer Wichtigkeit, nicht allein wegen des Kraftverlustes, sondern insbesondere wegen der geringen Abnützung. Versieht man also die Räder mit hinreichend vielen, richtig geformten, glatt bearbeiteten Zähnen und fettet dieselben noch überdies reichlich ein, so werden solche Räder einen kaum merklichen Kraftverlust verursachen, werden sich die Zähne lange conserviren und wird man also eine andauernde sanfte Bewegung erhalten.

Widerstände eines Rollentriebes. Bei einem Riementrieb werden die Axen der Rollen durch die Riemenspannungen heftig in die Lager gedrückt, wodurch eine nicht unbeträchtliche Reibung entsteht. Wir haben Seite 188 gezeigt, dass die Spannung im führenden Riemenstück in der Regel zweimal, und im geführten Riemenstück genau so gross ist, als die auf den Rollenumfang reduzirte Kraft Q, welche übertragen wird.

Nennt man nun D D_1 die Durchmesser der Rollen, d d_1 die Durchmesser der Wellen, f den Reibungscoeffizienten, so wird jede der beiden Axen mit einer Kraft $2 Q + Q = 3 Q$ in die Lager gepresst, ist demnach die Kraft, welche an dem Rollenumfang wirken muss, um die aus diesen Pressungen entstehende Reibung zu überwinden

$$3 Q f \left(\frac{d}{D} + \frac{d_1}{D_1}\right)$$

Wird durch die Rolle die ganze Kraft übertragen, die in der treibenden Welle vorhanden ist, so sind die Werthe von $\frac{d}{D}$ und $\frac{d_1}{D_1}$ mindestens $\frac{1}{7}$, wird nur ein Theil dieser Kraft übertragen, so sind diese Quotienten noch grösser. Nehmen wir $f = 0{\cdot}1$, so wird

für diese günstigsten Werthe von $\frac{d}{D}$ und $\frac{d_1}{D_1}$ die obige Reibung $= \frac{1}{16}$, beträgt also unter den günstigsten Umständen viel mehr als eine Zahnreibung. Diese Rollentriebe sind demnach hinsichtlich des Kraftverlustes, den sie durch Reibung verursachen, nicht sehr gut und jedenfalls nachtheiliger als Räderübersetzungen.

Reibung einer Transmission durch ihr Gewicht. Es ist von einigem Interesse, zu untersuchen, ob leichte schnell laufende oder ob schwere langsam laufende Transmissionen durch ihr Gewicht grösseren Reibungswiderstand verursachen.

Nennen wir L die Länge einer Transmissionswelle, d ihren Durchmesser in Centimetern, n die Anzahl der Umdrehungen der Welle in einer Minute, γ das Gewicht von einem Kubikcentimeter des Materials, aus welchem die Welle besteht, f den Reibungscoeffizienten, N den Effekt, welchen die Welle überträgt.

Nun ist $\frac{d^2 \pi}{4} L \gamma$ das Gewicht der Welle, $\frac{d \pi n}{60 \times 100}$ die Umfangsgeschwindigkeit in Metern, demnach

$$L \frac{d^2 \pi}{4} \gamma \frac{d \pi n}{60 \times 100} f = e \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

der Effekt, welcher der Reibung entspricht. Ist nun die Welle der Kraft gemäss construirt, so ist:

$$d = 16 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Eliminirt man aus (1) und (2) d, so folgt:

$$e = \frac{\pi^2 \gamma (16)^3}{4 \times 60 \times 100} L f N$$

oder weil 75 N = E ist:

$$\frac{e}{E} = \frac{\pi^2 \gamma (16)^3}{4 \times 60 \times 100 \times 75} L f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Für Schmiedeeisen ist $\gamma = 0 \cdot 0075$ und dann wird sehr nahe:

$$\frac{e}{E} = \frac{L f}{6000} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass das Verhältniss zwischen dem Effekt e, der durch Reibung verloren geht und dem Effekt E, welcher auf

die Welle einwirkt, für alle richtig proportionirten Transmissionen einerlei Werth hat, dass also hinsichtlich der Reibung dünne und schnell laufende Transmissionen eben so viel Verlust verursachen, wie dicke und langsam laufende.

Bestimmung eines Annäherungsausdruckes von der Form $\alpha x + \beta y$ für die irrationale Formel $\sqrt{x^2 + y^2}$. Die Berechnung der Reibungswiderstände zusammengesetzter Maschinengliederungen werden meistens sehr complizirt, weil die zwischen den Bestandtheilen herrschenden Pressungen durch irrationale Formeln von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ ausgedrückt erscheiuen. Es ist daher sehr wünschenswerth, statt eines solchen irrationalen Ausdruckes einen rationalen von der Form $\alpha x + \beta y$ substituiren zu dürfen, und es bietet sich demnach die Frage dar, wie die Constanten α und β genommen werden sollen, damit der Rechnungsfehler, den man begeht, wenn man nach der rationalen, statt nach der irrationalen Formel rechnet, im Allgemeinen möglichst klein ausfällt. *Poncelet* hat diese Aufgabe zuerst gestellt und für gewisse spezielle Fälle durch geometrische Betrachtungen gelöst. Wir werden diese Aufgabe allgemein und auf analytische Weise so lösen, dass wir die absolut besten Werthe von α und β bestimmen.

Wir nehmen an, man wisse nicht wie gross x und y sind, wohl aber innerhalb welcher Grenzen das Verhältniss $\frac{x}{y}$ liege. Weiss man z. B., dass in allen speziellen Fällen eines vorliegenden Problems $y > x$ ist, so weiss man, dass alle möglichen Werthe von $\frac{x}{y}$ zwischen 0 und 1 liegen, dass also 0 und 1 die Grenzen sind, innerhalb welchen der Quotient $\frac{x}{y}$ liegt.

Shreiben wir $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$, so wird $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ und $\alpha x + \beta y = r(\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi)$ und dann ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} - (\alpha x + \beta y) = r \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right] = f$$

der Fehler, den man begeht, wenn man statt der irrationalen Formel die rationale gebraucht.

Nun ist $\frac{x}{y} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tang \varphi$, wir können daher die gegebenen Grenzen von $\frac{x}{y}$ ausdrücken durch die Tangenten $\tang \varphi_1$ und $\tang \varphi_0$, gewisser Winkel φ_1 und φ_0.

Die absolut besten Werthe von α und β sind nun diejenigen, für welche der mittlere Werth des Fehlerquadrates ein Minimum wird. Nun ist

$$f^2 = r^2 \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right]^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ferner der mittlere Werth T von dem Quadrat dieses Fehlers innerhalb der Grenzen φ_1 und φ_0:

$$\frac{1}{\varphi_1 - \varphi_0} \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} r^2 \left[1 - (\alpha \sin \varphi + \beta \cos \varphi) \right]^2 d\varphi = T$$

Die Entwickelung dieses Ausdruckes gibt:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \times$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left[1 + \alpha^2 \sin^2 \varphi + \beta^2 \cos^2 \varphi + 2 \alpha \beta \sin \varphi \cos \varphi - 2 \alpha \sin \varphi - 2 \beta \cos \varphi \right] d\varphi \quad (2)$$

Wegen

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2 \varphi}{2}, \qquad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2 \varphi}{2}$$

ist

$$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \right)$$

$$\int \sin^2 \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2 \varphi \right)$$

und dann ist noch:

$$\int \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} (1 - \cos 2 \varphi)$$

Vermittelst dieser Formeln wird nun:

$$T = \frac{r^2}{\varphi_1 - \varphi_0} \left\{ \begin{aligned} & \varphi_1 - \varphi_0 + \alpha^2 \left[\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4} (\sin 2 \varphi_1 - \sin 2 \varphi_0) \right] \\ & + \beta^2 \left[\frac{1}{2} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4} (2 \sin \varphi_1 - \sin 2 \varphi_0) \right] \\ & + \frac{1}{2} \alpha \beta \left[\cos 2 \varphi_0 - \cos 2 \varphi_1 \right] \\ & - 2 \alpha \left[\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1 \right] \\ & - 2 \beta \left[\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0 \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Die vortheilhaftesten Werthe von α und β sind nun diejenigen, für welche $\frac{dT}{d\alpha} = 0$ und $\frac{dT}{d\beta} = 0$ wird.

Durch Differenziation des Ausdruckes für T nach α und β findet man:

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ + \frac{1}{2}\beta\left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ - 2\left[\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1\right] \end{array} \right\} \quad . \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\beta} = 0 = \left\{ \begin{array}{l} 2\beta\left[\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_0)\right] \\ + \frac{1}{2}\alpha\left[\cos 2\varphi_0 - \cos 2\varphi_1\right] \\ - 2\left[\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0\right] \end{array} \right\} \quad . \quad (5)$$

Berücksichtiget man die bekannten Formeln für die Summe und Differenzen der Sinuse und Cosinuse, so erhalten die Ausdrücke (4) und (5) folgende Formen:

$$\alpha\left[(\varphi_1 - \varphi_0) - \cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0)\right]$$
$$+ \beta\sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) = 4\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$$

$$\beta\left[(\varphi_1 - \varphi_0) + \cos(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0)\right]$$
$$+ \alpha\sin(\varphi_1 + \varphi_0)\sin(\varphi_1 - \varphi_0) = 4\cos\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\sin\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}$$

und hieraus findet man durch gewöhnliche Auflösung und Reduktion:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 2\,\dfrac{\cos\varphi_0 - \cos\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \\[2ex] \beta = 2\,\dfrac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

und somit sind die besten Werthe von α und β bestimmt und wir erhalten demnach für $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Annäherungsformel:

$$\sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$2 \frac{\cos \varphi_0 - \cos \varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} x + 2 \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0 + \sin(\varphi_1 - \varphi_0)} y \quad (7)$$

Weiss man, dass $\frac{x}{y} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tang } \varphi$ zwischen 0 und 1 liegt, wass der Fall ist, wenn bekannt wäre, dass $y > x$ ist, so sind die Grenzen von φ, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ und dann findet man aus (7):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin \frac{\pi}{4}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{4} - 0}{\frac{\pi}{4} - 0 + \sin \frac{\pi}{4}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{\cdot}393\, x + 0{\cdot}947\, y$$

Ist man über das Verhältniss $\frac{x}{y}$ gar nicht unterrichtet, kann es also jeden beliebigen positiven Werth haben, so sind die Grenzen von φ, $\varphi_0 = 0$ und $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ und dann wird der Annäherungswerth (7):

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \frac{\cos 0^0 - \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - 0 + \text{sio} \frac{\pi}{2}} x + 2 \frac{\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0^0}{\frac{\pi}{2} - 0 + \sin \frac{\pi}{2}} y$$

oder:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{\cdot}777\, (x + y)$$

B. Steifheit der Seile.

Steifheit der Seile. Um eine Rolle A, Fig. 2, Tafel XV., die mit Zapfen versehen ist, ist ein Seil geschlungen, an welchem eine Last Q hängt. Es soll die Kraft P bestimmt werden, die am freien Ende ziehen muss, um die Last zu heben und die Steifheit des Seiles wie auch die Axenreibung zu überwinden. Wegen der Steifheit des Seiles bilden die mit der Rolle nicht in Berührung stehenden Seilstücke keine geraden Linien, sondern krumme Linien, zu welchen die Richtungen von P und Q Assypmtoten sind.

Fällt man von dem Mittelpunkt der Rolle aus Perpentikel auf die nach aufwärts verlängerten Richtungen von Q und P, so ist das erstere (q) grösser, dass letztere (p) kleiner als der Halbmesser der Rolle + der halben Seildicke, denn da wo das Seil sich aufwickelt, muss es krumm gebogen, und da wo es sich abwickelt, muss es gerade gebogen werden. Für den Gleichgewichtszustand

ergibt sich nun Folgendes: Nennen wir δ den Durchmesser des Seiles, Δ den Durchmesser des Zapfens der Rolle, D ihren Durchmesser, so ist $(P + Q) f$ die am Umfang des Zapfens wirkende Reibung und $(P + Q) f \frac{\Delta}{2}$ das statische Moment derselben; man hat daher:

$$P p = Q q + (P + Q) f \frac{\Delta}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Hieraus findet man:

$$P - Q = Q \left(\frac{\frac{q}{p} - 1 + f \frac{\Delta}{p}}{1 - f \frac{\Delta}{2 p}} \right) \quad \ldots \ldots (2)$$

Dieser genaue Ausdruck würde die zur Bewältigung der Steifheit und der Zapfenreibung erforderliche Kraft $P - Q$ bestimmen, wenn p und q bekannt wäre, allein diese Grössen lassen sich für ein so complizirtes Gebilde wie ein Seil ist und bei seinem unvollkommenen Elastizitätszustand nicht wohl durch Rechnung verlässlich bestimmen; man muss daher zu Annäherungen und Experimenten seine Zuflucht nehmen. Derlei Versuche zur Bestimmung von $\frac{p}{q}$ sind von *Eitelwein* und *Coulomb* angestellt worden. Die von *Coulomb* sind wohl die genaueren und vermittelst derselben findet man, dass man annähernd nehmen darf:

$$\frac{q}{p} - 1 = 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D}$$

vorausgesetzt, dass δ wie D in Centimetern ausgedrückt wird. Führt man diesen Werth in (2) ein und erlaubt sich $f \frac{\Delta}{2 p}$ gegen 1 ganz zu vernachlässigen, ferner in den Quotienten $f \frac{\Delta}{p}$ statt p, $\frac{D}{2}$ zu setzen, so wird:

$$P - Q = Q \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f \frac{\Delta}{D} \right) \quad \ldots \ldots (3)$$

Diese Formel kann freilich nicht sehr genau sein und jedenfalls nur für Seile passen, die sich in jeder Hinsicht in einem gewöhnlichen mittleren Zustand befinden, denn diese Steifheit hängt streng genommen von sehr vielen Verhältnissen ab. Sie richtet sich nach der Beschaffenheit, Festigkeit, Elastizität, Länge der Elementarfasern des Hanfes, nach der Anfertigungsweise des Seiles, namentlich nach der stärkeren oder schwächeren Zwirnung der Schnüre und

Leinen, ferner nach dem Alter des Seiles, nach den Substanzen, von welchen es mehr oder weniger durchdrungen ist, namentlich von Wasser, Seife, Oel, Theer u. s. w., es ist also selbstverständlich, dass von einer genauern Berechnung der Steifheit keine Rede sein kann, und dass aber auch eine genauere Berechnung keinen Werth haben kann, weil man ja doch bei Verwendung eines Seiles keine weitläufigen Prüfungen und Untersuchungen über alle seine Qualitäten anstellen kann noch anstellen will.

Für den Steifheitswiderstand der Drahtseile habe ich aus einigen Versuchen gefunden, dass derselbe durch

$$0{\cdot}58\ Q\ \frac{\delta^2}{D} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

ausgedrückt werden kann. Da bei gleicher Festigkeit der Durchmesser eines Drahtseiles halb so gross ist, als der eines Hanfseiles, so stellt sich heraus, dass der Steifheitswiderstand des Drahtseiles kleiner ist, als der eines Hanfseiles, vorausgesetzt, dass beide Seile gleich fest sind.

Theoretische Bestimmung des Steifheitswiderstandes der Seile. Denkt man sich das Material, aus welchem das Seil besteht, gleichförmig im Innern vertheilt (was bei einem Hanfseil nahe, bei einem Drahtseil weniger genau richtig ist), so kann man ein Seil als einen elastischen Stab ansehen und der Steifheitswiderstand wird dann durch die Kraft bestimmt, welche erforderlich ist, um das anfänglich gerade Seil nach dem Umfang der Rolle krummlinig zu biegen.

Im ersten Abschnitt haben wir Seite 53 für die Wirkungsgrösse W, welche erforderlich ist, um einen anfänglich geraden Stab kreisbogenförmig zu biegen, folgenden Ausdruck gefunden:

$$W = \frac{\varepsilon\ \mu\ l}{2\ R^2} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

wobei bedeutet: ε den Modulus der Elastizität des Materials, l die Länge des Stabstückes, das krummlinig gebogen worden ist, μ das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes in Bezug auf eine Drehungsaxe, die durch den Schwerpunkt des Stabquerschnittes geht und auf der Biegungsebene senkrecht steht, R den Halbmesser des Kreises, nach welchem der Stab gebogen wird.

Bezeichnet man den Steifheitswiderstand mit S, so wirkt derselbe durch einen Weg l, wenn sich ein Seilstück von der Länge l aufwickelt, also krumm gebogen wird, die Arbeit ist demnach $S\ l$ und

sie ist gleich zu setzen obigem Werth von W, d. h. man hat $W = S\,l$. Setzt man für W seinen Werth und lässt l weg, so findet man:

$$S = \frac{\varepsilon\,\mu}{2\,R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Für ein rundes Seil vom Durchmesser δ ist $\mu = \frac{\pi}{64}\,\delta^4$.

Nennt man D den Durchmesser der Rolle, so ist $D = 2\,R$, und dann wird:

$$S = \frac{\pi}{32}\,\varepsilon\,\frac{\delta^4}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Für ein flaches Seil von einer Dicke δ und Breite β ist $\mu = \frac{1}{12}\,\beta\,\delta^3$ und dann wird:

$$S = \frac{1}{6}\,\varepsilon\,\beta\,\frac{\delta^3}{D^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Nach diesen theoretischen Ergebnissen (welche von den empirischen Regeln, die *Prony* und *Eitelwein* aufgestellt haben, total abweichen) ist der Steifheitswiderstand von der Seilspannung ganz unabhängig, dem Quadrat des Rollendurchmessers verkehrt, und bei einem runden Seil der vierten Potenz des Seildurchmessers direkt proportional. Dieser Widerspruch zwischen den theoretischen und empirischen Regeln deutet darauf hin, dass die Voraussetzung, von welcher wir in unserer Theorie ausgegangen sind, dass nämlich das Seil wie ein homogener elastischer Stab angesehen werden dürfe, nicht ganz naturgemäss ist. Es mag aber auch sein, dass die empirischen Regeln unrichtig sind. Wahrscheinlich ist es nicht wahr, dass der Steifheitswiderstand der Seilspannung proportional ist.

Genauere Versuche werden in der Folge entscheiden, ob die Empirie oder ob die Theorie der Wahrheit näher liegt.

Bestimmung der Seilkurve. Wir wollen uns noch die Aufgabe vorlegen, die Gestalt eines sich auf einer Rolle aufwickelnden Seiles zu bestimmen.

Es sei, Fig. 3, Tafel XV., $A\,B\,m\,m_1$ die Axenkurve des Seiles, B_1 der Ort, wo das Anlegen des Seiles an die Rolle beginnt. Nennen wir $\widehat{A\,O\,B} = \alpha$, $\overline{AO} = \overline{OB} = R$, $\overline{Op} = x$, $\overline{mp} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m der Axenkurve, $\overline{AC} = a$ die Länge des Perpentikels, das vom Mittelpunkt O auf die Richtung der Spannungskraft Q gefällt werden kann, ϱ den Krümmungshalbmesser, welcher dem Punkt m der Axenkurve entspricht, μ das Trägheitsmoment eines

Seilquerschnittes in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht und auf der Ebene der Figur senkrecht steht. Setzt man zur Abkürzung

$$m = \frac{Q}{\varepsilon \mu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

so ist vermöge Gleichung 4, Seite 50, die Differenzialgleichung der Axenkurve

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = m (y - a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist:

$$y = a + \mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x} + \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Hieraus folgt durch Differenziation:

$$\frac{d y}{d x} = \sqrt{m} \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x}\right) \ldots\ldots \quad (4)$$

In diesen Gleichungen (3) und (4) sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die zwei Constanten der Integration.

Da die Kurve durch den Punkt B gehen muss, ist

$$\text{für } x = - R \cos \alpha,\ y = R \sin \alpha,\ \frac{d y}{d x} = \operatorname{cotg} \alpha,\ - \frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{R}$$

Demnach erhalten wir vermöge (2), (3), (4):

$$\left.\begin{aligned} m (a - R \sin \alpha) &= \frac{1}{R} \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \sqrt{m} \left(\mathfrak{B}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} - \mathfrak{C}\, e^{+\sqrt{m}\, R \cos \alpha}\right) \\ R \sin \alpha &= a + \mathfrak{B}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} + \mathfrak{C}\, e^{+\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Nennt man x_1 die Abscisse des Punktes m_1, in welchem die Last angehängt ist, β den in der Regel sehr kleinen Winkel, den die zum Punkt m_1 gezogene Berührungslinie mit der Abscissenaxe bildet, so ist:

$$\text{für } x = x_1,\ y = a,\ \frac{d y}{d x} = \operatorname{tang} \beta$$

Demnach hat man noch:

$$\left.\begin{aligned} a &= a + \mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} + \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ \text{tang}\, \beta_1 &= \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\, x_1} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1}\right) \sqrt{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen (5) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left[\frac{\text{cotg}\, \alpha}{\sqrt{m}} + (R \sin \alpha - a)\right] \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left[\frac{\text{cotg}\, \alpha}{\sqrt{m}} - (R \sin \alpha - a)\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (7)$$

oder wenn man für $R \sin \alpha - a$ den aus der ersten der Gleichungen (5) folgenden Werth $-\frac{1}{m R}$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, e^{\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\text{cotg}\, \alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{m R}\right) \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \left(\frac{\text{cotg}\, \alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{m R}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = -\frac{\dfrac{\text{cotg}\, \alpha}{\sqrt{m}} - \dfrac{1}{m R}}{\dfrac{\text{cotg}\, \alpha}{\sqrt{m}} + \dfrac{1}{m R}}\, e^{2 \sqrt{m}\, R \cos \alpha} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (6) folgt dagegen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2}\, \frac{\text{tang}\, \beta}{\sqrt{m}}\, e^{-\sqrt{m}\, x_1} \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, \frac{\text{tang}\, \beta}{\sqrt{m}}\, e^{+\sqrt{m}\, x_1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = -e^{-2 \sqrt{m}\, x_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Setzt man die Werthe von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$, welche die Ausdrücke (9) und (11) darbieten, einander gleich, so folgt:

$$e^{-2\sqrt{m}\,x_1} = e^{2\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \frac{\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{mR}}{\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{mR}} \quad . \quad . \quad (12)$$

Diese Gleichung bestimmt den Winkel α oder den Anlegepunkt B_1.

Nachdem α bestimmt ist, ergeben sich die übrigen unbekannten Constanten des Problems auf folgende Weise:

Die Gleichungen (6) geben:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{1}{2} e^{\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \left(\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{mR}\right) \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2} e^{-\sqrt{m}\,R\cos\alpha} \left(\frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} + \frac{1}{mR}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13)$$

Die erste der Gleichungen (5) gibt:

$$a = R\sin\alpha + \frac{1}{mR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die zweite der Gleichungen (6) gibt endlich:

$$\operatorname{tang}\beta = \left(\mathfrak{B}\, e^{\sqrt{m}\,x_1} - \mathfrak{C}\, e^{-\sqrt{m}\,x_1}\right)\sqrt{m} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Diese Resultate werden bedeutend einfacher, wenn wir annehmen, dass das Seil, an welchem die Last hängt, sehr lang ist. In diesem Falle ist x_1 sehr gross, und wenn auch m einen beträchtlichen Werth hat (was voraussetzt, dass das Seil biegsam und ziemlich stark gespannt ist), so wird $e^{-\sqrt{m}\,x_1}$ verschwindend klein oder annähernd gleich Null.

Setzt man aber in den Ausdrücken (12) bis (15) $e^{-\sqrt{m}\,x_1} = 0$, so erhält man:

wegen (12) $\quad \frac{\cot\alpha}{\sqrt{m}} - \frac{1}{mR} = 0$

oder

$$\cotg \alpha = \frac{1}{R\sqrt{m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \cotg^2 \alpha}} = \frac{R\sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Ferner wegen (13):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B} &= o \\ \mathfrak{C} &= -\frac{1}{2}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \times \frac{2}{m R} = -\frac{1}{m R}\, e^{-\sqrt{m}\, R \cos \alpha} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Die Gleichung (14) gibt, wenn man für $\sin \alpha$ obigen Werth (17) einführt:

$$a = \frac{R^2 \sqrt{m}}{\sqrt{R^2 m + 1}} + \frac{1}{m R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Endlich wird wegen $\mathfrak{B} = o$ und $e^{-\sqrt{m}\, x_1} = o$:

$$\tang \beta = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Da für ein ziemlich biegsames und stark gespanntes Seil $R^2 m$ gegen die Einheit eine kleine Grösse ist, so kann man setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 m + 1}} = \frac{1}{R\sqrt{m}\sqrt{1 + \frac{1}{R^2 m}}} = \frac{1}{R\sqrt{m}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R^2 m}\right)$$

Dann wird:

$$a = R\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R^2 m}\right] + \frac{1}{m R} = R + \frac{1}{2}\,\frac{1}{m R} \quad \ldots \quad (21)$$

Nennen wir S den Steifigkeitswiderstand, so ist:

$$Q\, a = (Q + S)\, R$$

demnach:

$$S = Q\,\frac{a - R}{R}$$

oder wegen (21):

$$S = \frac{Q}{2\, m\, R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Setzt man für m seinen Werth aus (1), so folgt:

$$S = \frac{\varepsilon\, \mu}{2\, R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

welcher Ausdruck mit dem Seite 297 auf anderem Wege gefundenen übereinstimmt.

Vermöge (1) und (2) wird:

$$a = R + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \mu}{R Q} \quad \text{. (24)}$$

Endlich wird wegen (17) annähernd:

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \mu}{Q R^2} \quad \text{. (25)}$$

Diese zwei letzteren Gleichungen bestimmen das Hinaushängen a der Last und den Anlegewinkel α.

Kettenaufwicklung. Die Aufwicklung so wie auch die Abwicklung einer im gespannten Zustande befindlichen Kette auf eine Welle oder von einer Welle verursacht einen Widerstand, ähnlich wie die Biegung eines Seiles.

Nennt man, Fig. 4, Tafel XV., δ den Durchmesser des Ketteneisens, D den Durchmesser der Welle, auf welche die Kette aufgewickelt wird, e die innere Länge eines Kettengliedes, α den Winkel, den die Richtungen zweier unmittelbar auf einander folgenden Kettenglieder des aufgewickelten Theils der Kette mit einander bilden, Q die Last, welche an dem Kettenstück hängt, das aufgewickelt wird, f_1 den Reibungscoeffizienten für die Reibung zwischen je zwei Kettengliedern, d den Durchmesser des Zapfens der Rolle oder Welle, f den Coeffizienten für die Zapfenreibung, P die Kraft, welche an dem sich abwickelnden Kettenstück wirken muss, um die Last und die Widerstände zu überwinden.

Nun ist $e = \left(\frac{D}{2} + \frac{\delta}{2}\right) \alpha$, oder $\alpha = \frac{2 e}{D + \delta}$. Ist ferner $\alpha \frac{\delta}{2} = \frac{2 e}{D + \delta} \times \frac{\delta}{2} = \frac{e \delta}{D + \delta}$ der Weg, durch welchen die Reibung $Q f_1$ überwunden werden muss, wenn ein Kettenglied gegen das benachbarte um den Winkel α verstellt werden soll, ist demnach $Q f_1 \frac{e \delta}{D + \delta}$ die Wirkungsgrösse, welche der Ueberwindung dieser Reibung entspricht. Nennt man für einen Augenblick X die Kraft, welche in der Entfernung $\frac{D}{2} + \frac{\delta}{2}$ von der Axe continuirlich durch den Weg e wirken muss, um jene Wirkung hervorzubringen, so hat man:

$$X e = Q f_1 \frac{e \delta}{D + \delta}$$

demnach $x = Q f_1 \frac{\delta}{D + \delta}$. Dies ist also die Kraft, welche zur Aufwicklung der Kette nothwendig ist.

Wenn das eine Ende einer Kette aufgewickelt, das andere Ende aber gleichzeitig abgewickelt wird, ist der Widerstand doppelt so gross, als in dem Fall, wenn nur Aufwicklung stattfindet.

Da jederzeit δ gegen D vernachlässigt werden kann, so erhalten wir zur Berechnung des Kettenwiderstandes folgende Ausdrücke:

a. Wenn die Kette nur aufgewickelt wird $Q f_1 \frac{\delta}{D}$

b. Wenn das eine Ende der Kette aufgewickelt, das andere Ende aber gleichzeitig abgewickelt wird $2 Q f_1 \frac{\delta}{D}$

Diese Widerstände sind klein, und von der Länge der Kettenglieder nicht abhängig.

Vergleichen wir diesen Widerstand mit dem Steifheitswiderstand eines Hanfseiles von gleicher Tragkraft, so ist für letzteres der Widerstand gleich

$$0{\cdot}26 \frac{\delta_1^{\,2}}{D_1} Q$$

Allein es ist (Resultate S. 38) $\delta_1 = 0{\cdot}113 \sqrt{Q}$, und (Resultate S. 39) $\delta = 0{\cdot}028 \sqrt{Q}$, demnach verhält sich das Seil zur Kette wie $0{\cdot}26 \frac{Q}{D_1} (0{\cdot}113)^2 Q : 2 Q f_1 \frac{0{\cdot}028 \sqrt{Q}}{D} = 0{\cdot}59 \frac{D}{D_1} \sqrt{Q} : 1$. Sind die Rollen gleich gross, d. h. ist $D = D_1$, so fällt der Seilwiderstand grösser aus, als der Kettenwiderstand wenn $\sqrt{Q} > \frac{1}{0{\cdot}59}$, d. h. wenn $Q > 3$ Kilogramm. In allen Fällen der Anwendung ist aber Q bedeutend grösser als 3, fällt demnach der Seilwiderstand bedeutend grösser aus, als der Kettenwiderstand.

Berücksichtigt man bei einer Kette, die sich um eine Rolle auf- und abwickelt nebst dem Kettenwiderstand auch die Axenreibung der Rolle, so ist die Kraft P, welche am Kettenende wirken muss, das sich abwickelt:

$$P = Q \left(1 + 2 f_1 \frac{\delta}{D} + 2 f \frac{d}{D}\right)$$

Verlangt man, dass $\frac{P}{Q}$ einen gewissen Werth $\mathfrak{p}$ erhalten soll, so ist:

$$\mathfrak{p} = 1 + 2 f_1 \frac{\delta}{D} + 2 f \frac{d}{D}$$

und hieraus folgt:

$$D = \frac{2 f_1 \delta + 2 f d}{\mathfrak{p} - 1}$$

Allein es ist (Resultate Seite 39) $\delta = 0.028 \sqrt{Q}$, (Resultate Seite 46) $d = 0.12 \sqrt{Q}$ und wenn $f = f_1 = 0.1$ gesetzt wird, so folgt:

$$D = 0.0296 \frac{\sqrt{Q}}{\mathfrak{p} - 1}$$

Diese Gleichung gibt:

für	$\mathfrak{p}$ =	1·04	1·06	1·08	1·10
	$\frac{D}{\sqrt{Q}}$ =	0·74	0·43	0·37	0·30

Der Wälzungswiderstand. Unter Wälzungswiderstand versteht man denjenigen Widerstand, welcher sich zu erkennen gibt, wenn man auf einer ebenen aber mehr oder weniger weichen und nicht elastischen Bahn einen cylindrischer Körper fortrollen will.

Auf einer vollkommen elastischen Bahn, die immer wiederum sich selbst aufrichtet, nachdem sie zusammengedrückt worden ist, kann ein derartiger Widerstand gar nicht vorkommen.

Es sei, Fig. 5, Tafel XV., C der Mittelpunkt des fortrollenden Körpers, E A B F die Bahn. Bis A hin ist sie bereits durch den rollenden Körper zusammengedrückt, B F ist die noch im natürlichen Zustand befindliche Bahn, K die Kraft, welche nach horizontaler Richtung gegen die Axe der Rolle drücken muss, um den Widerstand zu bewältigen, R der Halbmesser $CA = Cm = CB$ des rollenden Körpers, $\widehat{ACB} = \alpha$ der Winkel, welcher dem Einsenken ($\xi = AD$) des Körpers in das Bahnmaterial entspricht. Da jedenfalls in allen Fällen der Anwendung der Bogen AB oder der Winkel α eine sehr kleine Grösse ist, so wird man sich der Wahrheit so ziemlich nähern, wenn man annimmt, dass das Bahnmaterial an irgend einer Stelle m dem Eindringen des Cylinders einen Widerstand entgegensetzt, welcher der Tiefe des Punktes m unter B F proportional ist.

Nennt man $\widehat{ACm} = \varphi$, so ist:

$$\overline{mn} = \xi - R (1 - \cos \varphi)$$

Behandelt man α und φ wie unendlich kleine Grössen, so darf man

$$1 - \cos \varphi = \frac{1}{2} \varphi^2$$

setzen und dann wird:

$$\overline{mn} = \xi - \frac{1}{2} R \varphi^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nennt man nun β die Breite der Walze, P die Kraft, mit der sie gegen die Bahn gepresst wird, λ einen Coeffizienten, durch welchen die Zusammenpressbarkeit des Bahnmaterials gemessen wird, so ist mit hinreichender Genauigkeit:

$$\int_0^\alpha \lambda \beta \left(\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2\right) R d \varphi$$

die Summe aller Pressungen des Bahnmaterials gegen die Walze, und

$$\int_0^\alpha \lambda \beta \left(\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2\right) R d \varphi \, R \sin \varphi$$

die Summe der Momente aller Pressungen in Bezug auf eine durch A gehende Drehungsaxe; wir erhalten daher:

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\alpha \lambda \beta \left(\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2\right) R d \varphi = P \\ &\int_0^\alpha \lambda \beta \left(\xi - \frac{1}{2} R \varphi^2\right) R d \varphi \, R \sin \varphi = K R \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2)$$

wobei jedoch φ statt $\sin \varphi$ gesetzt werden darf.

Die Integrale dieser Gleichungen sind unter dieser Voraussetzung:

$$\left.\begin{aligned} P &= \lambda \beta R \left(\xi \alpha - \frac{1}{6} R \alpha^3\right) \\ K &= \lambda \beta R \left(\xi \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{8} R \alpha^4\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Allein es ist $R (1 - \cos \alpha) = \xi$ oder annähernd $\xi = \frac{1}{2} R \alpha^2$. Führt man diesen Werth in (3) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \lambda \beta R^2 \alpha^3 \\ K &= \frac{1}{8} \lambda \beta R^2 \alpha^4 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Und hieraus folgt durch Elimination von α:

$$K = \frac{1}{8}(3)^{\frac{4}{3}} \frac{P^{\frac{4}{3}}}{\lambda^{\frac{1}{3}} \beta^{\frac{1}{3}} R^{\frac{2}{3}}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Dieser Rollungswiderstand fällt also klein aus, wenn λ, β und R gross sind, d. h. wenn die Bahn hart ist, und wenn sowohl die Radbreite als auch der Radhalbmesser gross ist.

VIERTER ABSCHNITT.

Die Verzahnung.

Einleitung zur Theorie der Verzahnung.

Verzeichnung von krummen Linien.

In der geometrischen Theorie der Bewegungsmechanismen spielen gewisse krumme Linien eine wichtige Rolle, es ist daher angemessen, in Kürze die Verzeichnung dieser Linien vorauszuschicken. Dabei handelt es sich vorzugsweise um solche Methoden, die mit einem Minimum von Hilfslinien zum Ziele führen, damit die Zeichnungsfläche nicht zu sehr leidet.

Verzeichnung einer Parabel.

Es sei der Scheitel A der Parabel, die Richtung Ax ihrer Hauptaxe und ein Punkt M der Parabel gegeben. Fig. 6, Tafel XV.

Man fälle den Perpendikel Mp, zeichne das Rechteck $ApMb$, theile sowohl Ab als auch bM in gleich viele gleich grosse Theile, ziehe die Radien $A1$, $A2$, $A3$ und durch 1_1, 2_1, 3_1 Parallellinien zu Ax, so sind die Durchschnittspunkte III, II, I dieser Radien mit den Parallelen einzelne Punkte der Parabel.

Die Richtigkeit dieser Construktion ergibt sich auf folgende Weise: Setzen wir $Ap_1 = x$, $\overline{Ip_1} = y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes I, $Ap = \alpha$, $Mp = \beta$ die Coordinaten des Punktes M, so hat man:

$$x : y = \overline{b1} : \beta$$

Allein nach dem Theilungsgesetz der Linien A b und b M ist:

$$\overline{b\,1} : y = \alpha : \beta$$

Aus diesen beiden Proportionen folgt durch Elimination von $\overline{b\,1}$:

$$y^2 = \frac{\beta^2}{\alpha}\,x$$

Das construktive Verfahren führt also in der That zu einer Parabel.

Verzeichnung einer Ellypse, deren Axen gegeben sind.

Der Methoden, Ellypsen zu zeichnen, gibt es eine grössere Anzahl; für den praktischen Zweck ist es genug, eine derselben zu kennen. Ich wähle folgende:

Es sei, Fig. 7, Tafel XV., O der Mittelpunkt der Ellypse, O a und O b ihre Halbaxen. Man verzeichne aus O als Mittelpunkt drei concentrische Kreise und zwar den ersten β b mit der kleinen Halbaxe, den zweiten a α mit der grossen Halbaxe, den dritten c γ mit der Summe beider Halbaxen. Zieht man nun einen beliebigen Radius O q p r und durch die Punkte q und p, in welchen die Kreise β b und a α geschnitten werden, parallele Linien zu O a und O b, so schneiden sich diese in einem Punkt m der Ellypse, und wenn man diesen Punkt mit r durch eine gerade Linie verbindet, so ist diese der Richtung nach die zum Punkt m gehörige Normale. Die Richtigkeit dieser Construktion wird auf folgende Art bewiesen.

Nennt man O a = a, O b = b die beiden Halbaxen, O n = x, m n = y die Coordinaten des Punktes m, $\widehat{r\,O\,c} = \varphi$, so ist:

$$m\,n = y = \overline{O\,q}\,\sin\varphi = b\,\sin\varphi\,, \quad x = O\,n = \overline{O\,p}\,\cos\varphi = a\,\cos\varphi$$

demnach:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Diese Gleichung gehört aber einer Ellypse an, deren Halbaxen a und b sind.

Nennt man Θ den Winkel, den die zum Punkt m gehörige Normale mit der Abscissenlinie bildet, so ist bekanntlich, oder wie man leicht findet:

$$\text{tang}\,\Theta = -\frac{d\,x}{d\,y} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Aber wegen Gleichung (1) ist auch $\frac{x\,dx}{a^2} + \frac{y\,dy}{b^2} = o$ demnach $\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$ demnach $\text{tang}\ \Theta = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$. Nennt man aber ferner σ den Winkel, den die Linie $r\,m\,s$ mit $O\,c$ bildet, so findet man leicht, dass $\text{tang}\ \sigma = \frac{a \sin \varphi}{b \cos \varphi}$, oder weil $\sin \varphi = \frac{y}{b}$, $\cos \varphi = \frac{x}{a}$ ist,

$$\text{tang}\ \sigma = \frac{a\,\frac{y}{b}}{b\,\frac{x}{a}} = \frac{a^2}{b^2}\,\frac{y}{x}$$

demnach ergibt sich $\text{tang}\ \Theta = \text{tang}\ \sigma$ oder $\Theta = \sigma$, d. h. die Richtung der Linie $r\,m\,s$ stimmt mit der Richtung der Normale überein, was zu beweisen war.

Annäherungs-Construktion einer Ellypse.

Es seien, Fig. 8, Tafel XV., $O\,a = a$, $O\,b = b$ die Halbaxen. Macht man $O\,d = O\,d_1 = 3\,\frac{a-b}{2}$ und $O\,e = O\,e_1 = 4\,\frac{a-b}{2}$, verbindet die Punkte $e\,d\,e_1\,d_1$ durch gerade Linien, beschreibt hierauf aus d und d_1 mit einem Halbmesser $d\,a = d_1\,a_1$ die Kreisbogen $n\,a\,m$ und $n_1\,a_1\,m_1$ und aus e und e_1 mit dem Halbmesser $e\,d\,n = e\,d_1\,n_1$ die Kreisbogen $m\,b\,m_1$, $n\,b_1\,n_1$, so bilden diese vier Kreisbogen zusammen eine Linie, die für ein minder geübtes Auge wie eine Ellypse aussieht. Dieser Schein ist aber nur dann täuschend, wenn die beiden Halbaxen nur wenig verschieden sind.

Verzeichnung der Cycloide.

Wenn ein Kreis k, Fig. 9, Tafel XV., auf einer geraden Linie $a\,x$ von a an fortrollt, findet man einen Punkt m der Cycloide, die dabei beschrieben wird, wenn man in $a\,x$ einen Punkt b annimmt, daselbst den Erzeugungskreis verzeichnet und auf demselben ein Bogenstück $m\,b$ abschneidet, das so lang ist als $\overline{a\,b}$. Verbindet man m mit b, so ist dies die Richtung der zum Punkt m gehörigen Normale. Wiederholt man dieses Verfahren, indem man in $a\,x$ eine Reihenfolge von Punkten annimmt, so erhält man auch eine Reihe von Punkten der Cycloide, so wie der zugehörigen Normalen. Allein dabei wird das Papier durch die vielen Hilfslinien und Hilfskreise so sehr in Anspruch genommen, dass zuletzt eine reine Zeichnung nicht mehr

möglich ist. Nachfolgendes Verfahren ist richtig und schont das Papier.

Man verzeichne, Fig. 1, Tafel XVI., die Hälfte des Erzeugungskreises und die berührende Gerade $0\,x$. Mache das Bogenstück $\widehat{0\,5}$ gleich der Weglänge $\overline{0\,5_{,}}$, auf welcher der Erzeugungskreis fortrollen soll, theile $\widehat{0\,5}$ und $\overline{0\,5_{,}}$ in gleich viele, gleich grosse Theile, ziehe die Sehnen $0\,1$, $0\,2$, $0\,3$, $0\,4$, $0\,5$ und dann durch $1_{,}$, $2_{,}$, $3_{,}$, $4_{,}$, $5_{,}$, parallele Geraden zu diesen Sehnen, so schneiden sich je zwei von diesen auf einander folgenden Linien in gewissen Punkten $1_{,}$, II, III, IV . . ., und es ist leicht zu erkennen, dass die durch die Punkte $1_{,}$, $2_{,}$, $3_{,}$ zu den Sehnen $0\,1$, $0\,2$. . . parallel gezogenen Geraden das Normalensystem der Cycloide und $1_{,}$, II, III, IV . . . eine Reihenfolge von Krümmungsmittelpunkten dieser Linie darstellen.

Beschreibt man also aus $1_{,}$ mit dem Halbmesser $1_{,}\,0$ den Bogen $0\,a$, sodann aus II mit dem Halbmesser II a den Bogen $a\,b$ u. s. f., so erhält man mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit das ganze Bogenstück $0\,e$ der Cycloide.

Verzeichnung der Epicycloide.

Die Epicycloide ist diejenige Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, wenn derselbe auf einem anderen Kreis fortgerollt wird. Der bewegliche Kreis wird Erzeugungskreis, der ruhende dagegen Grundkreis genannt.

Es sei, Fig. 2, Tafel XVI., a der Anfangspunkt eines epicycloidischen Bogens, $a\,b$ der unbewegliche Bogen, auf welchem der Erzeugungskreis fortgerollt ist, k die Position des Erzeugungskreises. Macht man $\widehat{b\,m} = \widehat{b\,a}$, so ist m ein Punkt der Epicycloide und ist $m\,b$ der Richtung nach die Normale, welche dem Punkt m entspricht. Wiederholt man diese Construktion mehrere Male, indem man in K eine Reihenfolge von Punkten annimmt, jedesmal den Erzeugungskreis verzeichnet und auf demselben die geeigneten Bogenlängen abschneidet, so erhält man eine Reihenfolge von Punkten der Epicycloide, so wie die zugehörigen Normalen. Jede solche Normale wie $m\,b$ schneidet, wenn sie verlängert wird, den Grundkreis noch ein zweites Mal bei e, und dieser Punkt kann leicht gefunden werden. Es ist $\widehat{b\,C\,e} = \widehat{m\,c\,b}$, demnach $\widehat{b\,e} = \frac{R}{r}\,\widehat{a\,b}$, wobei R und r die Halbmesser der Kreise K und k bezeichnen. Setzt man $\frac{R}{r} = n$, so wird:

$$\widehat{b\,e} = n\,\widehat{a\,b}$$

Man findet also den Punkt e, in welchem eine Normale den Grundkreis zum zweiten Mal schneidet, wenn man von dem Punkt b an, wo sie den Grundkreis zum ersten Mal schneidet, eine Bogenlänge $\widehat{b\,e}$ abschneidet, die n-mal so gross ist, als die Bogenlänge $\widehat{a\,b}$. Hierdurch hat man ein sehr einfaches Verfahren zur Verzeichnung des Normalensystems einer Epicycloide und mithin auch ein Verfahren zur Verzeichnung der Linie selbst.

Es sei z. B. Fig. 3, Tafel XVI., K der Grundkreis und $n = 2$, d. h. der Halbmesser des Erzeugungskreises sei halb so gross als jener des Grundkreises. Macht man vom Anfangspunkt 0 an eine Eintheilung $0\,1 = 1\,2 = 2\,3 = \ldots.$ und verbindet dann 1 mit 3, ferner 2 mit 6, 3 mit 9, 4 mit 12, so bilden diese Linien das Normalensystem der Epicycloide und die Punkte I, II, III, IV . . ., in welchen sich diese Linien schneiden, sind die Krümmungsmittelpunkte, aus welchen die Bogen $0\,1_{,}$, $1_{,}\,2_{,}$, $2_{,}\,3_{,}$ beschrieben werden können. Auch diese Construktion ist einfach und schont das Papier.

Verzeichnung einer Hypocycloide.

Die Hypocycloide ist diejenige Linie, welche ein Punkt der Peripherie eines Kreises beschreibt, der in einem andern Kreis fortgerollt wird.

Es sei, Fig. 4, Tafel XVI., K der Grundkreis, in welchem der Erzeugungskreis k von a an bis b fortgerollt worden ist. Macht man $\widehat{b\,m} = \widehat{a\,b}$, so ist m ein Punkt der Hypocycloide und verbindet man m mit b, so ist diese Linie die Richtung der durch m gehenden Normale. Diese Normale schneidet den Kreis noch einmal im Punkte e und dieser kann leicht gefunden werden. Denn verbindet man die Mittelpunkte c und C der Kreise k und K mit m und e, so bilden sich die zwei ähnlichen Dreiecke c m b und e C b, es ist folglich $\widehat{e\,C\,b} = \widehat{m\,c\,b}$, demnach:

$$\widehat{e\,b} = \frac{R}{r}\,\widehat{m\,b} = \frac{R}{r}\,\widehat{a\,b} = n\,\widehat{a\,b}$$

wobei $\frac{R}{r} = n$ gesetzt wurde. Man findet also den Punkt e, in welchem eine durch b gehende Normale den Grundkreis zum zweiten Mal schneidet, wenn man den Bogen $\widehat{a\,b}$ von a an $(n - 1)$-mal nach entgegengesetzter Richtung aufträgt. Hieraus folgt ein einfaches Verfahren zur Verzeichnung der Hypocycloide.

Es sei z. B. Fig. 5, Tafel XVI. $n = \frac{R}{r} = 3$.

Trägt man von 0 aus eine Theilung $01 = 12 = 23 \ldots$ auf, macht

$$\widehat{01_{,}} = (3-1)\,\widehat{01} = 2 \times \widehat{01}$$

$$\widehat{02_{,}} = (3-1)\,\widehat{02} = 2 \times \widehat{02}$$

$$\widehat{03_{,}} = (3-1)\,\widehat{03} = 2 \times \widehat{03}$$

.

verbindet die Punkte $1_{,}$, $2_{,}$, $3_{,}$. . . mit 1, 2, 3, verlängert diese Linien bis sie sich in II, III, IV schneiden, so hat man das Normalensystem und die Krümmungsmittelpunkte der Hypocycloide. Diese kann also durch kleine Kreisbogenstücke 0 a, a b, b c . . . zusammengesetzt werden.

Nimmt man $n = 2$, so gibt dieses Verfahren parallele Normalen und als Hypocycloide den durch 0 gehenden Durchmesser, was auch ganz richtig ist.

Evolventen.

Nimmt man eine krummlinig begrenzte Scheibe, befestiget an ihrem Umfang einen vollkommen biegsamen, aber unausdehnsamen Faden, wickelt denselben um die Scheibe und zwar so, dass der Faden stets geradlinig gespannt bleibt, so beschreibt der Punkt, an welchem der Faden gefasst wurde, eine krumme Linie, welche die Evolvente der Scheibengrenzlinie ist, welche letztere auch Evolute genannt wird.

Es ist klar, dass der Faden in jeder seiner Positionen einerseits Tangente zu einem Punkt der Evolute und andererseits Normale zu einem Punkt der Evolvente ist. Man findet also das System der Normalen einer zu verzeichnenden Evolvente, wenn man zu der gegebenen Linie das Tangentensystem darstellt, was praktisch mit hinreichender Genauigkeit mit einem Lineal leicht geschehen kann.

Geometrische Theorie der Verzahnung.

Allgemeine Erklärungen. Versieht man zwei der Richtung nach parallel gelagerte Axen mit cylindrischen Scheiben, presst diese gegen einander und dreht hierauf eine der beiden Axen mit gleichförmiger Geschwindigkeit, so entsteht dadurch auch in der zweiten Axe und ihrer Scheibe eine gleichförmige drehende Bewegung, vorausgesetzt, dass der Widerstand, welcher etwa der Bewegung der zweiten Axe entgegen wirkt, nicht zu gross ist.

Wenn die beiden Scheiben nur aufeinander rollen und nicht glitschen, sind ihre Umfangsgeschwindigkeiten gleich gross, müssen

sich demnach die Winkelgeshwindigkeiten der beiden Scheiben umgekehrt wie ihre Halbmesser verhalten. Nennt man R und $R_{\prime}$ die Halbmesser der Scheiben, ω und $\omega_{\prime}$ die Winkelgeschwindigkeiten n und $n_{\prime}$ die Anzahl der Umdrehungen, welche die beiden Scheiben in einer Minute machen, endlich Δ die Axendistanz, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} R + R_{\prime} &= \Delta \\ \frac{R}{R_{\prime}} = \frac{\omega_{\prime}}{\omega} &= \frac{n_{\prime}}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Hieraus folgt, wenn man Δ, n und $n_{\prime}$ als gegebene Grössen betrachtet:

$$\left.\begin{aligned} R_{\prime} &= \frac{\Delta}{1 + \frac{n_{\prime}}{n}} \\ R &= \frac{\Delta}{1 + \frac{n}{n_{\prime}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Diese Bewegungsmittheilung durch zwei auf einander rollenden cylindrischen Scheiben ist eine vollkommen sanfte und ist in sofern den praktischen Zwecken ganz angemessen, allein sie hat zwei nachtheilige Eigenschaften; sie ist unsicher, indem sehr leicht ein Glitschen der Scheiben eintritt und kann auch nicht zur Uebertragung von grösseren Kräften gebraucht werden, weil in diesem Falle die Scheiben sehr stark gegeneinander gepresst werden müssten, was bedeutende Axenreibungen verursachen würde. Versieht man aber die Umfänge der beiden Scheiben mit regelmässig geformten, in einander greifenden Zähnen, so brauchen die Scheiben nicht gegeneinander gepresst zu werden und kann dennoch eine Bewegung hervorgebracht werden, die identisch ist mit der Bewegung der zwei aufeinander rollenden Scheiben. Die Theorie der Verzahnung hat die Aufgabe zu lösen, solche Zahnformen ausfindig zu machen, dass durch dieselben Bewegungen hervorgerufen werden, die mit zwei aufeinander rollenden Scheiben übereinstimmen, also solche Bewegungen, dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen für jeden Zeitaugenblick der Bewegung einen und denselben constanten Werth hat. Wir werden in der Folge zeigen, dass die Aufgabe der Verzahnung eine unbestimmte ist und dass sie unendlich viele Auflösungen zulässt, werden auch die allgemeinen Methoden angeben, durch welche diese möglichen Lösungen gefunden werden können. Allein wir wollen gleich von vorn herein

bemerken, dass nicht jede in geometrischer Hinsicht richtige Verzahnungsart auch in praktischer Hinsicht von gleichem Werth ist, sondern dass nur solche Verzahnungsarten zur Ausführung empfohlen werden können, die nicht zu starke Reibungen verursachen und bei welchen keine erheblichen Formänderungen der Zähne durch Abnützung entstehen. Die beste Verzahnung wäre diejenige, welche nicht nur den früher ausgesprochenen geometrischen Bedingungen entsprechen würde, sondern die noch überdies gar keine Reibung noch eine Formänderung der Zähne durch Abnützung verursachen würde.

Bei diesen einleitenden Erklärungen sind wir von der speziellen Annahme ausgegangen, dass die mit einander durch Räder zu verbindenden Axen parallel sind. Dies ist aber nicht immer der Fall, sondern sehr häufig bilden die Axenrichtungen einen Winkel, schneiden sich jedoch, und zuweilen bilden die Axenrichtungen einen Winkel, ohne sich zu schneiden. Wir haben also Verzahnungen anzugeben, 1) für parallele Axen, 2) für gegen einander geneigte, aber sich schneidende Axenrichtungen, 3) für gegen einander geneigte und sich nicht schneidende Axenrichtungen. Wir beginnen nun mit einigen speziellen Verzahnungsarten für parallele Axen, gehen sodann zu speziellen Anordnungen für geneigte Axen über und schliessen mit den allgemeinsten Verfahrungsarten zur Auffindung von richtigen Zahnformen für jede beliebige Gegeneinanderlagerung der Axen.

Erste Verzahnung mit Triebstöcken.

Es seien, Fig. 6, Tafel XVI., C und c die Mittelpunkte der Räder, K und k die Theilrisse derselben, d. h. zwei aus C und c beschriebene sich berührende Kreise, deren Halbmesser sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen verhalten. Die Halbmesser dieser Theilkreise können vermittelst der früher für die Scheiben aufgefundenen Gleichungen (2) berechnet werden. Versehen wir den Kreis k mit dünnen Stiften 1, 2, 3, die in gleichen Abständen aufeinander folgen, den Kreis K dagegen mit Zahnformen $a\,b$, $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$, die nach der Epicycloide geformt sind, welche ein Punkt des Kreises k beschreibt, wenn derselbe auf dem Kreis K fortgerollt wird, so haben wir eine geometrisch richtige Verzahnung. Denn denken wir uns, der Zahn $a\,b$ werde in die Position $a_1\,b_1$ gebracht, so wird der Stift 1 nach dem Punkt 2 fortgeschoben, in welchem die Epicycloide $a_1\,b_1$ den Kreis k durchschneidet. Ist nun die Zahnform richtig, so muss die Bogenlänge $\widehat{a\,a_1}$ gleich sein der

Bogenlänge $\widehat{12}$. Dies ist aber in der That der Fall, wenn der Zahn nach der Epicycloide geformt ist, die durch das Rollen des Kreises k auf K entsteht.

Damit aber die Bewegung continuirlich fortdauern kann, muss in dem Augenblick, in welchem der Stift mit dem äussersten Ende der Zahnkurve in Berührung tritt, wiederum ein nachfolgender Zahn mit einem nachfolgenden Stift in dem Punkt a zusammen treffen u. s. f. Die Continuität der Bewegung erfordert also 1) dass die Entfernung der Stifte gleich ist der Entfernung der Zähne, oder dass $\widehat{a\,a_1} = \widehat{a_1\,a_2} \ldots = \widehat{12} = \widehat{23} = \ldots$ 2) dass die Zahnlinie a b durch Wälzung des Kreisses k auf dem Kreis K auf eine Bogenlänge, die wenigstens gleich $\widehat{a\,a_1}$ ist, gebildet werde.

Man nennt die Entfernung der Stifte oder die Entfernung der Anfangspunkte der Zähne die Theilung oder Schrift, und kann daher sagen, dass diese Stiftenverzahnung 1) gleiche Theilungen und 2) eine Zahnlänge verlangt, die wenigstens so lang ist, als der epicycloidische Bogen, der durch Wälzung auf einer Theilung beschrieben wird.

Mit dieser Anordnung kann aber keine Kraft übertragen werden, weil die Stifte durch den Druck der Zähne abbrechen müssten. Wenn man aber statt der unendlich dünnen Stifte runde cylindrische Stäbchen (Triebstöcke) anbringt und die Zähne des Rades K nach der äquidistanten Linie formt, die entsteht, wenn der Triebstockkreis so fortbewegt wird, dass sein Mittelpunkt stets der epicycloidischen Linie $\widehat{a\,b}$ folgt, so erhält man abermals eine geometrisch richtige und realisirbare Anordnung. Dieselbe ist in Fig. 7, Tafel XVI. dargestellt.

$a_1\,c_1\,b_1$ ist die der Stiftenverzahnung entsprechende Epicycloide, $\alpha_1\,\gamma_1\,\beta_1$ ist die mit dem Halbmesser des Triebstockes beschriebene Aequidistante der Epicycloide $a_1\,c_1\,b_1$. Der Zahn würde den Triebstock genau durch eine Theilung bewegen, wenn er nur bis γ_1 reichte, weil er aber noch weiter fortgesetzt ist, so bewegt er die Triebstöcke durch mehr als eine Theilung. Wenn der Zahn Z_2 mit dem Triebstock T_2 in Berührung tritt, hört demnach die Einwirkung von Z_1 auf T_1 noch nicht auf. Wollte man die Zähne so formen, dass ein Zahn einen Triebstock durch irgend einen beliebigen Bogen des Theilrisses zu bewegen vermöchte, so müsste die Epicycloide und die zugehörige Aequidistante gerade für diesen Bogen construirt werden. Die Zähne sind zu beiden Seiten symetrisch gebildet, was zur Folge hat, dass sowohl nach der einen wie nach der andern Drehungsrichtung richtige Bewegungen entstehen. Die

Lücken zwischen zwei Zähnen sind kreisbogenförmig, was übrigens nicht wesentlich ist, indem die Fläche der Aushöhlung mit dem Triebstock nicht in Berührung kommt. Die Lückenweite ist etwas grösser als der Durchmesser eines Triebstockes, damit nicht leicht eine Einklemmung eintritt. Bei mathematisch richtiger Form würde aber auch das Einklemmen nicht statt finden, wenn die Zahnlücke genau so weit wäre, als der Durchmesser eines Triebstockes.

Fragen wir nach dem praktischen Werth dieser Construktion, so können wir diesen nicht hoch anschlagen, weil der Triebstock nothwendig sehr bald seine runde Form verliert. Während ein Zahn aus der Position z_2 in die Position z_1 fortrückt, streicht der Triebstock auf der Zahnfläche hinaus, und zwar mit zunehmender relativer Geschwindigkeit. Dabei ist aber der Druck zwischen dem Zahn und dem Triebstock nicht constant, sondern fortwährend zunehmend. In der Position z_1 z. B. drückt der Zahn z_1 den Triebstock nach der Richtung $a\ \gamma_1\ c_1$. Fällt man von C aus auf die Verlängerung von $c_1\ a$ den Perpendikel $C\ D$, so ist die Länge desselben $R \cos \varphi$, wobei R der Halbmesser des Kreises K und $\varphi = \widehat{a\ C\ D}$. Nennt man also M das constante Moment der Kraft, welche das Rad K treibt, so ist $\frac{M}{R \cos \varphi}$ der Druck des Zahnes gegen den Triebstock in der Position z_1. Da nun φ von 0 an fortwährend wächst, je mehr sich der Zahn von der Position z_2 entfernt, so erkennt man daraus, dass die Pressung zwischen dem Zahn und Triebstock ebenfalls fortwährend zunimmt. Dies hat nun zunächst zur Folge, dass der Zahn nach aussen zu mehr abgenützt wird und daher allmählig eine Form annimmt, bei der er gegen das Ende seiner Einwirkung hin zu wenig vorschiebt, dass also die Bewegung des Triebstockrades nicht eine gleichförmige, sondern eine verzögerte wird. Dann aber hat der Theil des Triebstockumfanges, mit welchem der Zahn während seiner Einwirkung in Berührung kommt, nur eine äusserst geringe Ausdehnung, der Triebstock wird also nur an einer Stelle abgenützt und flacht sich daselbst ab, ändert also den eigentlich wirksamen Theil seiner Form sehr beträchtlich. Hieraus geht also hervor, dass diese Verzahnung mit Triebstöcken sehr starken Abnützungen unterliegt, daher nur von geringem praktischem Werth ist.

Zweite Verzahnung. Epicycloiden und radiale Einschnitte.

Es seien, Fig. 8, Tafel XVI., K und k die Theilrisse der beiden Räder, a der gemeinschaftliche Berührungspunkt derselben, $a\ b$ ein in dem Rade k angebrachter geradliniger radialer Einschnitt.

Betrachtet man diesen als die Form des Zahnes vom Rade k, so erhält man die correspondirende Zahnform für das Rad K; wenn man eine Epicycloide a c verzeichnet, die entsteht, wenn ein Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}$ r auf dem Theilriss K fortgerollt wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergibt sich auf folgende Weise.

Man denke sich, der Zahn werde aus der Position a c nach a_1 c_1 gebracht und wirke dabei auf den geradlinigen Einschnitt a b ein, so wird dieser fort und fort die Epicycloide berühren. Wir werden also die Position des geradlinigen Einschnittes finden, wenn wir von o aus an die Epicycloide eine Tangente ziehen. Allein weil der Voraussetzung gemäss a c durch Rollen des Kreises $\frac{1}{2}$ r auf K entstanden ist, so geht die Tangente, welche man von o aus nach der Epicycloide ziehen kann, durch den Punkt c_1, in welchen die Epicycloide durch den Erzeugungskreis $\frac{1}{2}$ r geschnitten wird. Wenn nun die Zahnformen richtig sind, muss $\widehat{a\,d} = \widehat{a\,a_1}$ sein. Dies ist aber wirklich der Fall, denn aus den Voraussetzungen folgt:

$\widehat{a\,c_1} = \widehat{a\,a_1}$, dann aber ist: $\widehat{a\,c_1} = \frac{1}{2}\,r \times \widehat{c_1\,o_1\,a}$, $\widehat{a\,d} = r \times \widehat{d\,o\,a}$

aber $\widehat{d\,o\,a} = \frac{1}{2}\,\widehat{c_1\,o_1\,a}$, demnach $\widehat{a\,c_1} = \widehat{a\,d}$ folglich auch $\widehat{a\,d} = \widehat{a\,a_1}$ was zu beweisen war.

Hierauf beruht nun die in Fig. 1, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung, welche mit solchen Verhältnissen verzeichnet ist, dass sich je zwei Zähne durch zwei Theilungen führen.

k und K sind die Theilkreise der beiden Räder, a ihr Berührungspunkt, $\frac{1}{2}$ k und $\frac{1}{2}$ K zwei in a sich berührende Hülfskreise, deren Halbmesser halb so gross sind, als die Halbmesser der Theilkreise, $\widehat{a\,c_1} = \widehat{a\,a_1} = \widehat{a\,e_2} = \widehat{a\,a_2} =$ einer Zahntheilung, a_1 c_1 Epicycloide, die der Punkt c_1 beschreibt, wenn der Kreis $\frac{1}{2}$ k von a nach a_1 gerollt wird, d_2 e_2 Epicycloide, die der Punkt e_2 beschreibt, wenn der Kreis $\frac{1}{2}$ K von a bis a_2 gerollt wird. a c, a_2 c_2 identisch mit a_1 c_1; a e, d_1 e_1 identisch mit d_2 e_2. Die Dicke jedes Zahnes, gemessen auf den Theilrissen, beträgt etwas weniger als die Hälfte einer Theilung. Dass diese Verzahnung richtig ist, ergibt sich aus der vorhergehenden Theorie.

Zunächst ist klar nach obiger Theorie, dass die Form a c auf a b einwirkend, eine richtige Bewegung gibt, dass also der Zahn Z den Zahn z von a bis d_1 richtig bewegt. Allein ganz auf die gleiche

Weise, wie früher bewiesen wurde, dass a c auf a b richtig von a bis d_1 einwirkt, kann man auch beweisen, dass die mit $\frac{1}{2}$ K beschriebene Epicycloide a e auf den geradlinigen Einschnitt a f richtig von a bis a_2 einwirkt, dass also umgekehrt auch f_2 a_2, auf e_2 d_2 einwirkend, die richtige Bewegung des Zahnes z_2 bis z hervorbringt. Die vollständige Einwirkung zweier Zähne geschieht nun wie folgt. Zwei Zähne z_2 Z_2 treten eine Theilung vor der Centrallinie o O in e_2 in Berührung. Von da an wirkt das geradlinige Stückchen e_2 a_2 auf e_2 d_2 ein bis die Zähne die Position z Z erreichen. Bei dieser Bewegung ist der Berührungspunkt auf den Zahn Z_2 von e_2 bis a_2 hinausgerückt, dagegen auf den Zahn z_2 von e_2 bis d_2 hineingerückt. Von Z z an bis Z_1 z_1 wirkt dann die Epicycloide a c auf den geraden Einschnitt a b ein, und dabei gleitet der Berührungspunkt von a nach c hinaus, dagegen von d_1 bis c_1 hinein.

Wollte man die Verzahnung so construiren, dass sich die beiden Zähne durch einen beliebigen Bogen α vor und durch einen beliebigen Bogen β nach der Centrallinie richtig zu bewegen vermöchten, so hätte man weiter nichts zu thun, als die Construktion, Fig. 1, Tafel XVII., dahin abzuändern, dass man a c_1 und a e_2 nicht gleich einer Theilung macht, sondern $\widehat{a c_1} = \alpha$ und $\widehat{a e_2} = \beta$. Damit überhaupt eine continuirliche Bewegung stattfinden kann, ist eigentlich in geometrischer Hinsicht nur nothwendig, dass $\alpha + \beta$ wenigstens gleich einer ganzen Zahntheilung ist, denn die Dauer der Einwirkung zweier Zähne wird durch $\alpha + \beta$ bestimmt, und diese Dauer muss wenigstens gleich sein einer Theilung.

Um den praktischen Werth dieser Verzahnung richtig zu beurtheilen, müssen wir wiederum die Abnützung betrachten.

Auch hier ist, wie bei der Triebstockverzahnung, der Druck der Zähne gegen einander nicht constant, sondern um so grösser, je entfernter sie von der mittleren Position z Z sind. Daraus geht hervor, dass sich die Zähne in der Nähe der Theilrisse nur wenig abnützen werden, demnach allmälig die Form annehmen, welche Fig. 2, Tafel XVII. zeigt, in welcher f a c die ursprünglich richtige Form, f g a h die durch Abnütung entstehende Form darstellt. Allein diese Deformirung der Zahnformen beträgt bei dieser Verzahnung bei weitem nicht so viel, als bei der Verzahnung mit Triebstöcken, indem bei ersterer eine ebene Fläche mit einer schwach gekrümmten Form in Berührung kommt, was zur Folge hat, dass die auf einen Quadratcentimeter bezogene Pressung zwischen zwei Zähnen kleiner ausfällt, als bei Triebstockverzahnungen.

Die zweite Verzahnung mit Epicycloide und geradlinigem Ein-

schnitte ist also für die Ausführung zu empfehlen, und wird auch thatsächlich vorherrschend angewendet.

Dritte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden.

Es seien, Fig. 3, Tafel XVII., K k die Theilkreise der Räder, K_1 k_1 zwei andere Kreise von ganz beliebigen Halbmessern. Alle vier Kreise berühren sich in a, ihre Mittelpunkte liegen daher in der Verbindungslinie C c. Machen wir $\widehat{ac_1} = \widehat{ae_2}$ = einer Zahntheilung, und rollen den Kreis k_1 auf K und in k, ferner den Kreis k_1 auf k und in K, so beschreibt der Punkt c_1 (beim Rollen auf K) die Epicycloide c_1 a_1 und (beim Rollen in k) die Hipocycloide c_1 d_1 und dann beschreibt ferner der Punkt e_2 (beim Rollen auf k) die Epicycloide e_2 d_2 und (beim Rollen in K) die Hypocycloide e_2 a_2.

Offenbar ist $\widehat{ac_1} = \widehat{ad_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{aa_2} = \widehat{ad_2}$, berühren sich die Bogen c_1 d_1 c_1 a_1 in e_1 und die Bogen a_2 c_2 e_2 d_2 in e_2, denn die Sehne $\overline{c_1 a}$ ist sowohl die Normale zu dem Punkte c_1 der Hypo- wie der Epicycloide und die Sehne a e_2 ist die Normale zu dem Punkte e_2 der Hypo- wie Epicycloide. Vervollständigt man die Zeichnung durch Wiederholung der Formen, so entsteht die in Fig. 3, Tafel XVII. dargestellte Verzahnung mit Epi- und Hypocycloiden, und es ist nicht schwer zu erkennen, dass dieselbe die richtigen geometrischen Eigenschaften besitzt. Denn nicht nur für die in der Zeichnung dargestellte Position der Zähne, sondern auch für jede andere ist es wahr, dass $\widehat{ac_1} = \widehat{aa_1}$ und $\widehat{ae_2} = \widehat{ad_2}$.

Die ganze Wirkung zweier Zähne während der Dauer ihres Eingriffs ist nun folgende. Von Z_2 bis Z wirkt die Hypocycloide $\overline{a_2 e_2}$ auf die Epicycloide e_2 d_2 ein; von z bis z_1 hingegen wirkt die Epicycloide a c auf die Hypocycloide a b.

In Betreff der Abnützung ist diese Verzahnung ungefähr so gut wie die vorhergehende.

Will man die Construktion so anordnen, dass sich die Zähne nicht durch zwei Theilungen, sondern durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie bewegen können, so hat man nur die Construktion in der Weise durchzuführen, dass man $a c_1 = \beta$ $\widehat{ae_2} = \alpha$ macht und im Uebrigen verfährt, wie früher angegeben wurde.

Vierte Verzahnung mit Kreisevolventen.

Man erhält auch eine richtige Verzahnung, wenn man die Zähne nach den Evolventen zweier Kreise abrundet, deren Halbmesser

sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Räder verhalten.

Hiervon überzeugt man sich vermittelst Fig. 4, Tafel XVII., auf folgende Weise. In dieser Figur sind K k zwei Kreise, deren Halbmesser sich verkehrt verhalten wie die Winkelgeschwindigkeiten, c C die Verbindungslinie der Mittelpunkte, T t die den beiden Kreisen gemeinschaftliche Tangente. Werden die beiden Kreise mit Zahnformen versehen, die mit den Kreisevolventen übereinstimmen, welche sich ergeben, wenn man die beiden Kreise K und k nach entgegengesetzter Richtung abwickelt, und werden hierauf die Zähne in Berührung gebracht, so fällt der Berührungspunkt stets in die gemeinschaftliche Tangente T t. Denn zieht man durch den Berührungspunkt der Evolventen die Normallinien, so müssen diese in eine gerade Linie fallen und jede derselben muss einen der beiden Kreise berühren; dies ist aber nur dann möglich, wenn der Berührungspunkt in einen Punkt der Geraden T t fällt.

Sind also e b, e_1 b_1 zwei auf einander folgende Positionen eines Zahnes von k, *f* g, f_1 g_1 die correspondirenden Positionen des Zahnes von K, so sind d und d_1 die Berührungspunkte der Zähne. Nun sind b b_1 und *f* f_1 die Wege, um welche die Zähne gleichzeitig vorrücken und diese sind gleich gross, denn es ist sowohl b b_1 als auch *f* f_1 gleich d d_1.

Die Bewegung der Kreise erfolgt also durch die Einwirkung der Zähne so, dass ein Punkt in der Peripherie von K einen eben so grossen Weg zurücklegt, als ein Punkt in der Peripherie von k oder die Peripheriegeschwindigkeiten der Kreise K und k sind gleich gross, und daher entsteht in der That eine Bewegung, bei der sich die Winkelgeschwindigkeiten verkehrt wie die Halbmesser K k verhalten. Oder die Bewegung erfolgt so, wie wenn die Kreise K k sich berührten und auf einander rollten.

Fig. 5, Tafel XVII. stellt eine Evolventenverzahnung vor, bei welcher sich je zwei Zähne durch zwei Theilungen bewegen.

Es ist t a = a b = einer Theilung; die Evolventenbögen der Zähne z z_1 z_2.. entsprechen also der Abwicklung eines Bogens von k gleich der Länge von zwei Theilungen. Die Evolventenbögen der Zähne Z Z_1 Z_2 dagegen entsprechen der Abwicklung einer Bogenlänge des Kreises K gleich der Länge T t. Erfolgt die Bewegung nach den Richtungen der Pfeile, so treten zwei Zähne in Berührung, wenn sie die Positionen Z und z erreicht haben, und verlassen sich wiederum, wenn sie nach Z_2 und z_2 gekommen sind. Die Zwischenposition Z_1 z_1 ist diejenige, wobei der Berührungspunkt in den Durchschnittspunkt a der Linie C c und T t fällt. Dieser Punkt

a theilt die Linie C c im Verhältniss der Halbmesser der Kreise K und k.

Damit die Einwirkung zweier Zähne genau durch zwei Theilungen stattfindet, müssen die Halbmesser der Kreise k und K ganz bestimmte Längen haben, die auf folgende Weise gefunden werden können.

Man verzeichnet einen Theilungswinkel x c y der Verzahnung des Kreises k, beschreibt mit einem willkürlichen Halbmesser c u = c v einen Bogen, zieht an u die Tangente u s und schneidet auf derselben von u an ein gerades Stück u w ab so lange als der Bogen u v. Nun zieht man c w, verlängert diese Linie, trägt von c aus die Entfernung c C der Axen auf, theilt diese Linie in dem Punkt a im umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen, fällt von a aus auf c y den Perpendikel a t, verlängert denselben nach rückwärts, und fällt endlich von C aus den Perpendikel C T, dann sind c t = k und C T = K die Halbmesser der Kreise, von welchen die Evolventen gebildet werden müssen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erkennt man durch Vergleichung der Figuren 5 und 6, Tafel XVII., denn es ist Figur 5 die fertige, Figur 6 dagegen die im Entstehen befindliche Construktion.

Da der Winkel x c a jederzeit sehr klein ist und gegen a c t vernachlässigt werden kann, so findet man auch die Halbmesser k und K mit hinreichender Genauigkeit durch folgende einfache Construktion. Man ziehe die Centrumlinie C c, Fig. 7, theile dieselbe bei a im umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten der Räder, zeichne den Winkel C c y_1 gleich einem Theilungswinkel einer Zahntheilung von k, fälle von a auf c y_1 den Perpendikel a t_1, verlängere denselben nach rückwärts und fälle von C aus den Perpendikel C T_1, so ist annähernd C T_1 = K, c t_1 = k; setzt man mit diesen etwas unrichtigen Halbmessern die Construktion fort, so erhält man schliesslich eine geometrisch vollkommen richtige Verzahnung, bei welcher aber die Einwirkung zweier Zähne nicht genau durch zwei Theilungen erfolgt, sondern nur annähernd, was durchaus keine praktischen Nachtheile hat.

Wollte man die Construktion so einrichten, dass sich zwei Zähne durch einen Bogen α vor und durch einen Bogen β nach der Centrallinie zu bewegen im Stande wären, so müsste man die Construktion, welche für die Einwirkung durch zwei Theilungen beschrieben wurde, wiederholen, dabei aber a t = α und $\widehat{xct}$ gleich dem Winkel machen, der dem Bogen α entspricht, dann aber muss

ferner die Zahnlänge von z_2 dadurch bestimmt werden, indem man $ab = \beta$ macht.

Diese Evolventenverzahnung hat folgende praktisch wichtige Eigenschaften.

1) Alle Räder, die mit Evolventenzähnen versehen sind und gleiche Theilung haben, können einander richtig bewegen. Die Richtigkeit dieses Satzes wird man leicht erkennen, wenn man bedenkt, dass die Form eines Evolventenzahnes nur allein von dem Kreis abhängt, durch dessen Abwicklung die Evolvente gebildet wird. Den epicycloidischen Zähnen kommt diese Eigenschaft nicht zu, denn die epicycloidische Form eines Zahnes hängt nicht nur von der Grösse des Theilrisses des Rades, sondern auch von dem Theilriss des Getriebes ab. Wenn also ein Stirnrad mehrere Getriebe von ungleicher Grösse bewegen soll, so kann dies mit Evolventenzähnen, nicht aber mit epicycloidischen Zähnen bewerkstelligt werden.

2) Die Entfernung der Axen der Räder kann unbeschadet des richtigen Zahneingriffes innerhalb gewisser Grenzen verändert werden, nur wird durch eine solche Veränderung der Axendistanz die Dauer des Eingriffs verändert. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus dem Seite 320 geführten Beweis, welcher von der Entfernung der Axen nicht abhängt. Diese Eigenschaft ist von praktischem Werth, weil dadurch die Aufstellung des Räderwerkes erleichtert wird, indem eine kleine Aenderung in der Axendistanz keine fehlerhafte Bewegung verursacht. Räder, die mit epicycloidischen Zähnen versehen sind, müssen dagegen äusserst genau in der Weise aufgestellt werden, dass sich die Theilrisse berühren, indem nur bei einer solchen Gegeneinanderstellung der Räder eine richtige Bewegung eintreten kann.

3) Evolventenzähne werden durch Abnützung nur äusserst wenig deformirt. Diese praktisch wichtige Eigenschaft beruht darauf, dass bei einer Evolventenverzahnung die wechselseitige Pressung zwischen den im Eingriff befindlichen Zähnen während der ganzen Dauer des Eingriffs stets den gleichen Werth hat, indem die Richtung dieser Pressung stets in die Tangente $T\,t$ fällt, folglich ihr numerischer Werth gleich $\frac{M}{R}$ ist, wobei M das statische Moment der Kraft bezeichnet, welche die Axe C treibt und R den Halbmesser des Kreises K ausdrückt. Wegen dieses constanten Druckes ist die Form, welche durch Abnützung entsteht, eine äquidistante Linie, zur ursprünglichen Form daher von dieser letzteren nur äusserst wenig und in allen Punkten um gleich wenig abweichend.

4) Alle Evolventenzähne sind geometrisch ähnliche Formen und können deshalb am leichtesten durch Maschinen richtig geschnitten werden. Diese Eigenschaft wird einstens von sehr grosser praktischer Wichtigkeit werden, wenn man einmal ernstlich die Aufgabe in Angriff nehmen wird, Räderschneidemaschinen herzustellen, die unfehlbar richtige Zahnformen liefern.

Ausser diesen vier Eigenschaften besitzen die Evolventenzähne noch mehrere andere, die ebenfalls von Werth sind, deren Richtigkeit jedoch nicht so leicht nachgewiesen werden kann. Ungünstige Eigenschaften sind nicht bekannt; die Evolventenverzahnung verdient daher für die Ausführung bestens empfohlen zu werden.

Fünfte Verzahnung. Allgemeine Methode.

Wenn die Zahnform des einen Rades beliebig angenommen wird, kann man immer eine entsprechende Zahnform für das zweite Rad ausfindig machen, und zwar auf folgende Weise.

Es seien, Fig. 1, Tafel XVIII., C c die Mittelpunkte der Räder, K und k ihre Theilkreise, a der Berührungspunkt derselben, a m p ein im Rade k angebrachter krummliniger Einschnitt von irgend einer Form. Nimmt man in a p einen beliebigen Punkt m an, verzeichnet die zum Punkt m der Kurve a p gehörige Normale m n, schneidet auf K von a an ein Bogenstück $a\,n_1$ gleich dem Bogen a n ab, zieht durch n_1 eine gerade Linie, welche den Kreis K unter einem Winkel schneidet, der gleich ist dem Winkel, unter welchem der Kreis k durch die Normale m n geschnitten wird, und macht endlich $\overline{m_1\,n_1} = \overline{m\,n}$, so ist m_1 ein Punkt der Kurve $a\,m_1\,p_1$, nach welcher der Zahn des Rades K geformt werden muss, um auf die Höhlung a m p richtig einwirken zu können. Wiederholt man die so eben beschriebene Construktion, indem man in der Kurve a m p mehrere Punkte annimmt, so erhält man eine Reihenfolge von Punkten der Kurve $a\,m_1\,p_1$.

Die Richtigkeit dieser Construktion erkennt man auf folgende Weise. Denken wir uns, dass die Räder K k um ihre Axen gedreht werden, bis n und n_1 in a zusammen fallen, so werden auch die Linien m n und $m_1\,n_1$ zusammen fallen, denn diese Linien sind gleich lang und die Winkel, unter welchen sie die Kreise k und K durchschneiden, sind gleich gross gemacht worden.

Allein wenn die Linien m n und $m_1\,n_1$ zusammenfallen, berühren sich die Kurven in den Punkten m und m_1, d. h. die beiden Zähne befinden sich in einer Position ihrer Wechselwirkung. Nun ist aber $\widehat{a\,n} = \widehat{a\,n_1}$ und folglich haben die verzeichneten Zähne die Eigenschaft, dass sie aus einer richtigen Position ihrer Wechsel-

wirkung wiederum in eine richtige Position gelangen, wenn man die Theilrisse beider Räder um gleich viel fortbewegt, was eben die charakteristische Eigenschaft der wahren Zahnkurven ist.

Man kann auch die Construktion umkehren, indem man von dem convexen Zahn $a\,m_1\,p_1$ ausgeht und die concave Form $a\,m\,p$ sucht, allein dann findet man nicht für jede beliebig angenommene Convexität eine correspondirende Concavität, sondern nur dann, wenn die Convexität so stark gekrümmt ist, dass alle Normalen $m_1\,n_1$ den Kreis K durchschneiden. Nimmt man für $a\,m_1\,p_1$ einen Bogen der Evolvente des Kreises K und zieht sämmtliche Normalen, so berühren dieselben den Kreis K. Diese Kreisevolvente ist daher in dieser Hinsicht eine Grenzform, die bestimmt, wie stark gekrümmt eine Convexität genommen werden muss, damit eine entsprechende Concavität gefunden werden kann.

Abrundung der Zähne nach Kreisbögen.

Zu jeder ganz exakten Verzahnungsart kann man eine Annäherungsconstruktion mit Kreisbögen auffinden, und es gibt eine allgemeine Methode, vermittelst welcher die absolut besten Abrundungshalbmesser gefunden werden können.

Ist nämlich Z eine mathematisch richtige Zahnkurve und sucht man den wahren mittleren Werth des Krümmungshalbmessers, der der ganzen Zahnkrümmung entspricht, so ist dies der absolut beste Abrundungshalbmesser, wenn man kreisbogenförmige Zähne statt der exakten Form Z machen will. Wir wollen dieses Verfahren anwenden, um für die zweite Verzahnung mit geradlinigen Einschnitten und mit Epicycloiden die beste Kreisbogenverzahnung zu finden. Hierzu ist aber nothwendig, dass wir zuerst die Gleichungen einer Epicycloide aufstellen.

Es sei $\widehat{a\,m}$, Fig. 2, Tafel XVIII., der epicycloidische Bogen, welchen der Punkt m des Kreises k beschrieben hat, während derselbe von a bis b auf dem Kreis K fortgerollt ist.

Nehmen wir $C\,a\,x$ als Abscissenaxe und nennen:

A den Halbmesser des Kreises K, a den Halbmesser des Kreises k, $C\,p = x$, $m\,p = y$ die Coordinaten eines Punktes m der Epicycloide. $\frac{A}{a} = i$, $\widehat{a\,C\,b} = \psi$, so findet man leicht für x und y nachstehenden Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} x &= (A + a) \cos \psi - a \cos (i + 1)\, \psi \\ y &= (A + a) \sin \psi - a \sin (i + 1)\, \psi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Hieraus findet man für den wahren Werth des Krümmungshalbmessers, der dem Punkt m der Epicycloide entspricht, folgenden Ausdruck:

$$\varrho = 4\,a\,\frac{i+1}{i+2}\sin\frac{1}{2}\,i\,\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Man findet diesen Ausdruck auch ohne Mühe, wenn man das früher erklärte Verfahren zur Verzeichnung einer Epicycloide beachtet.

Bezeichnet man nun durch ϱ_m den wahren *mittleren* Krümmungshalbmesser, welcher dem Epicycloidenbogen entspricht, der durch Wälzung des Kreises k auf einem Bogen des Kreises K entsteht, der einem Centralwinkel α entspricht, so hat man nach dem Begriff von dem mittleren Werth einer Grösse

$$\varrho_m = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \varrho\, d\,\psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Führt man den Werth von ϱ aus (2) ein, so folgt

$$\varrho_m = 4\,\frac{a}{\alpha}\,\frac{i+1}{i+2}\int_0^\alpha \sin\frac{1}{2}\,i\,\psi\, d\,\psi$$

Das Resultat dieser Integration gibt

$$\varrho_m = 8\,\frac{a}{\alpha}\,\frac{i+1}{i\,(i+2)}\left[1 - \cos\frac{1}{2}\,i\,\alpha\right]$$

oder auch, weil $1 - \cos\frac{1}{2}\,i\,\alpha = 2\sin^2\frac{1}{4}\,i\,\alpha$ ist:

$$\varrho_m = 16\,\frac{a}{\alpha}\,\frac{i+1}{i\,(i+2)}\sin^2\frac{1}{4}\,i\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Allein bei allen Verzahnungen ist $\frac{i\,\alpha}{4}$ eine kleine Grösse, man begeht daher keinen merklichen Fehler, wenn man annähernd

$$\sin\frac{1}{4}\,i\,\alpha = \frac{1}{4}\,i\,\alpha,\quad \sin^2\frac{1}{4}\,i\,\alpha = \frac{1}{16}\,i^2\,\alpha^2$$

setzt, und dann findet man:

$$\varrho_m = a\,i\,\alpha\left(\frac{i+1}{i+2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Wenden wir dieses Ergebniss auf eine Verzahnung an mit geradlinigen Einschnitten und mit Epicycloiden.

Es seien R und r die Halbmesser der Theilrisse der Räder, t eine Zahntheilung, $\frac{R}{r} = n$, und nehmen wir eine Construktion an, bei welcher sich je zwei Zähne um eine Theilung vor und um eine Theilung nach der Centrallinie bewegen, so ist in diesem Fall zu setzen für die Zähne des Rades R:

$$i = \frac{R}{\frac{1}{2} r} = 2 n, \quad a i \alpha = t$$

Demnach folgt aus (5):

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right) = t \frac{2 n + 1}{2 n + 2}$$

Dagegen ist für die Zähne des Rades r zu setzen:

$$i = \frac{r}{\frac{1}{2} R} = \frac{2}{n}, \quad a i \alpha = t$$

und wir erhalten:

$$\left(\frac{\varrho}{r}\right) = t \frac{2 + n}{2 + 2 n}$$

Dies sind die in den Resultaten Seite 10 angegebenen Regeln für die Bestimmung der Kreisbogen-Verzahnung.

Hat man den Abrundungshalbmesser nach dieser Regel berechnet, so ergibt sich dann die Verzeichnung in ähnlicher Weise, wie bei der zweiten Verzahnungsart. Man verzeichnet, Fig. 3, Tafel XVIII., die vier Kreise K k, $\frac{1}{2}$ K, $\frac{1}{2}$ k, macht $\widehat{a c_1} = \widehat{a a_1} = \widehat{a e_2} = \widehat{a d_2} =$ einer Theilung. Beschreibt man nun mit einer Zirkelöffnung gleich $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ aus den Punkten a_1 und c_1 als Mittelpunkt Kreisbogen und sucht ihren Durchschnittspunkt, so ist dieser der Einsatzpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ die Rundung a_1 c_1 zu verzeichnen ist.

Beschreibt man ferner mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ aus c_2 und d_2 Kreisbogen, so ist der Durchschnittspunkt derselben, der Einsatzpunkt, aus welchem mit dem Halbmesser $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ die Abrundung c_2 d_2 gezogen werden muss. Die Einsatzpunkte für alle anderen Abrundungen ergeben sich, indem man durch den Einsatzpunkt für a_1 c_1

einen zu K und durch den Einsatzpunkt für c_2 d_2 einen zu k concentrischen Kreis zieht, sodann aus den Punkten a_1 a a_2 . . . mit einer Zirkelöffnung $\left(\frac{\varrho}{R}\right)$ und aus den Punkten d_2 a d_1 . . . mit einer Zirkelöffnung $\left(\frac{\varrho}{r}\right)$ in diese Kreise einschneidet. Die geradlinigen Einschnitte zieht man tangirend an die Kreisbogen und die Kreise, in welchen die Punkte b b_1 b_2, so wie f f_1 f_2 liegen, ergeben sich durch die Zahnlängen.

Verzahnung der Kegelräder.

Es seien, Fig. 4, Tafel XVIII., S C O und s c O die beiden Axen, die durch Kegelräder in Verbindung gesetzt werden sollen, O ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Denken wir uns von dem Punkt O aus eine Linie O x so gezogen, dass die von einem beliebigen Punkt A dieser Linie auf die Axen O S und O s gefällten Perpendikel A C und A c sich verkehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten, mit welchen sich die Axen drehen sollen, und errichten wir ferner in A auf O x und in der Ebene der Axen eine Senkrechte, welche die Axen in S und s schneidet, so entstehen zwei Doppeldreiecke S C A, C A O und A s c, A O c. Werden diese Doppeldreiecke um die Axen O S und O s herumgedreht, so entstehen zwei Doppelkegel E, G und e, g. Wir nennen die Kegel G, g, die sich längs der Linie A O berühren, Grundkegel, dagegen die Kegel E, e, die längs der Linie S A s eine gemeinschaftliche tangirende Ebene haben, Ergänzungskegel.

Werden die Grundkegel gegeneinander gepresst, und wird hierauf einer derselben um seine Axe gedreht, so entsteht auch in dem andern Kegel durch die an der Linie O A statt findende Reibung eine drehende Bewegung, und es ist leicht zu erkennen, dass sich dabei die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen O S und O s verkehrt wie die Halbmesser A C und A c verhalten werden. Versieht man aber die beiden Kegel G und g mit passend geformten Zähnen, so kann durch das Aufeinanderwirken derselben eine Bewegungsmittheilung hervorgebracht werden, die ganz identisch ist mit derjenigen, die durch das Aufeinanderrollen der Grundkegel entsteht. Die mathematisch genaue Form dieser Zähne ist eine äusserst complizirte; eine für praktische Zwecke hinreichend genaue Verzahnung ergibt sich auf folgende Weise.

Der Eingriff der Zähne findet nur in der Nähe der Linie S A s statt. Sieht man den Kegel nach der Richtung x O an und richtet

seine Aufmerksamkeit nur auf das, was in der Nähe der Linie S A s vorgeht, wenn beim Drehen der Räder die Zähne aufeinander wirken, so wird man eine Erscheinung vor Augen haben, wie wenn zwei Stirnräder, deren Halbmesser gleich sind den Seiten S A und s A der Ergänzungskegel auf einander einwirkten. Dieser Schein wäre eine volle Wahrheit, wenn die Dauer des Eingriffs der Zähne unendlich klein wäre, er ist aber nur eine Annäherung, weil diese Dauer des Eingriffs eine endliche ist. Allein weil in der Anwendung die Eingriffsdauer jederzeit nur klein ist, so können wir als praktische Regel aufstellen, dass die Form der Kegelräderzähne gefunden wird, wenn man eine Stirnräderverzahnung verzeichnet für Räder, deren Halbmesser gleich sind den Seiten der Ergänzungskegel. Dabei kann man je nach Belieben oder je nach Umständen eine oder die andere von den Verzahnungsarten wählen, deren Construktion früher angegeben wurde.

Allgemeine Methode zur Bestimmung von Bahnflächen.

Es gibt zwei ganz allgemeine Methoden, nach welchen geometrisch richtige Verzahnungen nicht nur für Stirn- und Kegelräder, sondern auch für solche Räder bestimmt werden können, deren Axen sich nicht schneiden und ganz beliebig gerichtet sind. Diese Methoden sollen nun erklärt werden.

Man denke sich zwei Axen C und C_1, die einen beliebigen Winkel bilden, sich aber nicht schneiden, versehe eine dieser Axen, z B. die Axe C, mit einer Zahnfläche F von ganz beliebiger Form und verbinde mit der andern Axe C_1 ein rechtwinkliges Coordinatensystem $O x_1$, $O y_1$ $O z_1$ in der Weise, dass die Axe der z_1 mit der Axe C_1 zusammenfällt. Dreht man nun die Axen C und C_1, so dass das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten einen constanten vorgeschriebenen Werth hat, so wird die Zahnfläche F um die Axe C und wird das Coordinatensystem um die Axe C_1 herumbewegt, und die Zahnfläche F wird gegen das Coordinatensystem in jedem Augenblick der Bewegung eine gewisse relative Position haben. Denkt man sich nun die Fläche F_1, welche die Gesammtheit der relativen Positionen der Fläche F gegen das Coordinatensystem umhüllt, so ist dies die Einhüllungsfläche, welche durch die relative Bewegung des Zahnes F gegen das Coordinatensystem $O x_1$ y_1 z_1 beschrieben wird, und diese Einhüllungsfläche F_1 ist offenbar nichts anderes als die dem Zahn F entsprechende Zahnform, mit welcher die Axe C_1 versehen werden muss, damit durch das Aufeinanderwirken der

Zähne F und F_1 die vorgeschriebene Bewegung hervorgebracht werden kann. Auf diesem Verfahren beruhen einige der früher erklärten speziellen Verzahnungen, namentlich die erste, die zweite und die fünfte. Bei der ersten Verzahnungsart ist die mit der einen Axe verbundene Zahnfläche ein dünner Stift, und die Zahnfläche F_1 ist die Einhüllungsfläche, welche dieser Stift gegen das zweite Rad beschreibt, wenn beide Axen richtig bewegt werden. Bei der zweiten Verzahnung ist die mit der einen Axe verbundene Zahnform F ein gerader radialer Einschnitt, und ist die Einhüllungsfläche F_1, welche der Einschnitt relativ gegen das zweite Rad beschreibt, eine epicycloidische Fläche.

Bei der fünften Verzahnung ist F ein beliebig krummliniger Einschnitt und ist F_1 die Einhüllungsfläche, welche F gegen die zweite Axe beschreibt.

Auch die Evolventenverzahnung entsteht nach der zweiten der beiden Methoden. Die Evolventenzähne sind nämlich die einhüllenden Flächen, welche durch die relative Bewegung einer Ebene gegen die beiden Räder entstehen, wenn diese Ebene in einer auf die gemeinschaftliche Tangente T t, Fig. 5, Tafel XVII., stets senkrechten Stellung längs dieser Tangente mit einer Geschwindigkeit fortschreitet, welche gleich ist der Umfangsgeschwindigkeit von k und K. Diese Bildung der Evolventenzähne gibt eine Andeutung zur Construktion einer Evolventenzahn-Räderschneidmaschine. Es ist eine Rundstanzmaschine, bei welcher der Meisel nicht nur auf- und niedergeht, sondern gleichzeitig nach gerader Linie (nach der Linie T t, Fig. 5, Tafel XVII.) fortschreitet, bei jedem Vorrücken des Meisels aber auch das Rad um einen angemessenen Winkel gedreht wird. Für Stirnräder lässt sich diese Idee sehr leicht und sehr solide realisiren, für Kegelräder wird aber diese Maschine so complizirt, dass eine sichere Wirkung kaum erwartet werden dürfte.

Ein zweites ganz allgemeines Verfahren zur Bildung von Zahnflächen besteht in Folgendem:

Man denke sich mit jeder der beiden Axen C und C_1 ein Coordinatensystem verbunden und zwar so, dass die Axe O z des Coordinatensystems O x y z mit C und dass die Axe O_1 z_1 des Coordinatensystems O_1 x_1 y_1 z_1 mit C_1 zusammenfällt.

Man denke sich, dass diese Axen mit dem Coordinatensystem nach dem vorgeschriebenen Gesetz bewegt werden und bewege ferner gleichzeitig eine beliebige Fläche M nach irgend einem Gesetz im Raum fort, so wird M gegen O x y z wie gegen O_1 x_1 y_1 z_1 einhüllende Flächen beschreiben, und diese sind geometrisch richtige Zahnflächen für beide Axen. Da sowohl die Gestalt der Fläche M

als auch das Gesetz ihrer Bewegung ganz willkürlich genommen werden können, so sieht man, dass sich unendlich viele Paare von richtigen Zahnformen finden lassen.

Alle diese möglichen Zahnformen lassen sich in zwei Klassen theilen, nämlich: 1) Verzahnungen, bei welchen sich die Zähne in jeder Position der Axen längs einer geraden oder krummen Linie berühren, und 2) Verzahnungen, bei welchen sich die Zähne in jedem Augenblick ihres Aufeinanderwirkens nur in einem Punkt berühren. Wir heissen diese Verzahnungsarten die erstere Kraftverzahnung, die letztere Bewegungsverzahnung, weil jene Verzahnungsart zur Transmittirung starker Kräfte, letztere aber nur zur Uebertragung schwacher Kräfte gebraucht werden darf. Bei der Kraftverzahnung kommt die ganze Fläche jedes Zahnes in Wirksamkeit, bei der Bewegungsverzahnung jedoch kommen nur die in einer gewissen geraden oder krummen Linie liegenden Punkte der Zahnfläche in Wirksamkeit. Bei der Kraftverzahnung schleifen die Zähne aufeinander und nützen sich ab. Bei der Bewegungsverzahnung rollen die Zähne aufeinander und drehen sich gleichzeitig in jedem Augenblick um eine Axe, deren Richtung in die Normale fällt, welche durch den Berührungspunkt der Zahnflächen geht. Diese Bewegungsverzahnungen verursachen also, theoretisch gesprochen, d. h. wenn man von der Elastizität des Materials abstrahirt, keinen Reibungswiderstand.

Dieses zweite allgemeine Verfahren zur Auffindung von Zahnformen ist von grosser praktischer Wichtigkeit, weil durch dasselbe der Weg vorgezeichnet ist, welchen man zu verfolgen hat, um Maschinen zum Schneiden von richtigen Zahnformen zu construiren. Befestiget man mit der Axe einer Drehbank einen Radkörper K, dreht die Axe mit dem Rade gleichförmig herum, nimmt ferner irgend ein passend geformtes Werkzeug M und bewegt dieses gleichzeitig in einer bestimmten Weise, so wird M sich in das Material des Rades K nach der Einhüllungsfläche F einwühlen. Befestigt man hierauf mit der Axe der Drehbank den Körper K_1 des zweiten Rades und lässt auf demselben ein Werkzeug M_1 einwirken, das sich zu M wie eine Schraubenmutter zur Spindel verhält, so wühlt sich auch dieses Werkzeug nach der Einhüllungsfläche F_1 in den Radkörper K_1 ein, und diese beiden Flächen F und F_1 sind richtige Zahnflächen.

Auch die erstere der beiden allgemeinen Methoden kann zum Räderschneiden gebraucht werden und wird auch in der That schon längst angewendet und zwar zum Schneiden von genauen Rädern für endlose Schrauben. Bildet man zwei identische Schraubenspindeln E und S, die eine E aber aus Eisen, die andere S aus Gussstahl,

macht sodann in S Schärfen und Einschnitte, ähnlich wie bei den Schraubenbohrern, nimmt man nun den Körper des Rades K, legt und drückt das Stahlwerkzeug S an dasselbe und bewegt K und S so, wie wenn die Schraube das Rad richtig bewegte, so wühlt sich S in den Körper des Rades nach einer Einhüllungsfläche ein; es entsteht am ganzen Umfang des Radkörpers ein Kranz von Vertiefungen und Erhöhungen und wenn man zuletzt das Stahlwerkzeug beseitigt und dafür die Eisenschraube E in den Eingriff bringt, so bewirkt die Drehung derselben die richtige Bewegung des Rades.

Herstellung der Räderzähne.

Was die Herstellung der Räderzähne anbetrifft, so müssen wir theils die Grösse, theils das Material berücksichtigen. In dieser Hinsicht haben wir folgende Räder zu unterscheiden:

1) kleine Räder von Messing oder Rothguss,
2) kleine Räder von Gusseisen,
3) kleine Räder von Schmiedeeisen,
4) grössere Räder von Gusseisen mit angegossenen Zähnen,
5) grössere Räder von Gusseisen mit eingesetzten hölzernen Zähnen.

Die Zähne dieser Räder werden gewöhnlich auf folgende Weise ausgeführt:

Räder aus Messing oder Rothguss werden massiv gegossen und abgedreht. In diese Radkörper werden die Zähne entweder mit einem Meisel, der die Form der Zahnlücke hat, ausgehobelt, oder mit einer rotirenden Fraise, deren Randquerschnitt mit der Form der Lücke übereinstimmt, eingeschnitten. Das erstere Verfahren ist zweckmässig, wenn man nur einzelne Räder anzufertigen hat, das letztere dagegen, wenn eine grosse Anzahl von gleichen Rädern angefertigt werden soll. Der Meisel ist nämlich leicht herzustellen, arbeitet aber langsam, die Fraise dagegen ist sehr kostspielig, arbeitet aber schnell. Statt einer Fraise kann übrigens auch ein rotirender Meissel angewendet werden.

Kleine Räder aus Gusseisen werden mit Modellen aus Messing geformt, und diese Modellräder werden genau so angefertigt, wie im Vorhergehenden beschrieben wurde. Die Modellräder werden nämlich massiv gegossen, abgedreht und mit geschnittenen Zähnen versehen.

Für grössere gusseiserne Räder mit angegossenen Zähnen werden Holzmodelle hergestellt, deren Form mit der des fertigen Rades

übereinstimmt. Um die Zähne an diesen Modellen richtig zu formen, werden nach Anleitung der Verzahnungstheorie Lehren aus Blech nach der richtigen Form der Zähne hergestellt. Mit diesen Lehren wird auf jeden Zahnkörper die Form des Zahnes aufgezeichnet oder aufgerissen und darnach die Zähne mit Säge, Raspel und Feile bearbeitet. Bei Anfertigung dieser Lehren können die Zahnformen construirt oder durch Hilfswerkzeuge empirisch gemacht werden. Um eine Epicycloide zu verzeichnen, kann man z. B. zwei Brettchen nach Kreisbogen krumm schneiden, sie dann aufeinanderrollen lassen und durch eine Spitze die Linie, welche ein Punkt des rollenden Kreises beschreibt, auf Blech ritzen lassen. Ist eine Evolvente zu verzeichnen, so kann man ein Brettchen nach dem Grundkreis zuschneiden, am Umfang eine Uhrfeder befestigen, diese sodann um das Brettchen herumwickeln und dabei wieder mit einer an die Feder angebrachten Spitze die Evolvente, welche sie beschreibt, auf Blech ritzen lassen. Ist einmal das Modell hergestellt, so wird es abgeformt und die Form mit geschmolzenem Eisen ausgefüllt.

Grössere gusseiserne Räder mit hölzernen Zähnen werden hergestellt, indem man zuerst den Radkörper in ähnlicher Weise fertigt, wie überhaupt Gegenstände aus Gusseisen, dann in dem Umfang die hölzernen Zahnkörper einsetzt, fest einkeilt und abdreht, worauf endlich die Zahnform vermittelst einer Lehre aufgerissen und ausgearbeitet werden kann.

Bei kleinen Rädern, deren Zähne mit einer Räderschneidmaschine eingeschnitten werden, wird die gleiche Zahntheilung vermittelst einer Theilscheibe hervorgebracht, mit welcher diese Maschinen jederzeit versehen sind.

Bei grossen Rädern dagegen wird die Theilung gewöhnlich vermittelst eines Handzirkels gesucht und angeritzt, was allerdings eine etwas rohe Prozedur genannt werden muss.

FÜNFTER ABSCHNITT.

Die Bewegungsmechanismen.

Einleitung.

Die Maschinen bestehen theils aus unbeweglichen, theils aus beweglichen Bestandtheilen, die ersteren dienen als Stützpunkte für die letzteren. Es sind die Zapfenlager, Axenhalter, Führungslineale und Maschinengestelle. Die beweglichen Bestandtheile dienen zur Fortleitung, Uebertragung, Verwandlung und Regulirung der Bewegungen. In diesem Abschnitt werden vorzugsweise die zur Verwandlung und Regulirung der Bewegungen dienenden Mechanismen behandelt. Ein Mechanismus zur Verwandlung einer Bewegung in eine andere besteht aus wenigstens zwei Bestandtheilen, von denen jeder nur eine gewisse einfache Bewegung zu machen vermag, die aber mit einander in der Weise in Zusammenhang gebracht sind, dass durch die Bewegung des einen die Bewegung des andern hervorgebracht wird. Die einfachen Bewegungen der Elementarbestandtheile einer Maschine sind: 1) die geradlinig fortschreitende, 2) der garadlinige Hin- und Hergang, 3) die gleichgerichtete Drehung, 4) die Hin- und Herdrehung. Ausser diesen könnte man noch krummlinige Bewegungen in Betrachtung ziehen, was wir jedoch unterlassen wollen, weil diese Bewegungen doch nur ausnahmsweise vorkommen.

Bezeichnen wir die geradlinig fortschreitende Bewegung mit a, den geradlinigen Hin- und Hergang mit b, die continuirlich drehende mit c, den bogenförmigen Hin- und Hergang mit d, so ist klar, dass die folgenden 16 Bewegungsverwandlungen möglich sind:

a in a oder in b, c, d

b „ b „ „ a, c, d

c „ c „ „ a, b, d

d „ d „ „ a, b, c

allein es ist klar, dass es möglicher Weise von jeder dieser 16 Arten von Verwandlungen eine nicht bestimmbare Anzahl von Varietäten gibt.

Es werden nun in Folgendem sehr viele von den bis jetzt erfundenen Bewegungsverwandlungen beschrieben, und wo es nöthig ist theoretisch behandelt, allein nicht in der Reihenfolge, welche durch obiges Schema dargestellt ist, sondern in einer für das Verständniss angemessenen Folge. Zwei Arten von Bewegungsverwandlungen sind es, die in der Mechanik vorzugsweise vorkommen, nämlich die Verwandlungen

c in c und c in b

und mit der Erklärung derselben wollen wir beginnen.

Räderwerke.

Zur Verwandlung einer continuirlich drehenden Bewegung einer Axe in eine continuirlich drehende einer zweiten Axe dienen am häufigsten Räderwerke. Da wir die Form der Zähne bereits in der Verzahnungstheorie bestimmt haben, so erübrigt uns nun noch die Beschreibung und Erklärung verschiedener Räderzusammenstellungen für verschiedene Zwecke.

Gewöhnliche Stirnräder zur Verbindung zweier zu einander parallelen Axen.

Fig. 5, Tafel XVIII. Das Charakteristische der Bewegungen solcher Räder ist: 1) die Geschwindigkeiten der Theilrisse der Räder sind gleich gross, 2) die Drehungsrichtungen sind entgegengesetzt, 3) die Umdrehungen der Räder in einer Minute verhalten sich umgekehrt wie die Halbmesser und auch umgekehrt, wie die Anzahl der Zähne.

Gewöhnliche Kegelräder zur Verbindung zweier Axen, die sich schneiden.

Fig. 6, Tafel XVIII. Auch hier gelten die für Stirnräder bestehenden geometrischen Beziehungen.

Uebersetzung mit einem Zwischenrad.

Fig. 7, Tafel XVIII. a und c sind zwei durch ein Zwischenrad b verbundene Räder. Dieses Zwischenrad hat keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsverhältniss der Räder a und c, wohl aber auf ihre Bewegungsrichtungen. Diese sind entgegengesetzt, wenn a und c direkt auf einander wirken, übereinstimmend, wenn ein Zwischenrad vorhanden ist. Das Gleiche findet statt, wenn zwei Räder durch eine ungerade Anzahl von Zwischenrädern verbunden sind.

Uebersetzung mit zwei Zwischenrädern.

Fig. 8, Tafel XVIII. a und d sind zwei Stirnräder, die durch zwei Zwischenräder b und c in Verbindung gesetzt sind. Hier ist sowohl das Geschwindigkeitsverhältniss der Räder a und d, als auch ihre Bewegungsrichtung genau so, wie wenn a und d unmittelbar auf einander wirkten. Diese Anwendung mehrerer Zwischenräder wird nur in solchem Falle Vortheil gewähren, wenn die Entfernung der zu verbindenden Axen gross und die Anwendung von sehr grossen Rädern nicht wohl zulässig ist. Aehnlich verhält es sich auch, wenn eine beliebige, jedoch gerade Anzahl von Zwischenaxen angewendet wird.

Verbindung zweier Axen, deren Richtungen sich nicht schneiden durch eine Zwischenaxe.

Fig. 1, Tafel XIX. a und b sind zwei Axen, deren Richtungen einen Winkel bilden, sich aber nicht schneiden. c ist eine Zwischenaxe, deren Richtung sowohl a als b schneidet. d und e sind zwei Kegelräder, welche die Axen a und c verbinden, *f* und g sind zwei andere Kegelräder, durch welche die Axen c und b in Verbindung gesetzt werden.

Räderzählwerk.

Fig. 2, Tafel XIX. a ist eine rasch laufende Axe, deren Umdrehungen gezählt werden sollen, b ein mit a verbundenes Getriebe, das in zwei grosse Stirnräder c und d eingreift, von welchen c mit der Axe *f* verbunden ist, d hingegen frei um *f* sich dreht. Die Anzahl der Zähne des Rades d ist um eine Einheit grösser, als die Anzahl der Zähne von c. e ist ein mit der Axe *f* verbundener Zeiger, der auf eine an dem Rade d angebrachte Kreistheilung

weist. Die Anzahl der Umdrehungen, welche die Axe a macht, wenn der Zeiger e in seiner relativen Bewegung gegen das Rad d einmal herumgegangen ist, beträgt, wie man leicht findet,

$$\frac{Z\,(Z + 1)}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei Z, Z + 1 und z die Zahnzahlen der Räder c, d, und b bezeichnen. Die am Rade d anzubringende Eintheilung muss daher so viele Theilungen erhalten, als der Ausdruck (1) angibt, damit eine Theilung einer einzelnen Umdrehung der Axe a entspricht.

Schraubenräder für Axen, deren Richtungen auf einander senkrecht sind.

Fig. 3, Tafel XIX. Grundriss, Fig. 4 Aufriss.

Schraubenräder für parallele Axen.

Fig. 5, Tafel XIX. Die Zähne dieser Schraubenräder sind die Einhüllungsflächen, welche entstehen, wenn die Schneide eines Meisels nach einer gewissen Richtung geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegt wird, während gleichzeitig der cylindrische Körper mit angemessener Geschwindigkeit um seine Axe gedreht wird. Diese Schraubenräder sind von dem Engländer *White* erfunden worden.

Die Schraube ohne Ende.

Fig. 6, Tafel XIX. Bei einer Umdrehung der Axe a geht das Rad b um eine Zahntheilung weiter (vorausgesetzt, dass die Schraube eingewindig ist). Die Uebersetzungszahl ist demnach gleich der Anzahl der Zähne des Rades. Es ist dies der compendiöseste Mechanismus für Uebersetzungen ins Langsame, er consumirt jedoch leider durch Reibung ungemein viel Kraft, kann deshalb zur Uebertragung von mächtigeren Kräften nicht gebraucht werden.

Spiralrad und Bahnrad.

Fig. 7, Tafel XIX. a ist ein Stirnrad, b eine Scheibe, die auf ihrer Fläche mit einer spiraligen Windung versehen ist. Die Entfernung zweier unmittelbar auf einander folgenden Windungen ist

gleich der Zahntheilung von a. Wird b einmal umgedreht, so geht das Rad a um eine Zahntheilung weiter. Es wirkt also dieser Mechanismus ähnlich, wie die endlose Schraube, und kann als Zählwerk gebraucht werden; zur Uebertragung grösserer Kräfte aber nicht, weil hier der Reibungswiderstand noch grösser ist, als bei der endlosen Schraube.

Das Differenzialräderwerk mit Kegelrädern.

Fig. 8, Tafel XIX. Dieses Rädersystem dient vorzugsweise bei gewissen Spinnmaschinen zur Fadenaufwicklung. Es ist seiner Wirkung nach ein Mechanismus, durch welchen drehende Bewegungen addirt und subtrahirt werden können. a ist eine Axe, mit welcher das Kegelrad b fest verbunden ist, c, d, e bilden ein Stück, das sich frei auf a dreht, c ist ein Kegelrad, d eine Röhre, e ein Stirnrad. *f* ist ein Stirnrad oder eine Scheibe, es ist frei drehbar auf a, g ist ein sogenanntes Planetenrad, dessen Axe in dem Körper von *f* gelagert ist und dessen Zähne in c und b eingreifen. b, c, g sind von gleicher Grösse. Werden nun b und *f*, wie die Pfeile andeuten, nach entgegengesetzter Richtung bewegt, so veranlasst jede dieser beiden Drehungen eine Drehung von c d e. Dieses Stück macht daher eine zusammengesetzte Bewegung, um deren Bestimmung es sich handelt. Dies kann auf mehrere Arten geschehen.

Erste Bestimmung. Es ist klar, dass der Winkel, um welchen c gedreht wird, in dem Fall, wenn man b und *f* gleichzeitig dreht, eben so gross ist, als wenn man zuerst b dreht und *f* stehen lässt, dann aber b stehen lässt und *f* dreht. Dreht man b einmal nach der Richtung des Pfeiles herum und lässt *f* stehen, dann leistet dabei *f* nur allein den Dienst eines Axenlagers; das Rad c wird demnach einmal herumgedreht und zwar nach einer Richtung, die, wie der Pfeil angibt, jener von b entgegengesetzt ist. Lässt man nun b stehen und dreht *f* einmal nach der Richtung des Pfeiles herum, so wird das Planetenrad g die Axe a umlaufen und sich gleichzeitig um seine eigene Axe drehen, oder g rollt auf b einmal herum.

Würde das Planetenrad blos um die Axe a laufen, ohne sich um seine eigene Axe zu drehen, so würde dadurch c *einmal* herumgeführt. Würde sich das Rad g blos einmal um seine Axe drehen, ohne die Axe a zu umlaufen, so würde c abermals *einmal* gedreht. Das Umlaufen und gleichzeitige Drehen um die eigene Axe bewirkt demnach, dass c *zweimal* nach der Richtung des in der Zeichnung angedeuteten Pfeils gedreht wird. Nachdem also eine Umdrehung von b auch eine Umdrehung von c und eine Umdrehung von

f zwei Umdrehungen von c hervorbringt, so ergibt sich die Anzahl $\left(\frac{n}{c}\right)$ der Umdrehungen, welche c in einer Minute macht, wenn die Räder b und f gleichzeitig während einer Minute $\left(\frac{n}{b}\right)$ und $\left(\frac{n}{f}\right)$ Umdrehungen machen, durch folgenden Ausdruck

$$\left(\frac{n}{c}\right)=\left(\frac{n}{b}\right)+2\left(\frac{n}{f}\right) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Würde man f nach einer Richtung drehen, die mit jener von b übereinstimmt, so muss man $\left(\frac{n}{f}\right)$ negativ in Rechnung bringen, und dann wird:

$$\left(\frac{n}{c}\right)=\left(\frac{n}{b}\right)-2\left(\frac{n}{f}\right) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Dreht man f nach der in der Figur angedeuteten Richtung, b hingegen nach entgegengesetzter Richtung, so muss man um $\left(\frac{n}{c}\right)$ zu finden, in (1) $\left(\frac{n}{b}\right)$ negativ nehmen, dann wird:

$$\left(\frac{n}{c}\right)=-\left(\frac{n}{b}\right)+2\left(\frac{n}{f}\right) \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Im Fall (1) summirt, in den Fällen (2) und (3) subtrahirt der Apparat. Fällt $\left(\frac{n}{c}\right)$ negativ aus, so ist dies ein Zeichen, dass die Bewegung von c entgegengesetzt ist derjenigen, welche in der Figur durch den Pfeil angedeutet ist.

Zweite Bestimmung. Eine zweite Bestimmung der Bewegung des Rades c gründet sich auf den Satz, dass die relativen Bewegungen sämmtlicher Räder nicht geändert werden, wenn man dem ganzen Apparat noch eine gemeinsame rotirende Bewegung ertheilt.

Es seien $\left(\frac{n}{b}\right)$, $\left(\frac{n}{f}\right)$, $\left(\frac{n}{c}\right)$ die Umdrehungen der Räder b, f, c in einer Minute nach den Richtungen, welche die Pfeile in der Figur andeuten. Fügt man zu diesen Drehungen noch eine Drehung des ganzen Apparates um die Axe a hinzu und zwar mit einer Geschwindigkeit, die der des Rades f gleich aber entgegengesetzt ist, so kommt das Rad f ganz in Ruhe und die Räder b und c machen dann in einer Minute $\left(\frac{n}{b}\right)+\left(\frac{n}{f}\right)$ und $\left(\frac{n}{c}\right)-\left(\frac{n}{f}\right)$ Umdrehungen. Allein wenn f ruht, sind die Geschwindigkeiten von b und c gleich gross, man hat daher:

$$\binom{n}{b}+\binom{n}{f}=\binom{n}{c}-\binom{n}{f}$$

oder

$$\binom{n}{c}=\binom{n}{b}+2\binom{n}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

eine Formel, die mit (1) übereinstimmt.

Differenzialräderwerk mit Stirnrädern.

Fig. 9, Tafel XIX. a ist eine Axe, mit welcher das Getriebe b verbunden ist. f ist ein auf a frei bewegliches Rad, durch dessen Körper eine mit zwei Rädern c und d verbundene Axe g gesteckt ist, die sich in einer Hülse gegen den Radkörper f drehen kann. e ist ein um a frei drehbares Rad. Die Räder b und c, so wie e und d greifen in einander. Werden die von einander unabhängigen Räder b und f gleichzeitig gedreht, so entsteht in e eine zusammengesetzte drehende Bewegung, welche bestimmt werden soll.

Erste Bestimmung. Lässt man f ruhig stehen und dreht a einmal herum, so ist das Ganze eine gewöhnliche Räderübersetzung, macht demnach e, $\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$ Umdrehungen, wobei die Zeichen b, c, d, e die Halbmesser der Räder bezeichnen. Lässt man b stehen und dreht f einmal nach der Richtung des Pfeiles herum, so rollt c auf b herum, und dieses Rollen zerlegt sich in einen Umlauf und in eine Rotation. Ein Umlauf von c um b (ohne Rotation) macht, dass e einmal nach der Richtung des auf e verzeichneten Pfeiles mitgenommen wird.

Bei einem einmaligen Herumrollen von c auf b dreht sich c und mithin auch g und d, $\frac{b}{c}$ mal; dreht sich folglich e, $\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$ mal um seine Axe, jedoch nach einer Richtung, die derjenigen entgegengesetzt ist, welche durch den auf e verzeichneten Pfeil angedeutet wird. *Eine* Umdrehung von f bewirkt also $1 - \frac{b}{c} \times \frac{d}{e}$ Umdrehungen von e.

Wenn nun b $\binom{n}{b}$ und f $\binom{n}{f}$ Umdrehungen machen, so wird nach diesen Erläuterungen offenbar

$$\binom{n}{e}=\binom{n}{b}\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}+\left(1-\frac{b}{c} \times \frac{d}{e}\right)\binom{n}{f} \quad \ldots \quad (1)$$

oder

$$\binom{n}{e} = \binom{n}{f} + \frac{b}{c}\,\frac{d}{e}\left[\binom{n}{b} - \binom{n}{f}\right] \quad \ldots\ldots (2)$$

Zweite Bestimmung. Wenn b $\binom{n}{b}$ mal und gleichzeitig *f* $\binom{n}{f}$ mal nach den Pfeilrichtungen gedreht wird, und sodann der ganze Apparat mit $\binom{n}{f}$ Umdrehungen zurückgedreht wird, so kommt *f* zum Stillstand und es macht dann

$$b, \binom{n}{b} - \binom{n}{f} \text{ dagegen } e, \binom{n}{e} - \binom{n}{f} \text{ Umdrehungen.}$$

Allein wenn *f* stille steht, hat man es mit einer gewöhnlichen Uebersetzung zu thun, und ist folglich

$$\binom{n}{e} - \binom{n}{f} = \left[\binom{n}{b} - \binom{n}{f}\right]\frac{b}{c}\,\frac{d}{e} \quad \ldots\ldots (3)$$

eine mit (2) übereinstimmende Gleichung.

Differenzialräderwerk mit veränderlicher Geschwindigkeit.

Die resultirende Bewegung des Differenzialräderwerkes ist eine gleichförmige oder eine ungleichförmige, je nachdem die Elementarbewegungen gleichförmig oder ungleichförmig sind. Zur Anwendung des Differenzialräderwerkes wird man meistens in den Fällen veranlasst, wenn zu einer gleichförmigen Bewegung eine ungleichförmige Bewegung addirt oder abgezogen werden soll. Diese ungleichförmige Elementarbewegung wird dann in der Regel vermittelst der Konusbewegung oder vermittelst Friktionsscheiben hervorgebracht, von welchen Mechanismen in der Folge die Rede sein wird.

Uebersetzungskurbel mit Kegelrädern.

Fig. 10, Tafel XIX. a ist eine Axe, die sich in Lagern dreht und mit welcher ein Schwungrad c und das konische Rad d verbunden sind. e ist ein an das Gestell befestigtes, mithin unbewegliches Kegelrad, *f* ist eine auf der Axe a frei drehbare Kurbel, deren Körper über diese Axe hinaus verlängert ist. g ist ein konisches Rädchen, dessen Zähne sowohl in d als auch in e eingreifen. Es dreht sich um einen Zapfen, der am Ende der Verlängerung von *f* angebracht ist. Wird die Kurbel *f* einmal herumgedreht, so macht

die Axe a und das damit verbundene Schwungrad gleichzeitig zwei Umdrehungen. Von einem praktischen Werth ist diese Anordnung nicht.

Uebersetzungskurbel mit Stirnrädern.

Fig. 11, Tafel XIX. a ist eine Axe, die sich in Lagern dreht und mit welcher das Schwungrad c und das Rädchen d verbunden sind. g ist ein an das Gestell geschraubtes unbewegliches Rad. h eine Kurbel, die sich frei auf a dreht. Sie ist über die Axe a hinaus verlängert und diese Verlängerung dient als Lager für eine Axe, mit welcher die Räder e und *f* verbunden sind. *f* greift in g, e greift in d ein. Wird die Kurbel einmal herumgedreht, so macht *f* einen Umlauf und dreht sich gleichzeitig $\frac{g}{f}$ mal um seine Axe. Dadurch wird die Axe a, $\frac{g}{f}\,\frac{e}{d} - 1$ mal gedreht, und die Drehungsrichtungen von h und a sind einander entgegengesetzt. Auch dieser Mechanismus wird wohl kaum jemals einen Nutzen gewähren.

Das Rädergehänge.

Fig. 12, Tafel XIX. Dieser Mechanismus ist bestimmt, die drehende Bewegung von einer fixen Axe a aus auf eine ihren Ort verändernde Axe c zu übertragen. Dies geschieht durch mehrere Stirnräder n, k, l, m, p, deren Axen in Schienen gelagert sind, die gegen einander eine Winkelbewegung machen können. Wird n gedreht und die Axe c gleichzeitig in einer auf die Ebene der Figur senkrechten Lage (innerhalb gewisser Grenzen) bewegt, so entsteht in c eine rotirende Bewegung, die (nahe) so ist, wie wenn n unmittelbar auf p einwirkte. Dieses Rädergehänge ist für die *Banc-à-Broches*-Spinnmaschine ausgedacht worden und leistet da gute Dienste.

Gleichzeitige Drehung eines Körpers um zwei Axen.

Fig. 13, Tafel XIX. a ist eine mit einer Axe b versehene Kugel. Die Axe b ist in einem Ring c gelagert, der mit einer Axe e versehen ist. An den Ring c ist ein Lager h befestigt, in welchem sich eine Axe mit zwei Stirnrädern i und k dreht. g ist ein unbewegliches, an das Gestell des Mechanismus festgeschraubtes Rad. Wird die Axe e gedreht, so nimmt dieselbe den Ring c, die Kugel a, das Lager h und die Räder *f* k i mit herum, und wenn das Rad g nicht vorhandenen wäre,

würde der genannte Körper nur eine gemeinsame drehende Bewegung mit der Axe e erhalten. Allein weil das Rad g unbeweglich ist, bleibt das Rad i mit seinen Zähnen in den Zähnen des Rades g hängen, was zur Folge hat, dass i auf g herumrollt. Dadurch entsteht nun eine drehende Bewegung von k und *f* und endlich der Axe b mit der Kugel. Diese erhält also 1) eine drehende Bewegung um die Axe e und 2) eine drehende Bewegung um die darauf senkrechte Axe b. Bei einer Umdrehung von e macht die Kugel a eine Umdrehung um e und $\frac{g}{i} \frac{k}{f}$ Umdrehungen um b.

Unrunde Räder.

Theorie derselben. Es seien, Fig. 14, Tafel XIX., S und S_1 zwei mit den Axen A, A_1 verbundene nicht kreisförmige Scheiben von solcher Gestaltung, dass dieselben ähnlich wie die Theilkreise gewöhnlicher Stirnräder auf einander rollen, wenn jede dieser Axen nach einem gewissen Gesetz gedreht wird. Die Linien, nach welchen derlei Scheiben gestaltet werden müssen, um aufeinander rollen zu können, werden Roll-Linien genannt. Das charakteristische Merkmal dieser Linien ist 1) dass sie sich in jedem Augenblick der Bewegung der Axen in einem Punkt berühren, 2) dass die Bogenlängen, um welche die Berührungspunkte auf beiden Scheiben in einer bestimmten Zeit fortschreiten, gleich gross sind. Versieht man solche nach Rolllinien gebildete Scheiben mit Zähnen, so entstehen unrunde Zahnräder, die die Eigenschaft besitzen, dass durch die nach einem bestimmten Gesetz erfolgende Drehung einer Axe A eine drehende Bewegung nach einem bestimmten andern Gesetz in der zweiten Axe A_1 eintritt. Derlei Räder können also namentlich gebraucht werden, um durch eine gleichförmig drehende Bewegung einer Axe A eine nach einem vorgeschriebenen Gesetz erfolgende ungleichförmige Drehung einer zweiten Axe A_1 hervorzubringen. Diese Rollungslinie kann auf folgende Weise bestimmt werden. Es seien, Fig. 15, Tafel XIX., A, A_1 die Axen der Räder, $D E, D_1 E_1$ die Rollungslinien in einer bestimmten Position, in der sich dieselben in dem in $A A_1$ liegenden Punkt B berühren. Schneidet man von B aus auf $B D$ und $B D_1$ zwei unendlich kleine Bogenlängen $B C$ und $B C_1$ von gleicher Länge ab und zieht die Radien $A C$ und $A_1 C_1$, so sind C und C_1 die Punkte, welche in Berührung treten müssen, wenn die beiden Räder um die Winkel $C A B = d\varphi$ und $C_1 A_1 B_1 = d\varphi_1$ niederwärts gedreht werden, damit aber die Berührung in den Punkten C und C_1 möglich ist, muss sein: 1) $\overline{AC} + \overline{A_1 C_1} = \overline{A A_1}$, 2) müssen

die Winkel, welche die Radien AC und $A_1 C_1$ mit den Tangenten bilden, die durch C und C_1 an die Rolllinien gezogen werden können, gleich gross sein. Diesen Bedingungen wird entsprochen, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \varrho + \varrho_1 &= D \\ \varrho \, d\varphi &= \varrho_1 \, d\varphi_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

wobei $\overline{AC} = \varrho$, $\overline{A_1 C_1} = \varrho_1$, $\overline{AA_1} = D$.

Wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem sich die Axe A_1 drehen soll, wenn A gleichförmig gedreht wird, kennt man φ_1 als Funktion von φ. Drückt man dieses Gesetz durch

$$\varphi_1 = \text{funkt.}\,(\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

aus, so kann man vermittelst der Gleichungen (1) und (2) jederzeit die Rolllinien bestimmen, denn es folgt aus (1):

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= \frac{D}{1 + \dfrac{d\varphi}{d\varphi_1}} \\ \varrho_1 &= \frac{D}{1 + \dfrac{d\varphi_1}{d\varphi}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Differenzirt man die Gleichung (2), so erhält man einen Differenzialausdruck, aus welchem $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ als Funktion von φ gefunden wird, und wenn man in demselben vermittelst (2) φ durch φ_1 ausdrückt, so erhält man den Quotienten $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ durch φ_1 ausgedrückt. Substituirt man diese Werthe von $\frac{d\varphi}{d\varphi_1}$ und von $\frac{d\varphi_1}{d\varphi}$ in die Gleichungen (3), so bestimmt die erstere ϱ als Funktion von φ und letztere ϱ_1 als Funktion von φ_1 und dies sind eben die in Polarcoordinaten ausgedrückten Gleichungen der beiden Rolllinien.

Anwendung dieser Theorie. Legen wir uns die Aufgabe vor, zwei unrunde Räder so zu construiren, dass denselben folgende Eigenschaften zukommen.

1) Das Rad, welchem die Elemente ϱ und φ entsprechen, soll m, jenes, dem die Elemente ϱ_1 und φ_1 zukommen, soll m_1 Polygonseiten erhalten. Es sei $m_1 > m$, so dass der Quotient $\frac{m_1}{m} = i$ die Uebersetzungszahl ausdrückt.

2) Das Bewegungsgesetz für das Rad $\varphi_1 \varrho_1$ sei,

$$\varphi_1 = \mathfrak{A}\,\varphi + \mathfrak{B} \sin k\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wobei $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ k$ die vorläufig noch unbestimmten Constanten bezeichnen.

Bei diesem Gesetz ist die Bewegung des zweiten Rades eine schwingend fortschreitende, wenn die Bewegung des ersten Rades mit Gleichförmigkeit erfolgt.

Aus (4) folgt

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Führt man diesen Werth in die zweite der Gleichungen (3) ein, so erhält man

$$\varrho_1 = \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Vermöge der oben ausgesprochenen Bedingung muss für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ werden, muss ferner der Werth von ϱ_1 für $\varphi_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ oder für $\varphi = \frac{2\pi}{m}$ gleich werden dem Werth von ϱ_1 für $\varphi = 0$. Dies ist vermöge (4) und (6) der Fall, wenn

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\pi}{m_1} &= \mathfrak{A}\,\frac{2\pi}{m} + \mathfrak{B} \sin k\,\frac{2\pi}{m} \\ \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k} &= \frac{D}{1 + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k \cos k\,\frac{2\pi}{m}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Diesen Bedingungen wird genügt, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{aligned} k &= m \\ \mathfrak{A} &= \frac{m}{m_1} = \frac{1}{i} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Hiermit sind nun zwei von den drei Constanten $k\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{B}$ bestimmt. Die dritte Constante $\mathfrak{B}$ kann man so bestimmen, dass das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des mit ungleichförmiger Geschwindigkeit laufenden Rades einen gewissen Werth γ hat.

Für die grösste Winkelgeschwindigkeit ist vermöge (5) $\cos k\,\varphi = 1$, für die kleinste $\cos k\,\varphi = -1$, man hat daher:

$$\gamma = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,k}{\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,k}$$

Führt man hier für k und $\mathfrak{A}$ den Werth aus (8) ein, sucht hierauf $\mathfrak{B}$ und berücksichtigt, dass $m\,i = m_1$ ist, so findet man:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{m_1}\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Führt man diese Werthe von $\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ k$, welche die Gleichungen (8) und (9) darbieten in (4) und (6) ein, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{i}\left(\varphi + \frac{1}{m}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\sin m\,\varphi\right) \\ \varrho_1 &= \frac{i\,D}{1+i+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cos m\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

Um vermittelst dieser Gleichungen die beiden Rolllinien der Räder zu verzeichnen, verfährt man wie folgt: Man nimmt eine Reihe von Werthen von φ an und berechnet vermittelst (10) den entsprechenden Werth von φ_1 und ϱ_1, wodurch zunächst die zweite Rolllinie gezeichnet werden kann. Nimmt man dann die Differenz $D - \varrho_1 = \varrho$, so erhält man auch die den Werthen von φ entsprechenden Radienvektoren der ersten Rolllinie.

Nimmt man z. B. an $m = m_1 = 1$, $i = 1$, $\gamma = 4$, so gibt die Gleichung (10):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{3}{5}\sin\varphi \\ \varrho_1 &= \frac{5\,D}{10+3\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (11)$$

Die Fig. 16, Tafel XIX. zeigt die Räder, welche sich für diese Annahmen ergeben.

Von der Richtigkeit der Construktion überzeugt man sich bald, wenn man die Rolllinien genau verzeichnet und sodann nachsieht, ob die Peripherielängen der beiden Räder genau gleich gross sind. Dies wird der Fall sein, wenn die Verzeichnung sorgfältig durchgeführt worden ist.

Nimmt man an $m = m_1 = 4$, $i = 1$, $\gamma = 2$, Fig. 1, Tafel XX., so gibt die Gleichung (10):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \frac{1}{8}\sin 4\,\varphi \\ \varrho_1 &= \frac{3\,D}{6+\cos 4\,\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Ellyptische Räder.

Zwei congruente ellyptische Räder, Fig. 2, Tafel XX., können sich ebenfalls bewegen, wenn die Drehungsaxen durch die Brennpunkte gehen. Das durch solche Räder entstehende Drehungsgesetz kann auch durch die für unrunde Räder aufgestellte charakteristische Gleichung (3) bestimmt werden; es erfordert jedoch eine ziemlich weitläufige Rechnung, die wir nicht vornehmen wollen. Nennt man a die halbe grosse, b die halbe kleine Axe der Ellypse eines solchen Rades, m das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades bei einer gleichförmigen Geschwindigkeit des treibenden Rades, so ist der grösste Radiusvektor $a + \sqrt{a^2 - b^2}$ und der kleinste $a - \sqrt{a^2 - b^2}$. Das grösste Uebersetzungsverhältniss ist demnach $\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$ und das kleinste $\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}}$. Das Verhältniss m dieser Uebersetzungsverhältnisse ist demnach:

$$m = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2$$

demnach:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{m^{\frac{1}{2}} - 1}{m^{\frac{1}{2}} + 1}\right)^2}$$

Soll z. B. die grösste Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades viermal so gross sein als die kleinste, so ist $m = 4$ und dann wird:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{8}{9}}$$

Das Einzahnrad.

Fig. 3, Tafel XX. c ist eine mit einer Axe a verbundene Scheibe, an welcher ein einzelner Zahn d angebracht ist. g ist ein Sternrad mit 6 Zahnlücken e und mit 6 bogenförmigen Theilen f. Die Halbmesser dieser Bogen f stimmen mit dem Halbmesser der Scheibe c überein, und die Summe aus dem Halbmesser von c und dem Abstand b h ist gleich der Entfernung der Axen a und b. Wird das Rad c gedreht, so schreitet das Rad g bei jeder Umdrehung von c um eine Sternseite weiter, allein diese Bewegung erfogłt nicht stetig, sondern mit Unterbrechungen. Das Rad g bewegt sich nämlich nur

dann, wenn der Zahn d in eine Lücke e zu stehen kommt, und bleibt ruhig, wenn einer von den Bogen *f* mit der Rundung von c zusammenfällt. Dieser Mechanismus kann zu Zählwerken oder auch zu Schaltungen gebraucht werden.

Rollen.

Bei einem Riementrieb kommt es vor allem Anderen darauf an, die Rollen in solche Stellung zu bringen, dass der Riemen auf jede Rolle in richtiger Weise aufläuft. Hierzu ist erforderlich, dass das Mittel eines nach einer Rolle hin laufenden Riemenstückes in der mittlern Ebene dieser Rolle liegt, sodann ist auch noch nothwendig, dass die Rollenumfänge nicht cylindrisch, sondern in der Mitte etwas erhöht gemacht werden, damit die Berührung zwischen dem Riemen und der Rolle nur in der Mitte statt findet, denn so wie der Rand des Riemens mit der Rolle in Berührung kommt, fällt der Riemen jederzeit von der Rolle ab. Es folgen nun mehrere Beispiele über Riementriebe.

Gewöhnlicher Riementrieb.

Fig. 4, Tafel XX. Bei dem gewöhnlichen Riementrieb stimmen die Bewegungsrichtungen der beiden Rollen überein und verhalten sich die Umdrehungen der Rollen in einer Minute verkehrt wie die Halbmesser der Rollen.

Riementrieb mit geschränktem Riemen.

Fig. 5, Tafel XX. Wird der Riemen kreuzweise um die Rollen angelegt, so sind die Bewegungsrichtungen der Rollen entgegengesetzt.

Riementrieb für zwei Axen, die nicht parallel sind und sich nicht schneiden.

Fig. 6, Tafel XX. Aufriss, Fig. 7 Grundriss. Die Ebene des Grundrisses ist mit den beiden Axen parallel. Die Orte, an welchen die Rollen mit den Axen verbunden sind, sind so gewählt, dass die Durchschnittslinie L der mittleren Ebenen der Rollen die mittleren Rollenkreise berührt. Damit der Riemen auf beide Rollen richtig aufläuft, muss die Bewegung nach der Richtung erfolgen, die durch die Pfeile angedeutet ist; auch darf die Entfernung der Axen nicht

zu klein sein, indem bei dieser Anordnung die Bedingung des richtigen Auflaufens nur annähernd erfüllt ist, und zwar um so genauer, je grösser die Entfernung der Axen ist. Versieht man die Welle A_1 mit einem Lager, das um eine mit L zusammenfallende vertikale Axe drehbar ist, so kann die Bewegung von B nach B_1 übertragen werden, in welche Stellung man auch B_1 bringen mag.

Fig. 1 und 2, Tafel XIII. der „Bewegungsmechanismen“ zeigt eine solche Rollenanordnung.

Riementrieb vermittelst Leitrollen für zwei Axen, die eine beliebige Lage haben.

Es seien, Fig. 8 und 9, Tafel XX., B und B_1 zwei Rollen, A A_1 ihre Axen, deren Richtung und Lage ganz beliebig sein kann. Nehmen wir die horizontale Projektionsebene parallel mit den beiden Axen, und die vertikale Projektionsebene parallel zur mittleren Ebene der Rolle B an, so erscheinen die Rollen in ihren beiden Projektionen, so wie die Fig. 8 und 9, Tafel XX. zeigen. Erweitern wir die mittleren Ebenen der Rollen bis zu ihrem Durchschnitt, so erhalten wir eine vertikale Linie L. Nimmt man in derselben zwei beliebige Punkte m und m_1 an, zieht von jedem Tangenten an die mittleren Rollenschnitte und bringt hierauf zwei Leitrollen C und C_1 in solche Stellungen, dass ihre mittleren Ebenen mit den Ebenen der Winkel T m T_1, t m_1 t_1 zusammenfallen, und dass überdiess die mittleren Rollenkreise von den Tangenten m T, m T_1, m_1 t, m_1 t_1 berührt werden, so hat man ein System von vier Rollen, das von einem Riemen ohne Ende umfasst werden kann, und vermittelst welchem die Bewegung von B auf B_1 übertragen werden kann, und zwar ist bei dieser Anordnung die Bewegungsrichtung der Rollen willkürlich. Dieses Rollenwerk ist jedoch mehr nur eine theoretische Möglichkeit, denn zu praktischer Realisirung ist diese Anordnung unverhältnissmässig complizirt. Tafel XIV. der „Bewegungsmechanismen“ zeigt ein Rollenmodell dieser Art.

Rolle mit Hook'schem Schlüssel.

Wenn die Richtungen zweier Axen nur einen kleinen Winkel bilden, also annähernd parallel sind, kann man folgende Rollenanordnung anwenden.

Man versieht, Fig. 10, Tafel XX., die Axe A mit einer ganz gewöhnlichen Rolle B, die andere Axe A_1 hingegen mit einer Rolle B_1, die jedoch in einem Universalgelenk oder Hook'schen Schlüssel

hängt, wodurch bewirkt wird, dass sie sich mit der Axe A_1 drehen muss, dabei aber mit ihrer mittleren Ebene stets in der Erweiterung der mittleren Ebene von B bleiben kann. Umschlingt man diese beiden Rollen mit einem endlosen Riemen, so kann die Bewegung von A nach A_1 übertragen werden.

Die Lage der Rolle B_1 ist jedoch von sehr geringer Stabilität, und man muss mehrere Stifte oder Schrauben m n . . . anbringen, welche verhindern, dass sich die Rolle B_1 nicht zu weit von ihrer richtigen Lage entfernen kann.

Expansions-Rollen.

Expansionsrollen werden diejenigen Rollen genannt, deren Umfang aus einzelnen Bogensegmenten besteht, die mehr oder weniger von der Axe der Rolle entfernt werden können, so dass die Grösse der Rolle innerhalb gewisser Grenzen stetig verändert werden kann. Der Zweck dieser Rollen ist, die Umdrehungsgeschwindigkeit einer getriebenen Axe stetig ändern zu können, ohne eine Aenderung in der Umdrehungsgeschwindigkeit der treibenden Axe vornehmen zu müssen, was zur Regulirung der Bewegung verschiedener Arbeitsmaschinen nothwendig ist. Auf der Tafel XV. der „Bewegungsmechanismen“ findet man mehrere Expansionsrollen dargestellt und im Text beschrieben.

Fig. 11, Tafel XX. gibt eine ungefähre Idee von der Einrichtung einer solchen Rolle mit Hinweglassung der Mechanismen, vermittelst welchen die Segmente aus- und einbewegt werden.

Die Konusbewegung.

Unter dieser Benennung versteht man einen Mechanismus, der ebenfalls zu der Klasse der Rollenwerke gerechnet werden kann.

Fig. 12, Tafel XX. zeigt eine Konusbewegung mit geraden Kegelflächen. a und b sind zwei mit Axen versehene hölzerne Kegel von gleicher Gestalt, aber umgekehrter Lage. c ist ein dieselben umschlingender Riemen. d ist ein Riemenleiter, der durch eine Schraube e fortbewegt wird, wodurch der Riemen selbst in paralleler Lage längs der Kegelaxen fortbewegt wird. *f* g sind zwei Zahnräder, vermittelst welchen die Schraube e eine drehende Bewegung erhält, wenn die Axe des untern Kegels gedreht wird. Wird die untere Axe mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht, so erhält auch die Axe des obern Kegels vermittelst des Riemens eine Dre-

hung, und zwar eine ungleichförmige, weil der Riemen nach der Richtung der Konusaxen fortgeführt wird und somit das Verhältniss der Halbkreise, längs welchen der Riemen die Kegel berührt, stetig verändert wird.

Fig. 13, Tafel XX. ist eine ähnliche Anordnung, die sich von der vorhergehenden dadurch unterscheidet, dass statt gewöhnlicher Kegel-Rotationsflächen a, b angebracht sind. Diese können so gewählt werden, dass bei einer gleichförmigen Bewegung der untern Axe eine ungleichförmige Bewegung der obern Axe nach irgend einem vorgeschriebenen Gesetz hervorgebracht wird. Diese Anordnung bringt also die gleiche Wirkung hervor, wie zwei unrunde Räder.

Nennt man:

$x\ y$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes M der Linie des untern Kegels,

$x\ y_1$ die Coordinaten eines entsprechenden Punktes M_1 der Linie des obern Kegels,

l die ganze Länge eines Kegels,

s das Fortrücken des Riemens bei einer Umdrehung der untern Axe,

W die constante Winkelgeschwindigkeit der untern Axe,

W_1 die veränderliche Geschwindigkeit der obern Axe,

r und R die Endhalbmesser der Kegel,

φ den Winkel, um welchen die untere Axe gedreht werden muss, damit der Riemen um x fortrückt,

so hat man zunächst:

$$W\,y = W_1\,y_1 \qquad (1)$$

$$y + y_1 = r + R \qquad (2)$$

$$\varphi = \frac{2\,\pi}{s}\,x \qquad (3)$$

Die erste dieser Gleichungen sagt uns, dass die Umfangsgeschwindigkeiten der vom Riemen berührten Halbkreise gleich gross sind. Die zweite, dass der Riemen in jeder Lage in demselben Spannungszustand verbleibt. Die dritte, dass sich die Wege s und x wie die Winkel $2\,\pi$ und φ verhalten. Vermittelst dieser Gleichungen können verschiedene Konusbewegungen berechnet oder bestimmt werden.

Nehmen wir an, die beiden Körper seien gewöhnliche Kegel, wie Fig. 12, Tafel XX. darstellt, und fragen wir nach dem Bewegungsgesetz des obern Kegels, dann ist:

$$\left.\begin{aligned} y &= r + (R - r)\,\frac{x}{l} \\ y_1 &= R - (R - r)\,\frac{x}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Diese zwei Gleichungen genügen zunächst der Bedingung (2). Führt man diese Werthe von y und y_1 in (1) ein und setzt für x den aus (3) folgenden Werth $x = \frac{s}{2\pi}\varphi$, so findet man eine Gleichung, aus welcher folgt:

$$W_1 = W\,\frac{r + \frac{s}{2\pi}\,\frac{R - r}{l}\,\varphi}{R - \frac{s}{2\pi}\,\frac{R - r}{l}\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Das Bewegungsgesetz der zweiten Axe ist also bei Anwendung von gewöhnlichen Kegeln nicht so einfach, als man meinen sollte.

Nennt man γ das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit der obern Axe, n die Anzahl der Umdrehungen, welche die untere Axe macht, während der Riemen um die Länge l fortschreitet, so ist:

$$\gamma = \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$s = \frac{l}{n}$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{R}{r} &= \sqrt{\gamma} \\ s &= \frac{l}{n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die erstere dieser Gleichungen bestimmt das Verhältniss der Endhalbmesser eines Kegels, die zweite das Vorrücken des Riemens bei einer Umdrehung der untern Axe. Nach diesem Werth von s ist die Steigung der Schraube und das Verhältniss der Halbmesser der Räder f und g anzuordnen.

Legen wir uns die zweite Aufgabe vor, die Formen der Kegel so zu bestimmen, dass die Axe des oberen Kegels eine gleichförmig beschleunigte drehende Bewegung erhält, dass also

$$W_1 = W\,(a + b\,\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

werden soll.

Aus den Gleichungen (1) und (2) folgt:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{r + R}{1 + \frac{W}{W_1}} \\ y_1 &= \frac{r + R}{1 + \frac{W_1}{W}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Setzt man in diese Gleichung für $\frac{W_1}{W}$ den Werth, der aus (7) folgt, und für φ den Werth, den die Gleichung (3) darbietet, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{(r + R)\left(a + b\,\frac{2\,\pi}{s}\,x\right)}{1 + a + b\,\frac{2\,\pi}{s}\,x} \\ y_1 &= \frac{r + R}{1 + a + b\,\frac{2\,\pi}{s}\,x} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Die Constanten a und b können auf folgende Weise bestimmt werden.

Nennt man, wie in dem vorhergehenden Beispiel, γ das Verhältniss zwischen der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit der obern Axe, so hat man:

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Für $x = o$ ist auch $\varphi = o$ und $y = r$, $y_1 = R$, demnach wird wegen der zweiten der Gleichungen (9):

$$R = \frac{r + R}{1 + a} \quad \text{oder} \quad a\,R = r$$

demnach $a = \frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Für $x = l$ ist $y = R$, $y_1 = r$, demnach wegen der zweiten der Gleichungen (9):

$$r = \frac{r + R}{1 + a + b\,\frac{2\,\pi}{s}\,l}$$

hieraus folgt:

$$b = \frac{\frac{R}{r} - a}{\frac{2\,\pi}{s}\,l}$$

Nun ist aber

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\gamma}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

daher findet man:

$$b = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} \frac{s}{2 \pi l}$$

Führt man diese Werthe von a und b in (9) ein, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} y &= r \frac{(1 + \sqrt{\gamma}) \left[1 + (\gamma - 1) \frac{x}{l}\right]}{1 + \sqrt{\gamma} + (\gamma - 1) \frac{x}{l}} \\ y_1 &= r \frac{\sqrt{\gamma} (1 + \sqrt{\gamma})}{1 + \sqrt{\gamma} + (\gamma - 1) \frac{x}{l}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

und dies sind die Gleichungen der Linien, nach welchen die Kegel zu krümmen sind. Es sind Hyperbeln.

Die Kettenbewegung.

Versieht man zwei Axen mit Zahnrädern, die nicht in einander greifen, und umschlingt dieselben mit einer Kette ohne Ende, deren Bolzen in die Zahnlücken passen, so hat man denjenigen Mechanismus, den man eine Kettenbewegung nennt. In Fig. 14, Tafel XX. ist eine solche Bewegung dargestellt. Fig. 15 ist eine Ansicht, Fig. 16 ein Grundriss von einem Theil des Ganzen in einem grösseren Maassstab.

Fig. 1, 2 und 3, Tafel XXI. zeigen eine zweite Art von Kettenbewegung. Die Räder haben hier keine eigentlichen Zähne, sondern nur weit von einander entfernte Zahnlücken und die Kettenglieder sind länger als bei der zuerst angegebenen Anordnung.

Diese Kettenbewegungen sind aus folgenden Gründen von geringem praktischen Werth:

1) ist die genaue Anfertigung dieser Ketten schwierig und kostspielig;
2) zur Uebertragung von schwächeren Kräften genügen die viel einfacheren Riementriebe;
3) zur Uebertragung von starken Kräften gewähren diese Ketten keine dauernd sichere Bewegung, indem durch die Abnützung der Kettenbolzen und der Durchbohrungen der Kettenglieder

die Theilung der Kette allmählig grösser wird, während die Rädertheilung unverändert bleibt.

Bei einer durch den Gebrauch abgenützten Kette können daher die Bolzen derselben nicht mehr in das Mittel der Zahnlücken fallen. Auch die Erfahrung hat sich gegen die Anwendung der Ketten zur Uebertragung stärkerer Kräfte ausgesprochen. Das Schraubenschiff *Great Brittain* und die *Sömering - Lokomotive* von *Maffei* waren mit Kettenbewegungen versehen, mussten aber aufgegeben werden. Indessen ausnahmsweise können die Kettenbewegungen dennoch gebraucht werden, und insbesondere dann, wenn dieselben nicht continuirlich, sondern nur von Zeit zu Zeit, und jedesmal nur während kurzer Dauer zu wirken haben.

Kurbelübersetzungen.

Mit diesem Wort will ich diejenigen Mechanismen bezeichnen, bei welchen Axendrehungen durch Kurbeln hervorgebracht werden. Solche Kurbelübersetzungen gibt es mehrere.

Erstes Beispiel.

Fig. 4 und 5, Tafel XXI. a und d sind zwei in Lagern liegende Axen, c und e zwei mit denselben verbundene Kurbeln, der Halbmesser von c ist gleich dem Abstand der Axen, der Halbmesser von e ist zweimal so lang. Die beiden Kurbelzapfen sind durch eine Schleppstange *f* verbunden, deren Länge gleich ist dem Halbmesser von e. Wird die Axe a mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht, so entsteht in der Axe d eine periodisch ungleichförmige Drehung, wobei d bei zwei Umdrehungen von a nur eine Umdrehung macht. Dieser Mechanismus ist von keinem praktischen Werth, weil der Bewegungszustand von d jedesmal unsicher wird, wenn die Richtungen von c, e und *f* übereinstimmen. Allgemein ist:

$$2\,a\,(r \cos\varphi - r_1 \cos\varphi_1) - 2\,r\,r_1 \cos(\varphi - \varphi_1) = l^2 - (a^2 + r^2 + r_1^2)$$

Zweites Beispiel.

Fig. 6, Tafel XXI. a ist eine Axe, mit welcher zwei diametral gegenüberstehende Kurbeln b und c verbunden sind. An die Zapfen derselben sind Röllchen gesteckt. d ist eine zweite zu a parallele Axe, mit welcher ein Rinnenkreuz *f* verbunden ist. Die Entfernung der Axenmittel von a und d ist gleich dem Halbmesser einer der Kurbeln b und c. Die Röllchen der Kurbeln laufen in den Rinnen

des Kreuzes. Wird die Axe a gleichförmig gedreht, so entsteht auch in der Axe d eine vollkommen sanfte, gleichförmige Drehung. Dieser Mechanismus kann wohl zur Uebertragung von schwachen Kräften gebraucht werden. Für starke Kräfte würden die Zapfen der Rollen und das Kreuz zu gross ausfallen, und würde ein genaues Einpassen der Rollen in die Rinnen zu schwierig sein.

Drittes Beispiel. Die Kurbelschleife.

Fig. 7 und 8, Tafel XXI. a und b sind zwei parallele Axen, die erstere ist mit einer gewöhnlichen Kurbel d versehen, die zweite mit einer Kurbelschleife c, in welcher ein Gleitstück e aus- und einschleifen kann. Dieses Stück e ist an den Zapfen der Kurbel d gesteckt. Wird die Axe a gleichförmig gedreht, so entsteht in b eine periodisch drehende Bewegung. Nennt man r den Halbmesser der Kurbel d, ε den Abstand der Axen a und b, φ den Drehungswinkel von d, φ_1 den Drehungswinkel von c, so findet man leicht:

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi)}{\sin \varphi_1} = \frac{\varepsilon}{r}$$

demnach:

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = \operatorname{cotg} \varphi - \frac{\varepsilon}{r \sin \varphi}$$

Man kann diesen Mechanismus anwenden, wenn gefordert wird, dass eine Axe die aufeinanderfolgenden halben Umdrehungen abwechselnd mit grosser und kleiner Geschwindigkeit vollbringen soll.

Viertes Beispiel. Die Kurbelschwinge.

Fig. 9, Tafel XXI. Dieser Mechanismus ist nur ein spezieller Fall des vorhergehenden, nämlich der Fall, wenn die Distanz ε der beiden Axen grösser ist als der Halbmesser r der Kurbel. Dann macht der Hebel c nicht mehr ganze Umdrehungen, sondern er schwingt nur hin und her, mit wechselnder Geschwindigkeit.

Diese Bewegung wird durch nachstehende Formel bestimmt:

$$\frac{\sin(\varphi + \psi)}{\sin \psi} = \frac{\varepsilon}{r}$$

daraus folgt:

$$\operatorname{cotg} \psi = \frac{\varepsilon}{r \sin \varphi} - \operatorname{cotg} \varphi$$

oder auch:

$$\operatorname{cotg} \psi = \frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{\varepsilon}{r} - \text{sos } \varphi \right)$$

Aus diesem letzteren Ausdruck ersieht man, das ψ nur in dem

Falle jeden zwischen 0 und 360° liegenden Werth annehmen kann, wenn $\varepsilon < r$, also nur im Fall der Kurbelschleife, nicht aber im Fall der Schwinge.

Fünftes Beispiel. Die maskirte Kurbelschleife.

Aeusserlich ist diese Anordnung, Fig. 10, Tafel XXI., sehr verschieden von der vorhergehenden, der Wirkung nach aber nicht. a ist eine unbewegliche kreisrunde Scheibe, um welche sich ein Zahnrad d dreht. b ist eine gegen a excentrische Drehungsaxe, die mit einer Schleifenkurbel e versehen ist. c ist ein in dem Radkörper d angebrachter Zapfen mit einem Gleitstückchen, das in der Schleife e aus- und eingleiten kann. Wird nun d mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht, so wird durch den Zapfen c die Schleife e mit herumgenommen, und schleift dabei das Gleitstückchen in der Schleife aus und ein, was zur Folge hat, dass die Axe b eine periodisch drehende Bewegung erhält. Diese Einrichtung ist zwar complizirt, gewährt aber den Vortheil, dass die Axe b nach beiden Seiten fortgesetzt werden kann.

Sechstes Beispiel. Verbindung mehrerer Axen mit Kurbeln.

Fig. 11, Tafel XXI. a, b, c, d sind vier parallele mit Kurbeln e, *f*, g, h versehene Axen. i i ein steifer Winkelhebel, der mit seinem Scheitelpunkt an den Zapfen der Kurbel e gesteckt ist, und mit seinen Enden die Zapfen der Kurbeln *f* und g anfasst. l und k sind zwei Stängelchen, durch welche die Zapfen der Kurbeln *f*, g, h zusammengehängt sind. Wird die Axe a gleichförmig gedreht, so entstehen auch in den drei anderen Axen b, c, d gleichförmige Drehungen. Es ist selbstverständlich, dass man auf ähnliche Weise eine beliebige Anzahl von parallelen Axen von einer Axe aus bewegen kann. Dieser Mechanismus leistet gute Dienste bei Schützenaufzügen von Turbinen.

Das Universalgelenk oder der Hook'sche Schlüssel.

Fig. 12, Tafel XXI. Dieser Mechanismus gehört zu den sinnreichsten Elementen der Mechanik und leistet vortreffliche Dienste, wenn zwei Axen in Verbindung gesetzt werden sollen, die ihre gegenseitige Lage ändern. a und b sind zwei unter einem kleinen sonst beliebigen Winkel gegen einander geneigte Axen, deren Richtungen sich schneiden. c d sind zwei mit diesen Axen verbundene Gabeln. e ist ein die Gabelenden verbindendes Kreuz. Wird a gedreht und zwar gleichförmig, so entsteht in b eine periodisch un-

gleichförmige Drehung, die auf folgende Weise bestimmt werden kann. Es sei, Fig. 13, Tafel XXI., f g k h der auf a senkrechte Kreis, welchen die Endpunkte f und k der Gabel c beschreiben, wenn sich die Axe a dreht. g l h i der auf b senkrechte Kreis, den die Endpunkte g und h bei einer Drehung von b beschreiben. Der Neigungswinkel der beiden Ebenen f g k h und g l h i ist gleich dem Winkel, den die Axen a und b bilden. Wird a gedreht, so dass f nach f_1 kommt, so gelangt gleichzeitig g nach einem gewissen Punkt g_1 des Kreises g l h i, und da bei diesen Drehungen die Kreuzlinien immer gegen einander senkrecht bleiben, so muss der Winkel f_1 o g_1 ein rechter sein. Die Winkel $f \, o \, f_1 = \varphi$ und $g \, o \, g_1 = \psi$, um welche sich gleichzeitig die Axen a und b drehen, ergeben sich demnach, wenn man einen rechten Winkel an zwei Ebenen, deren Neigung gleich ist dem Winkel, welchen die Axen a und b bilden, so fortgleiten lässt, dass der Winkelpunkt stets in einem Durchschnittspunkt der Ebenen und jeder der beiden Schenkel in einer der beiden Ebenen bleibt.

Hierauf gründet sich zur Auffindung der zusammengehörigen Drehungswinkel folgendes construktive Verfahren.

Man zeichne, Fig. 14, Tafel XXI., den Neigungswinkel $A O B = \alpha$ der Axen oder der Ebenen der Bewegungskreise. Zeichne einen beliebigen Winkel $C O B = f \, o \, f_1 = \varphi$, fälle von einem beliebigen Punkt E den Perpendikel E F, beschreibe den Bogen F G, fälle G K, ziehe E J parallel O B und verbinde den Durchschnittspunkt H mit O, so ist $H O B = g \, o \, g_1 = \psi$. Wiederholt man diese Construktion, indem man mehrere Linien wie O C annimmt, so erhält man eine Reihenfolge von zusammengehörigen Werthen von φ und ψ, und zeigt sich dann augenscheinlich Folgendes: Im ersten Quadranten (also wenn $\varphi < 90^0$ ist) ist ψ grösser als φ, eilt also die Axe b der Axe a voraus, und die Differenz zwischen φ und ψ wird am grössten, wenn φ ungefähr gleich 45^0. Bei $\varphi = 90^0$ ist auch $\psi = 90^0$. Im zweiten Quadranten ist $\varphi > \psi$, bleibt also die zweite Axe gegen die erste zurück, und die Differenz $\varphi - \psi$ wird bei φ ungefähr gleich $90^0 + 45^0$, am grössten aber bei $\varphi = 180^0$ wird auch $\psi = 180^0$. Die Bewegungen im dritten und vierten Quadranten stimmen mit denen im ersten und zweiten Quadranten überein.

Die zwischen φ und ψ bestehenden Beziehungen können auch leicht analytisch ausgedrückt werden. Es ist, Fig. 14, Tafel XXI., wenn wir $O E = x$ setzen: $O F = O G = x \cos \varphi$, $E F = x \sin \varphi$, $O L = x \cos \varphi \cos \alpha = O H \cos \psi$. $L H = F E = x \sin \varphi = O H \sin \psi$. Eliminirt man aus diesen zwei Gleichungen $\overline{OH}$, so findet man:

$$\operatorname{cotg} \psi = \operatorname{cotg} \varphi \cos \alpha$$

oder:

$$\tan \varphi = \tan \psi \cos \alpha$$

Es ist sehr zu bedauern, dass dieses Universalgelenk für eine allgemeine Anordnung zu kostspielig ist, sonst würde es unstreitig jeder andern Wellenkupplung vorzuziehen sein, und überhaupt in sehr vielen Fällen angewendet werden.

Hin- und Hergang.

„Hin- und Hergang“ nennen wir jeden Mechanismus, der zur Verwandlung einer rotirenden Bewegung in eine hin- und hergehende, oder zu einer umgekehrten Verwandlung dient. Diese Mechanismen spielen im Maschinenwesen eine wichtige Rolle und es gibt deren sehr viele, aber doch nur wenig allgemein anwendbare. Die beachtenswertheren von diesen Mechanismen sind folgende.

Die Sinus- oder Sinus-Versus-Bewegung.

Fig. 15, Tafel XXI. a ist eine in Führungen b b laufende, mit einer Schleife c versehene Stange. d eine gewöhnliche Kurbel, an deren Zapfen ein Gleitstückchen gesteckt ist, das in der Schleife c hin- und hergleiten kann. Wird die Axe der Kurbel gleichförmig gedreht, so oscillirt die Stange a mit periodischer Geschwindigkeit auf und ab.

Nennt man r den Halbmesser der Kurbel, x den Weg, den die Stange nach aufwärts zurücklegt, während die Kurbel aus der horizontalen Stellung um einen Winkel φ nach aufwärts abgelenkt wird, so hat man, wie ein Blick auf die Figur zeigt,

$$x = r \sin \varphi$$

Die Weglängen der Stange a representiren also die Sinuse der Drehungswinkel der Kurbelaxe. Diese Bewegung ist die einfachste Schwingung, auf welche die meisten in der Natur vorkommenden Schwingungen zurückgeführt werden können. Diese Anordnung ist der compendiöseste Mechanismus zur Verwandlung einer rotirenden Bewegung in eine periodisch hin- und hergehende, und kann zur Uebertragung von schwächeren Kräften wohl gebraucht werden, wenn das Sinusgesetz der Natur der Sache nicht widerspricht. Zur Uebertragung stärkerer Kräfte ist jedoch dieser Mechanismus wegen der beträchtlichen Reibung des Gleitstückes in der Schleife nicht wohl zu verwenden.

Sinus-Bewegung mit Excentrum.

Fig. 16, Tafel XXI. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass statt einer Kurbel eine excentrische Scheibe angewendet ist. Die Bewegung, welche in der Stange entsteht, ist identisch mit jener, welche der vorhergehende Mechanismus hervorbringt, wenn die Excentricität ε gleich ist dem Kurbelhalbmesser der vorhergehenden Vorrichtung. Diese Excentrik-Bewegung verursacht noch mehr Reibung als der Kurbelmechanismus, gewährt jedoch den Vortheil, dass die Axe nach beiden Seiten ohne Unterbrechung oder Krümmung fortgesetzt werden kann.

Excentrum mit veränderlicher Excentricität.

Fig. 17, Tafel XXI. a ist eine Axe, b eine damit verbundene excentrische Scheibe. c eine zweite um b drehbare aber mit b feststellbare excentrische Scheibe. g ein die Scheibe c umfassender, in eine Stange h übergehender Zaum. i eine in Lagern auf- und abschleifende Stange, die durch h bewegt wird. Wird c gegen b festgestellt und a gedreht, so wirkt der Mechanismus wie eine Kurbel, deren Halbmesser gleich a f ist. Nennt man a c $= \varepsilon$ die Excentricität der Scneibe b gegen a. c $f = \varepsilon_1$ die Excentricität der Scheibe c gegen b. $\widehat{c\,a\,f} = \varphi$ den Winkel, um welchen c gegen b verstellt ist, so hat man:

$$\overline{af} = \varepsilon \cos \varphi + \varepsilon_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right)^2 \sin^2 \varphi}$$

Für $\varphi = 0$ und $\varphi = 180^0$ fallen die drei Punkte a, c, f in eine gerade Linie und es wird für $\varphi = 0$, $\overline{af} = \varepsilon_1 + \varepsilon$, für $\varphi = 180^0$, $\overline{af} = \varepsilon_1 - \varepsilon$. Durch die Verstellung der Scheibe c gegen b kann also die Bewegungslänge der Stange i innerhalb der Grenzen $2(\varepsilon_1 - \varepsilon)$ und $2(\varepsilon_1 + \varepsilon)$ verändert werden. Die Wirkungen dieses für die Ausführung complizirten Mechanismus stimmen also mit der einer Kurbel von veränderlichem Halbmesser überein. Praktisch anwendbar ist diese Anordnung nur dann, wenn die Welle a nicht unterbrochen werden darf.

Das Planetenrad.

Fig. 18, Tafel XXI. b ist ein mit einer Axe a verbundenes Stirnrad, c ein zweites Stirnrad von der Grösse von b. Es ist mit einer

Stange e so verbunden, dass es seine relative Lage gegen dieselbe nicht ändern kann, und die Axe von c ist vermittelst einer Stange d an die Axe von a gehängt, so dass sich die Entfernung der Mittelpunkte der Räder b und c nicht ändern kann. Die Schubstange e ist mit der Stange *f*, die auf und ab bewegt werden soll, zusammengegliedert. Das Bewegungsgesetz dieser Anordnung lässt sich in folgender Weise bestimmen.

Wenn das Rad c seine Lage gegen d nicht änderte, würde das Rad b und die Axe a um einen Winkel g a h $= \varphi$ gedreht, während das Gehänge d aus der vertikalen Stellung in diejenige übergeht, die in der Zeichnung dargestellt ist. Allein während der Winkel φ beschrieben wird, wird das Rad c durch die Stange e um den Winkel ψ gedreht, wodurch das Rad b abermals um ψ fortrückt. Die ganze Drehung des Rades b beträgt daher $\varphi + \psi = \varphi + \varphi + \Theta = 2\,\varphi + \Theta$, denn es ist $\psi = \Theta + \varphi$. Nennt man r den Halbmesser eines der Räder c und b und l die Länge der Stange e, so ist, wie die Figur lehrt:

$$\sin \Theta = \frac{2\,r}{l} \sin \varphi$$

oder

$$\Theta = \text{Arc} \sin \left(\frac{2\,r}{l} \sin \varphi \right)$$

Der Winkel ω, um welchen das Rad b gedreht wird, während der Winkel φ beschrieben wird, ist demnach:

$$\omega = 2\,\varphi + \Theta = 2\,\varphi + \text{Arc} \sin \left(\frac{2\,r}{l} \sin \varphi \right) \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Für $\varphi = 2\,\pi$, d. h. bei einer Umdrehung von d oder bei einem Auf- und Niedergang von *f* wird $\omega = 2 \times 2\,\pi$. Die Axe a macht mithin zwei Umdrehungen, während die Stange *f* einmal auf und nieder geht.

Auch dieser von *Watt* ausgedachte sinnreiche Mechanismus ist wegen seiner Zusammengesetztheit von keinem praktischen Werth.

Hypocycloidischer Hin- und Hergang.

Fig. 19, Tafel XXI. a ist ein unbeweglicher Ring mit innerer Verzahnung. b ein Stirnrädchen, dessen Durchmesser gleich ist dem Halbmesser von a. Seine Zähne greifen in die innere Verzahnung von a ein und es dreht sich frei auf dem Zapfen einer Kurbel c, deren Halb-

messer gleich ist dem Halbmesser von b und die an einer mit a concentrisch gelagerten Axe f befestigt ist. In dem Durchschnittspunkt g des vertikalen Durchmessers mit dem Theilriss von b ist an den Körper des Rades b ein Zapfen angebracht und in denselben eine vertikale Stange k eingehängt, die oben bei h geführt wird.

Wird die Axe f gedreht, so nimmt die Kurbel c das Rad b mit sich fort. Dieses bleibt mit seinen Zähnen an den Zähnen des Ringes hängen, was zur Folge hat, dass es in dem Ring herumrollt, und dabei bewegt sich der Zapfen g und mit ihm auch die Stange k längs des vertikalen Durchmessers von a auf und ab. Auch dieser Mechanismus ist nur ein sinnreiches Spielwerk und von keinem praktischen Werth.

Hin- und Hergang mit zwei Kurbeln.

Fig. 20, Tafel XXI. $a\ a_1$ sind zwei mit gleichen Rädern $b\ b_1$ versehene Axen. Die Zähne dieser Räder greifen in einander ein und an den Körpern der Räder sind Kurbelzapfen angebracht. $c\ c_1$ sind zwei Schubstangen. Sie umfassen mit ihren unteren Enden die Kurbelzapfen und sind oben in den Enden einer Traverse d eingehängt. Diese letztere befindet sich an der Stange e, die auf und ab bewegt werden soll.

Werden die Kurbeln aus der horizontalen Lage um einen Winkel φ gedreht und nennt man x den Weg, den gleichzeitig ein Punkt der Stange e nach aufwärts zurücklegt, so findet man leicht, dass

$$x = r \sin \varphi + l \left[\sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2 \cos^2 \varphi} - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2} \right]$$

Das Bewegungsgesetz ist also nicht das reine Sinusgesetz, sondern weicht von demselben etwas ab, und zwar um so mehr, je kürzer die Schubstangen im Verhältniss zu den Kurbeln sind.

Die Interferenz-Bewegung.

Fig. 1, Tafel XXII. Dieser Mechanismus unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass die Räder und die Kurbeln ungleich gross sind.

Nennt man m und m_1 die Anzahl der Zähne der Räder, $r\ r_1$ die Kurbelhalbmesser, x den Weg, den die Stange nach aufwärts zurücklegt, wenn das Rad b um einen Winkel φ nach der Richtung des Pfeiles gedreht wird, so ergibt sich x auf folgende Weise.

Um Complikationen zu vermeiden, die von keinem praktischen Werth sind, wollen wir die Rechnung so machen, wie wenn die Schubstangen unendlich lang wären. Dann stimmen die Vertikalbewegungen der Endpunkte von d mit den Vertikalbewegungen der Kurbelzapfen überein. Bei einer Drehung des Rades b um einen Winkel φ beträgt die Vertikalbewegung des Kurbelzapfens $r \sin \varphi$. Wenn sich b um φ dreht, macht gleichzeitig b_1 eine Wendung um einen Winkel $\varphi \frac{m}{m_1}$, beträgt demnach die Vertikalbewegung des Kurbelzapfens von b_1 $r_1 \sin \left(\frac{m}{m_1} \varphi\right)$. Weil nun die Bewegung von e halb so gross ist als die Bewegung der Endpunkte von d, so hat man:

$$x = \frac{1}{2} \left[r \sin \varphi + r_1 \sin \left(\frac{m}{m_1} \varphi\right) \right]$$

Es werden also durch diesen Mechanismus zwei Sinusschwingungen addirt oder subtrahirt, je nachdem die beiden Sinuse gleiche oder ungleiche Zeichen haben, oder es wird eine Bewegung hervorgebracht ähnlich derjenigen, auf welcher die Interferenzerscheinungen des Lichtes beruhen.

Krummlinige Schwingungen.

Wird ein Punkt durch zwei Ursachen angeregt nach zwei aufeinander senkrechten Richtungen geradlinig zu schwingen, so entsteht in demselben eine krummlinige Schwingung. Diese Zusammensetzung von krummlinigen Schwingungen aus geradlinigen kann durch folgenden Mechanismus hervorgebracht werden. Fig. 2, Tafel XXII. a a_1 zwei Axen. c c_1 zwei Kurbeln. b b_1 zwei Zahnräder. e e_1 zwei Schubstangen. f ein Balancier. g eine Verbindungsstange zwischen f und e. Eine Drehung von a bewirkt durch c und e eine Horizontalschwingung von m, bewirkt aber durch b b_1 c_1 e_1 f g gleichzeitig eine Vertikalschwingung von m. Daher macht dieser Punkt eine krummlinige Schwingung, die aus zwei geradlinigen unter rechtem Winkel erfolgenden Schwingungen zusammengesetzt wird.

Nennen wir r r_1 die Halbmesser der Kurbeln c und c_1, α und α_1 die Winkel, welche die Kurbelrichtungen mit der vertikalen und mit der horizontalen Richtung in dem Moment bilden, wenn die Bewegung des Mechanismus beginnt, und nehmen wir an, die Bewegung werde vermittelst eines Rades b_2 veranlasst und es sei das Verhältniss der Halbmesser der Räder b_2 und b wie n : 1, dagegen

das Verhältniss der Halbmesser der Räder b_2 und b_1 wie $n_1 : 1$, dann sind $\alpha + n\,\varphi$, $\alpha_1 + n_1\,\varphi$ die Winkel, welche die Kurbeln mit der Vertikal- und mit der Horizontalrichtung bilden, wenn das Rad b_2 um den Winkel φ gedreht worden ist.

Nimmt man als Anfangspunkt der Coordinaten diejenige Position des Punktes m, nach welcher er geführt wird, wenn die Kurbel c vertikal und die Kurbel c_1 horizontal steht, so ist:

$$\left.\begin{array}{l} x = r \sin(\alpha + n\,\varphi) \\ y = r_1 \sin(\alpha_1 + n_1\,\varphi) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Durch Elimination von φ aus diesen zwei Gleichungen ergibt sich die Gleichung der Bahn von m. Diese Elimination kann auf folgende Weise geschehen.

Setzt man:

$$\alpha + n\,\varphi = \psi, \quad \alpha_1 + n_1\,\varphi = \psi \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(\alpha + n\,\varphi) = \sin\psi = \dfrac{x}{r}, \quad \cos\psi = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{r}\right)^2} \\ \sin(\alpha_1 + n_1\,\varphi) = \sin\psi_1 = \dfrac{y}{r_1}, \quad \cos\psi_1 = \sqrt{1 - \left(\dfrac{y}{r_1}\right)^2} \end{array}\right\} \quad . \quad (3)$$

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen (2) folgt:

$$n_1\,\alpha - n\,\alpha_1 = n_1\,\psi - n\,\psi_1$$

oder:

$$n\,\psi_1 = n_1\,\psi - (n_1\,\alpha - n\,\alpha_1)$$

demnach ist:

$$\sin n\,\psi_1 = \sin n_1\,\psi \cos(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1) - \cos n_1\,\psi \sin(n_1\,\alpha - n\,\alpha_1). \quad (4)$$

Nun ist bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{l} \sin n\,\psi_1 = \binom{n}{1} \sin\psi_1 (\cos\psi_1)^{n-1} - \binom{n}{3} (\sin\psi_1)^3 (\cos\psi_1)^{n-3} + \ldots \\ \sin n_1\,\psi = \binom{n_1}{1} \sin\psi (\cos\psi)^{n_1-1} - \binom{n_1}{3} (\sin\psi)^3 (\cos\psi)^{n_1-3} + \ldots \\ \cos n_1\,\psi = (\cos\psi)^{n_1} - \binom{n_1}{2} (\sin\psi)^2 (\cos\psi)^{n_1-2} + \binom{n_1}{4} (\sin\psi)^4 (\cos\psi)^{n_1-4} \end{array}\right\} (5)$$

wobei die Symbole $\binom{n}{1}$ $\binom{n}{2}$ $\binom{n_1}{1}$ $\binom{n_1}{2}$ die Binomial-

Coeffizienten bedeuten. Setzt man für $\sin\psi$, $\cos\psi$, $\sin\psi_1$ $\cos\psi_1$ die Werthe, welche die Gleichungen (3) darbieten und substituirt die sich für $\sin n\psi_1$, $\sin n_1\psi$, $\cos n_1\psi$ ergebenden Reihen in die Gleichung (4), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\binom{n}{1}\frac{y}{r_1}Y^{n-1}-\binom{n}{3}\left(\frac{y}{r_1}\right)^3 Y^{n-3}+\binom{n}{5}\left(\frac{y}{r_1}\right)^5 Y^{n-5}-\ldots\ldots= \\ &+\cos(n_1\alpha-n\alpha_1)\left[\binom{n_1}{1}\left(\frac{x}{r}\right)X^{n_1-1}-\binom{n_1}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^3 X^{n_1-3}+\ldots\ldots\right] \\ &-\sin(n_1\alpha-n\alpha_1)\left[X^{n_1}-\binom{n_1}{2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 X^{n_1-2}+\binom{n_1}{4}\left(\frac{x}{r}\right)^4 X^{n_1-4}-\ldots\right] \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wobei zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2}=Y,\ \sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}=X, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Reihen brechen ab, wenn n und n_1 ganze Zahlen sind, und dies muss immer der Fall sein, wenn die Axen a und a_1 durch Zahnräder verbunden sind. Aber wenn die Reihen abbrechen, ist die durch (6) ausgedrückte Kurve eine algebraische und mithin geschlossen in sich selbst zurückkehrend.

Wir wollen einige spezielle Fälle betrachten.

Es sei
$$n = n_1 = 1$$

Dies ist der Fall, wenn die Räder b und b_1 gleich gross sind, wenn also gleich viel Horizontal- und Vertikalschwingungen entstehen. Dann gibt die Gleichung (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(\alpha - \alpha_1)\frac{x}{r} - \sin(x - \alpha_1)\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad \ldots \quad (8)$$

dies ist aber die Gleichung einer Ellypse.

Ist überdies $\alpha = \alpha_1$, so wird

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dies ist aber eine schiefe gerade Linie.

Ist $\alpha = 0$, α_1 aber von Null verschieden, so wird aus (7):

$$\frac{y}{r_1} = \cos\alpha_1 \frac{x}{r} + \sin\alpha_1 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Ist $\alpha_1 = 90^0$, so wird dieser Ausdruck:

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Die Schwingung erfolgt also in einer Ellypse, deren Axen horizontal und vertikal gerichtet sind. Die vertikale Halbaxe ist r_1, die horizontale Halbaxe r. Ist $r = r_1$, so wird (11) ein Kreis.

Es sei ferner $n = 1$, $n_1 = 2$, in welchem Falle während einer Horizontalschwingung zwei Vertikalschwingungen geschehen. Dann gibt die Gleichung (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(2\alpha - \alpha_1) \left[2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]$$
$$- \sin(2\alpha - \alpha_1) \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

oder

$$\frac{y}{r_1} = 2\cos(2\alpha - \alpha_1) \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2} - \sin(2\alpha - \alpha_1) \left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (12)$$

dies ist eine algebraische Linie der vierten Ordnung. Ist überdies $\alpha = \alpha_1 = 0$, also auch $2\alpha - \alpha_1 = 0$, so wird:

$$\frac{y}{r_1} = 2 \frac{x}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}$$

oder

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 = 4\left(\frac{x}{r}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Für $n = 1$, $n_1 = 3$ (Octave und Quinte) folgt aus (6):

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1) \left\{ 3\left(\frac{x}{r}\right) \left[1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2\right] - \left(\frac{x}{r}\right)^3 \right\}$$
$$- \sin(3\alpha - \alpha_1) \left\{ \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right] \right\}$$

oder:

$$\frac{y}{r_1} = \cos(3\alpha - \alpha_1)\frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$- \sin(3\alpha - \alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese Gleichung wird wiederum am einfachsten, wenn $3\alpha - \alpha_1 = 0$ ist, und nimmt dann die Form an

$$\frac{y}{r_1} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

stellt also eine algebraische Linie der dritten Ordnung dar.

Ist dagegen $3\alpha - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\frac{y}{r_1} = -\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 2\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

die Bahn ist demnach in diesem Falle eine algebraische Linie der sechsten Ordnung.

Für $n = 2$, $n_1 = 3$ (Grundton und Quinte) gibt die Gleichung (6)

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2}$$

$$= \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{3\left(\frac{x}{r}\right)\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^3\right\}$$

$$- \sin(3\alpha - 2\alpha_1)\left\{\left[\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right]^3 - 3\left(\frac{x}{r}\right)^2\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\right\}$$

oder:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \cos(3\alpha - 2\alpha_1)\left(\frac{x}{r}\right)\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right]$$

$$- \sin(3\alpha - 2\alpha_1)\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Ist überdies $3\alpha - 2\alpha_1 = 0$, so wird:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = \frac{x}{r}\left[3 - 4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ist dagegen $3\alpha - 2\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$2\left(\frac{y}{r_1}\right)\sqrt{1-\left(\frac{y}{r_1}\right)^2} = -\sqrt{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}\left[1-4\left(\frac{x}{r}\right)^2\right] \quad (19)$$

die Gleichungen (17), (18), (19) sind Linien der sechsten Ordnung.

Eine vollständige analytische Interpretation der Gleichung (6) würde zu endlosen Rechnungen und Untersuchungen führen, muss also unterlassen werden, und zwar um so mehr, als durch graphische Darstellungen die Beschaffenheit der Kurven so leicht und so klar vor Augen gestellt werden kann.

Man verzeichne ein Rechteck a b c d, Fig. 3, Tafel XXII., so dass $ab = 2r$, $ac = 2r_1$ ist, beschreibe über ab und ac Halbkreise, theile dieselben in gleiche Theile und zwar den Halbkreis aeb in n_1, den Halbkreis afc dagegen in n Theile. Ziehe durch die Theilungspunkte Horizontal- und Vertikallinien, so gibt eine geeignete Verbindung der Durchschnittspunkte die Gestalt der Bahn des Punktes m. In obiger Figur ist z. B. der Halbkreis aeb in 6, der Halbkreis afc in 12 gleiche Theile getheilt, d. h. es ist $\frac{n}{n_1} = \frac{12}{6}$, oder auf eine Vertikalschwingung erfolgen zwei Horizontalschwingungen. Ist $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, so ist offenbar m die Anfangsposition des beschreibenden Punktes und die Bahn ist in diesem Falle die Parabel amc.

Die Schubdublirung.

Fig. 4, Tafel XXII. a ist eine Kurbel, b eine Schubstange, c eine in Führungen schleifende Stange, die von der Schubstange hin und hergezogen wird, d ist ein Stirnrad, das sich um einen Zapfen dreht, der mit der Gliederung von c und b zusammenfällt, e ist eine am Gestell angebrachte unbewegliche Zahnstange, f ist eine in Führungen hin und her schleifende, mit einer Verzahnung versehene Stange, d greift mit seinen Zähnen oben in f, unten in e ein. Es ist klar, dass die Bewegung von f doppelt so gross ist als die Bewegung von c.

Herzbewegungen.

Die Kurbeln können zur Verwandlung einer drehenden Bewegung in eine hin und her gehende nicht angewendet werden, wenn diese letztere nicht nach dem Sinusgesetz, sondern nach irgend einem andern Gesetz erfolgen soll. In diesem Fall muss man soge-

nannte Herzbewegungen anwenden, durch welche es möglich wird, jede beliebige stetige oder unstetige Bewegung hervorzubringen. Sie sind für Hin- und Herbewegungen, was die unrunden Räder und die Konusbewegung für die Rotation, spielen in der Construktion von feineren Arbeitsmaschinen eine äusserst wichtige Rolle, verursachen jedoch beträchtliche Reibungen und fallen für grössere Bewegungen sehr gross aus, können deshalb zur Uebertragung von stärkeren Kräften nicht gebraucht werden.

Einige Beispiele werden genügen, um die Construktion solcher Herze zu verstehen.

Das Herz für eine gleichförmige Bewegung.

Fig. 5, Tafel XXII. a ist eine mit einer herzförmigen Scheibe c verbundene Axe. b ein am Ende einer Stange d befindliches die Scheibe c berührendes Röllchen. Die Stange ist durch Führungen so gehalten, dass sie sich nur vertikal auf und nieder bewegen kann. Eine Drehung von c bewirkt selbstverständlich diese Bewegung der Stange d. Die punktirte Linie ist eine äquidistante Linie zur Scheibenlinie. Soll die Bewegung der Stange d mit unveränderlicher Geschwindigkeit geschehen, so müssen die Radienvektoren der punktirten Linie proportional mit dem Wendungswinkel φ wachsen, muss also sein:

$$\overline{\mathrm{am}} = \varrho = \alpha + \beta\,\varphi$$

wobei α und β Constante sind. Nennt man h die ganze Erhebungshöhe, so muss sein für $\varphi = \pi$, $\varrho = \alpha + \mathrm{h}$, demnach: $\alpha + \mathrm{h} = \alpha + \beta\,\pi$, oder $\beta = \frac{\mathrm{h}}{\pi}$, demnach:

$$\varrho = \alpha + \mathrm{h}\,\frac{\varphi}{\pi}$$

Der kleinste Radiusvektor α ist in geometrischer Hinsicht ganz willkürlich, in praktischer Hinsicht aber nicht; er soll im Verhältniss zu h sehr gross gemacht werden, damit das Röllchen durch die Scheibe möglichst wenig zur Seite gedrückt wird. Die Linie für den Niedergang ist in dem vorliegenden Beispiel wie die für den Hub. Hub und Niedergang erfolgen also hier nach dem gleichen Gesetz.

Herz für Sinusversus-Bewegung.

Fig. 6, Tafel XXII. a ist eine mit zwei Röllchen b b_1 versehene Stange, die durch zwei Führungen in vertikaler Richtung erhalten

wird. c eine Axe mit einem Herz d. Die Begrenzungslinie desselben ist die Aequidistante einer in der Zeichnung punktirt angedeuteten Linie, deren Polargleichung ist:

$$\varrho = \varrho_0 + r \text{ sin vers } \varphi$$

dabei ist $\varrho_0 = \overline{bc}$ gleich der Entfernung des Rollenmittelpunktes b von der Drehungsaxe c des Herzes; 2 r die ganze Erhebungshöhe der Stange. c m $= \varrho$ der Radiusvektor eines Punktes m der Kurve. $\widehat{bcm} = \varphi$ der entsprechende Polarwinkel. Es ist selbstverständlich, dass man bei Construktion der Kurve die Werthe der Sinusversus construirt und nicht berechnet oder aus Tabellen aufträgt. Diese Kurve gehört zu denjenigen, bei welchen die Summe zweier diametral gegenüber gerichteten Radienvektoren einen constanten Werth hat, in welchem Falle die Stange mit zwei Röllchen versehen werden kann, die mit der Scheibe stets in Berührung bleiben. Die Anwendung zweier Röllchen gewährt den Vortheil, dass die Stange durch das Herz sowohl nach der einen wie nach der andern Richtung bewegt werden kann.

Zwei Röllchen sind in allen Fällen anwendbar, in welchen die Bewegungsgesetze des Hinganges und des Herganges übereinstimmen.

In rein geometrischer Hinsicht ist ϱ_0 willkürlich, in praktischer Hinsicht aber nicht, sondern es soll ϱ_0 gegen 2 r gross gemacht werden, so dass die Scheibe von einem Kreis nur wenig abweicht.

Bezeichnet man irgend ein Bewegungsgesetz mit $f(\varphi)$, so muss die Scheibe nach der Aequidistanten einer Kurve verzeichnet werden, deren Polargleichung ist:

$$\varrho = \varrho_0 + f(\varphi)$$

Durch Herze können auch unstete Hin- und Herbewegungen hervorgebracht werden, wie folgende Beispiele zeigen.

Das Bogendreieck.

Fig. 7, Tafel XXII. b c d ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seiten aus den Winkelpunkten beschrieben sind. Jede Seite entspricht also einem Centriwinkel von 60°. Dieses Dreieck ist an eine runde Scheibe a so befestigt, dass der Eckpunkt b mit dem Mittelpunkt zusammenfällt und die Scheibe a befindet sich an einer Welle, deren geometrische Axe durch b geht. Eine Drehung der Scheibe a hat also zur Folge, dass sich das Dreieck um eine durch b gehende Axe

dreht. e ist ein Rahmen, dessen Höhe gleich ist jener des Dreieckes, und dessen Weite etwas grösser ist als die doppelte Höhe des Dreieckes. Der Rahmen ist mit zwei in Lagern schleifenden Stielen ff versehen, welche auf den zu bewegenden Körper einwirken.

Rechnen wir die Bewegung des Dreiecks von der in Fig. 8, Tafel XXII. verzeichneten Stellung an, d. h. von dem Augenblick an, in welchem der Punkt d vertikal oberhalb b steht, so findet Folgendes statt:

Bewegung der Axe. von	bis	Zustand der Stange.
0°	60°	Stillstand,
60°	180°	Niedergang,
180°	240°	Stillstand,
240°	360°	Erhebung.

Der Niedergang wie die Erhebung geschehen nach zweierlei Gesetzen. Das eine Gesetz findet statt, so lange eine Dreiecksseite gegen den Rahmen drückt, das andere, während eine Ecke des Dreiecks einwirkt. Das Dreieck kann zu Dampfmaschinen-Schieber-Steuerungen gut gebraucht werden.

Herz für Expansions-Steuerungen.

Fig. 9, Tafel XXII. Dieses Herz ist so gebildet, dass der Radiusvektor durch den Winkel α um eine gewisse Länge a wächst, durch den Winkel β constant bleibt, durch den Winkel γ um 2 a wächst, durch den Winkel δ constant bleibt, durch $\alpha_1 = \alpha$ um a abnimmt, durch $\beta_1 = \beta$ constant bleibt, durch $\gamma_1 = \gamma$ um 2 a abnimmt, endlich durch $\delta_1 = \delta$ constant bleibt. Daher hat man:

Bewegung des Herzes um die Winkel:	Zustand der Stange:
α	Erhebung um a,
β	Stillstand,
γ	Erhebung um 2 a,
δ	Stillstand,
α_1	Niedergang um a,
β_1	Stillstand,
γ_1	Niedergang um 2 a,
δ_1	Stillstand.

Die Balancier-Mechanismen.

Die Verwandlung einer geradlinig hin und her gehenden Bewegung in eine drehende kann auch bewerkstelligt werden indem man zunächst eine drehende Schwingung eines Balanciers hervorbringt und diese dann vermittelst Schubstange und Kurbel in eine continuirlich drehende umwandelt. Dabei handelt es sich vorzugsweise um solche Verbindungen der Kolbenstange mit dem Balancierende, dass erstere gerade geführt wird, während letzteres einen Kreisbogen beschreibt. Die Construktion und Berechnung dieser Geradführungen sollen uns nun beschäftigen.

Balancier und Gegenlenker.

Fig. 10, Tafel XXII. $a\,C$ und $o\,c$ sind zwei um C und o drehbare, durch ein Verbindungsstück $a\,c$ zusammenhängende Hebel. In $a\,c$ gibt es einen gewissen Punkt b, der beinahe in einer geraden vertikalen Linie auf und nieder geht, wenn die Hebel um einen nicht zu grossen Winkel aus ihrer mittleren Lage entfernt werden. Dieser Punkt ist daher der Einhängepunkt der Kolbenstange. Wenn von den drei Elementen, 1) $a\,C$ halbe Balancierlänge, 2) $o\,c$ Länge des Gegenlenkers, 3) $\frac{\overline{a\,b}}{b\,c}$ Theilungsverhältniss des Verbindungsstückes, zwei derselben gegeben sind, kann das dritte durch Construktion oder durch Rechnung gefunden werden. Es sei die halbe Balancierlänge und das Theilungsverhältniss gegeben und die Länge des Gegenlenkers zu suchen. Diese Aufgabe kann durch Construktion leicht auf folgende Weise gelöst werden.

Man verzeichne den Balancier in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung ($C\,a_1$, $C\,a$, $C\,a_2$), ziehe die Sehne $a_1\,a_2$, halbire den Abstand $a\,p$, ziehe durch den Halbirungspunkt m eine Vertikallinie $x\,y$ und nehme an, dass sich in derselben der Einhängepunkt der Kolbenstange bewegen soll. Nun zeichne man das Verbindungsstück in seiner höchsten, mittleren und tiefsten Stellung ($a_1\,b_1\,c_1$, $a\,b\,c$, $a_2\,b_2\,c_2$) und zwar so, dass der Einhängepunkt $b_1\;b\;b_2$ in die Linie $x\,y$ fällt. Sucht man endlich den Mittelpunkt o des Kreises, der durch die drei Punkte c_1, c, c_2 gezogen werden kann, so ist $o\,c = o\,c_1 = o\,c_2$ die Länge und o der Drehungspunkt des Gegenlenkers.

Durch diese Gliederung wird nur allein bewirkt, dass der Punkt b in der höchsten, tiefsten und mittleren Position des Balanciers in die Linie x y fällt, nicht aber, dass der Punkt beständig in dieser Linie bleibt. Der Punkt b beschreibt in der That nicht eine gerade Linie, sondern nur das beinahe geradlinige Stück b_1 b_2, Fig. 11, Tafel XXII., einer schleifenförmigen algebraischen Linie der vierten Ordnung.

Aus der Natur der Sache kann man leicht errathen, dass die wahre Bewegung des Punktes b von der geraden vertikalen Linie um so weniger abweicht, 1) je länger der Balancier im Verhältniss zur Hubhöhe, 2) je länger das Verbindungsstück a c. Diese Abweichung fällt bereits ganz unmerklich aus, wenn der Balancier dreimal und das Verbindungsstück $\frac{1}{2}$ mal so lang gemacht wird, als der Kolbenschub.

Die Beziehungen zwischen der Balancierlänge, der Gegenlenkerlänge und dem Theilungsverhältniss können auch durch Rechnung bestimmt werden, was für manche Zwecke nützlich ist.

Nennt man $a C = a$, $a b = b$, $b c = c$, $o c = r$, $\widehat{a_1 C a} = \alpha$, $\widehat{c_1 b_1 y} = \widehat{c b y} = \widehat{c_2 b_2 y} = \varphi$,
ferner: ξ den Horizontalabstand und
υ den Vertikalabstand der Punkte c_1 und c, so ist zunächst:

$$\upsilon^2 = \xi (2 r - \xi)$$

demnach

$$r = \frac{1}{2} \left(\frac{\upsilon^2}{\xi} + \xi \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Nun ist:

Horizontalabstand der Punkte $C c_1 = a \cos \alpha + (b + c) \sin \varphi$

„ „ „ $C c = a - (b + c) \sin \varphi$

Vertikalabstand der Punkte $C c_1 = a \sin \alpha - (b + c) \cos \varphi$

„ „ „ $C c = - (b + c) \cos \varphi$

Daher wird:

Horizontalabstand der Punkte $c c_1 = \xi = 2 (b + c) \sin \varphi - a (1 - \cos \alpha)$

Vertikalabstand der Punkte $c c_1 = \upsilon = a \sin \alpha$

Es ist aber ferner:

$$\overline{am} = \overline{mp} = b \sin \varphi = \frac{1}{2} a (1 - \cos \alpha)$$

demnach

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{a}{b} (1 - \cos \alpha)$$

Führt man diesen Werth in ξ und υ ein, so erhält man:

$$\xi = a \frac{c}{b} (1 - \cos \alpha)$$

$$\upsilon = a \sin \alpha$$

und diese Werthe in (1) eingeführt, findet man:

$$r = \frac{1}{2} \left[a \frac{b}{c} \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} + a \frac{c}{b} (1 - \cos \alpha) \right] \quad . \ . \ . \ (2)$$

Hieraus folgt auch:

$$\frac{b}{c} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \left[\frac{r}{a} + \sqrt{\left(\frac{r}{a}\right)^2 - \sin^2 \alpha} \right] \quad . \ . \ . \ . \ (3)$$

Ist α nicht grösser als ungefähr 20°, so begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man setzt $\sin \alpha = \alpha$, $\cos \alpha = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2$, und dann folgt aus (2):

$$r = a \frac{b}{c} + \frac{1}{4} a \frac{c}{b} \alpha^2$$

Aber hier ist abermals $\frac{1}{4} a \frac{c}{b} \alpha^2$ eine gegen $a \frac{b}{c}$ kleine Grösse, die vernachlässigt werden kann; daher hat man annähernd

$$r = a \frac{b}{c} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Diese Annäherungsformel leistet vorzugsweise in dem Fall gute Dienste, wenn der Drehungspunkt des Gegenlenkers gegeben ist und die Theilung des Verbindungsstückes gesucht werden soll. Ist nämlich der Drehungspunkt gegeben, so kennt man annähernd $a + r$, setzt man $a + r = d$, so folgt aus (4):

$$\frac{b}{c} = \frac{d - a}{a} = \frac{d}{a} - 1$$

Hat man vermittelst dieser einfachen Formel $\frac{b}{c}$ bestimmt, so kann man nach dem früher angegebenen Verfahren den Drehungspunkt und die Länge des Gegenlenkers durch Construktion genauer bestimmen.

Das Watt'sche Parallelogramm für Land-Dampfmaschinen.

Fig. 12, Tafel XXII. Ist A B, B C D, D E eine mit richtigen Verhältnissen construirte Anordnung eines Balanciers A B, mit Gegenlenker D E und Verbindungsstück D C B, so wird die Stange C F geradlinig geführt. Verbindet man mit D eine Stange $D_1 \ldots D_4$ parallel mit $A B_4$, indem man die parallelen Verbindungsstangen $B_1 D_1$, $B_2 D_2$, $B_3 D_3$, $B_4 D_4$ von gleicher Länge anbringt, und hängt in die Punkte C_1, C_2, D_3, C_4, wo diese Verbindungsstangen von der Verlängerung von A C geschnitten werden, Stangen ein, so werden auch diese geradlinig bewegt, denn die Punkte $C_1, C, C_2, D_3, C_4 \ldots$ beschreiben offenbar geometrisch ähnliche, demnach gerade Linien, weil C geradlinig bewegt wird. Dies ist das von *Watt* erfundene Parallelogramm in einer erweiterten Form. Den spezielleren Fall, welchen Watt bei seinen Dampfmaschinen angewendet hat, zeigt Fig. 13, Tafel XXII.

Wenn der Balancier und das Parallelogramm gegeben sind kann auch hier der Drehungspunkt und die Länge des Gegenlenkers sowohl durch Construktion, wie auch durch Rechnung gefunden werden. Durch Construktion kann dies geschehen, indem man den Balancier und das Parallelogramm in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung verzeichnet und dann den Mittelpunkt des Kreises sucht, der durch die drei Positionen des Punktes D geht. Dabei muss man die Position des Punktes D_3 in der vertikalen Linie annehmen, welche die Horizontalablenkung des Punktes B_3 halbirt, ähnlich wie dies bei Fig. 10, Tafel XXII. geschehen ist.

Setzt man $A B_3 = a$, $A B = b$, $D E = r$ und den Winkel, den die höchste und mittlere Position des Balanciers einschliesst, gleich α, so findet man leicht auf ähnliche Weise, wie auf Seite 372

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{a-b}\,\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} + (a-b)\,(1-\cos\alpha\right]$$

Ist α so klein, dass man sich erlauben darf $\sin\alpha = \alpha$ und $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ zu setzen, so erhält man:

$$r = \frac{b^2}{a - b} \text{ und } b = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + a\,r}$$

Lässt man in Fig. 12, Tafel XXII. $B_3 D_3$, $B_2 D_2$, $B_1 D_1$ weg, so erhält man eine Anordnung, die mit dem von *Watt* bei Schiffsmaschinen angewendeten Parallelogramm übereinstimmt, aber in umgekehrter Lage gezeichnet erscheint. Auch für diese Anordnung kann der Drehungspunkt und die Länge des Gegenlenkers durch Construktion gefunden werden, wenn man den Balancier sammt Parallelogramm in der höchsten, mittleren und tiefsten Stellung verzeichnet und den Mittelpunkt E des Kreises sucht, der durch die drei Positionen des Punktes D gezogen werden kann.

Durch Rechnung findet man auf eine ähnliche Weise, wie bei dem einfachen Gegenlenker geschehen ist,

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{\frac{c}{d}\,a - b}\;\frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos\alpha} + \left(\frac{c}{d}\,a - b\right)(1 - \cos\alpha)\right]$$

wobei Fig. 12, Tafel XXII.:

$$A B_4 = a,\quad A B = b,\quad B_4 D_4 = c,\quad B_4 C_4 = d,\quad D E = r$$

Diese Formel folgt aus (2) für den einfachen Gegenlenker, wenn man in dieselbe

statt a, b, c setzt: $b,\ d\,\frac{b}{a},\ c - d\,\frac{b}{a}$

Der Balancier ohne Drehungsaxe.

Fig. 14, Tafel XXII. c a ist ein Balancier. Das Ende c gleitet in einer horizontalen Führung hin und her; das Ende a soll nach vertikaler Richtung auf und ab schwingen. b o ist ein um o sich drehender Gegenlenker. Der Drehungspunkt o und die Länge b o des Gegenlenkers ergeben sich durch Construktion, wenn man den Balancier in seiner höchsten Stellung c b a, in seiner mittleren $c_1\ b_1\ a_1$ und in seiner tiefsten $c_2\ b_2\ a_2$ verzeichnet und den Mittelpunkt o des Kreises sucht, der durch die Punkte $b\ b_1\ b_2$ gezogen werden kann. Durch Rechnung ergeben sich die Bedingungen einer richtigen Construktion wie folgt:

Nennt man: $\overline{ca} = a$, $\overline{cb} = b$, $\overline{ob} = r$, $\widehat{aco} = \alpha$. ξ und υ den Horizontal- und Vertikalabstand der Punkte b und b_1, so ist:

$$\overline{c\,c_1} = a\,(1 - \cos\alpha)$$

$$\xi = a\,(1 - \cos\alpha) + b\cos\alpha - b = (a - b)\,(1 - \cos\alpha)$$

$$\upsilon = b\sin\alpha$$

Es ist aber $\upsilon^2 = \xi\,(2\,r - \xi)$,

demnach: $$r = \frac{1}{2}\left(\frac{\upsilon^2}{\xi} + \xi\right)$$

oder wenn man für ξ und υ die gefundenen Werthe einsetzt:

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{b^2}{a-b}\,\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha} + (a-b)\,(1-\cos\alpha)\right]$$

Diese Balanciers mit Parallelogramm und Gegenlenker kommen mehr und mehr ausser Gebrauch. Es sind complizirte und kostspielige Anordnungen, und die vielen zusammengegliederten Stangen geben doch keinen ganz verlässlichen Zusammenhang. Wenn jedoch eine grosse Anzahl von Kolbenstangen geradlinig und mit verschiedener Geschwindigkeit zu bewegen sind, kann man allerdings kaum eine zweckmässigere Einrichtung treffen als das *Watt*'sche Parallelogramm.

Geradführung vermittelst eines schwingenden Hebels

erfunden von dem Ingenieur Herrn *Nehrlich.*

Fig. 15, Tafel XXII. A ist das Ende einer Kolbenstange, das geradlinig geführt werden soll. B ist ein mit zwei Zapfen c und f versehener Hebel, der um O drehbar ist. Das Ende C von A ist schleifenförmig, umfasst das auf den Zapfen c gesteckte Gleitstückchen und ist vermittelst des Stängelchens D durch die Zapfen g und f an den Hebel gehängt. Bei gewissen Abmessungen der einzelnen Theile wird der Punkt g der Schleife beim Hin- und Hergang des Kolbens geradlinig hin und her geführt, doch ist diese Bewegung nur annähernd und nicht mathematisch genau geradlinig.

Diese richtigen Construktionsverhältnisse findet man auf folgende Weise, Fig. 16, Tafel XXII. Man verzeichne den Hebel B in seiner mittleren und in seinen äussersten Stellungen. O f, O f_1, O f_2 sind diese drei Stellungen. Nehme hierauf die Länge des Verbindungsstängelchens f g beliebig an und beschreibe mit dieser Länge als Halbmesser aus f_1 und f_2 als Mittelpunkte die Kreise k_1 und k_2. Ziehe durch g eine auf O f senkrechte Linie in der Art, dass jeder der beiden Kreise k_1 und k_2 in zwei Punkten geschnitten wird. Zieht man endlich durch diese Durchschnittspunkte h_1 g_1 g_2 h_2 Parallellinien zu f O bis die Mittellinien O γ_1 und O γ_2 des Hebels B in c_1, γ_1 und

c_2, γ_2 geschnitten werden, so sind c_2 und γ_2 die Stellen, wo der Führungszapfen c, Fig. 15, anzubringen ist. Bringt man den Zapfen in c_2 an, so erhält der Mechanismus die Einrichtung, welche Fig. 15 zeigt. Bringt man dagegen den Führungszapfen in γ_2 an, so erhält der Mechanismus die Einrichtung, welche Fig. 17 zeigt.

Damit die Kurve, welche der Punkt g des Verbindungsstängelchens $f\,g$, Fig. 16, beim Schwingen des Hebels $o\,f$ beschreibt, von einer geraden Linie nur wenig abweiche, dürfen die Winkel α und β nicht zu gross genommen werden.

Die Rechenbewegung.

Fig. 1, Tafel XXIII. a a ist eine Platte, die in Führungen hin und her gleitet. Sie ist mit einer Rinne b und einer schleifenförmigen Verzahnung c versehen. d ist eine fixe Axe, die gleichförmig gedreht wird. Von ihr gehen zwei Arme e aus, die eine Axe tragen, welche mit einem Getriebe f und mit einem Rade g versehen ist. Das Ende der Axe dringt in die Rinne b ein; das Getriebe f greift in die Verzahnung c ein. Die Axe d ist mit einem Rade h versehen, das in g eingreift. Wird die Axe d gedreht, so pflanzt sich die Bewegung nach g und f fort. Die Zähne von f treiben die Verzahnung c fort, bis die Krümmung der Rinne b an das Ende des Zapfens der Axe von f ankommt, dann geht dieser Zapfen in der Rinne herab, so dass die Theile e f g in die punktirt angedeutete Position e_1 f_1 g_1 kommen, was zur Folge hat, dass nun die Verzahnung c nach entgegengesetzter Richtung bewegt wird.

Dieser Mechanismus ist brauchbar, wenn der Hin- und Hergang mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen muss und die zu übertragende Kraft nicht zu gross ist. Während die Theile e f g ihre Positionen verändern, ist jedoch die Bewegung der Platte nicht eine gleichförmige, sondern Anfangs eine bis zum Stillstand verzögerte und dann eine beschleunigte.

Rechenbewegung mit halbverzahntem Rad.

Fig. 2, Tafel XXIII. a ist ein Rahmen, der in einer Führung auf und ab gleiten kann. Er ist innen ausgeschnitten und an beiden Seiten des Ausschnitts mit einer Verzahnung b b_1 versehen. c ist ein an einer Axe befindliches halbverzahntes Rädchen, dessen Zähne bei einer continuirlich drehenden Bewegung bald in b, bald in b_1 eingreifen, wodurch der Rahmen a auf und nieder bewegt wird.

Wenn die Zähne des Rädchens c die Verzahnung b verlassen, darf der Eingriff in $b_{,}$ noch nicht begonnen haben, weil sonst der Rahmen gleichzeitig nach aufwärts wie nach abwärts getrieben würde, also eine Stockung der Bewegung eintreten müsste. Damit nun der Rahmen auch dann sicher und richtig geführt wird, wenn das Rädchen c nicht einwirkt, ist an der Axe von c ein kurbelförmiger Körper mit einem Taster d und sind an den Enden der Verzahnungen zwei Ansätze e und $e_{,}$ in der Weise angebracht, dass jedesmal, wenn das Rädchen c weder auf b noch auf $b_{,}$ einwirkt, der Taster auf die Ansätze e und $e_{,}$ greift und die Bewegung des Rahmens übernimmt.

Die Begrenzungslinien des Tasters sind die Aequidistanten von der Linie, welche der Mittelpunkt des Tasters relativ gegen die Ebene des Rahmens beschreibt, wenn der erstere eine gleichförmig drehende und letzterer eine gleichförmige Auf- und Abbewegung macht.

Drei halbverzahnte Kegelräder.

Fig. 3, Tafel XXIII. Dies ist ein Mechanismus, durch welchen eine continuirliche Drehung in eine Hin- und Herdrehung verwandelt wird.

a ist ein halbverzahntes Rad. b, c sind zwei an einer Axe e e befestigte halbverzahnte Räder. Wird a continuirlich gedreht, so greift seine halbe Verzahnung abwechselnd in b und c ein, wodurch in der Axe e e eine Hin- und Herdrehung hervorgebracht wird. Auch bei diesem Mechanismus ist eine Hilfseinrichtung nothwendig, indem die Verzahnung von a in die Verzahnungen von b und c gleichzeitig nicht eingreifen darf. Von irgend einem praktischen Werth ist dieser Mechanismus nicht.

Verzahnte Schwinge mit halbverzahntem Rad.

Fig. 4, Tafel XXIII. Diese Anordnung unterscheidet sich von der auf Seite 377 erklärten dadurch, dass statt eines geradlinig beweglichen Rahmens eine drehbare Schwinge angebracht ist. a ist diese Schwinge, *f* ihr Drehungspunkt, b $b_{,}$ mit *f* concentrische Verzahnungen, c ein halbverzahntes Getriebe. Auch hier ist ein Taster und sind Ansätze angebracht, die in Wirksamkeit kommen, wenn das Getriebe weder in die eine noch in die andere Verzahnung eingreift.

Das Mangelrad mit Triebstöcken.

Fig. 5, Tafel XXIII. a ist eine Scheibe, an welcher ein mit Triebstöcken b versehener offener Ring c und zwei Bogenstücke e e befestiget sind. *f* ist ein Getriebe, dessen Zähne für den Eingriff in die Triebstöcke geformt sind. Die Axe g dieses Getriebes ist durch eine Führung h gesteckt, deren Schlitz eine solche Länge hat, dass dies Getriebe innen oder aussen in die Triebstöcke eingreift, je nachdem die Axe an dem oberen oder an dem unteren Ende des Schlitzes anliegt. Die Axe g hat hinter dem Getriebe *f* einen Zapfen, der den Rand des Ringes c stets berührt. Wird die Axe g continuirlich gedreht, so dreht sich die Scheibe a abwechselnd nach rechts und links, je nachdem das Getriebe *f* innen oder aussen eingreift.

Das Mangelrad mit zweifacher Verzahnung.

Fig. 6, Tafel XXIII. Dieses unterscheidet sich von dem vorhergehenden durch die Verzahnung der Scheibe a. Diese ist hier eine doppelte, was zur Folge hat, dass die Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe a grösser ist, wenn das Getriebe in die innere Verzahnung eingreift, als wenn es in der äusseren wirkt. Die Axe des Getriebes muss sowohl bei diesem wie bei dem vorhergehenden Mangelrade entweder mit einem Hook'schen Schlüssel versehen sein, oder in einer Schaukel liegen, wie bei der auf Seite 377 beschriebenen Einrichtung.

Schaltungen für Stangen und Räder.

Schaltungen werden Vorrichtungen genannt, durch welche eine ruckweise Bewegung von Stangen oder von Rädern bewirkt wird.

Stangenschaltung für ganze Theilungen.

Fig. 7, Tafel XXIII. a ist eine verzahnte Stange, die ruckweise nach links bewegt werden soll. b ist ein Hemmhaken, welcher verhindert, dass die Stange nicht nach rechts gehen kann. c ist ein sogenannter Schalthaken, der sich in einem Zapfen dreht, welcher an einem Hebel oder an irgend einem andern hin und her gehenden Maschinentheil angebracht ist. Wird dieser Haken c um weniger als eine Zahntheilung hin und her bewegt, so schleift er auf dem Zahn hin und her, ohne die Stange zu bewegen. Wird der

Haken um eine Weglänge s bewegt, die grösser als eine Theilung t, aber kleiner als zwei Theilungen ist, so schleift er zuerst um $s - t$ auf dem Zahn der Zahnstange und bewegt diese hierauf um eine Zahntheilung weiter. Wird der Haken um eine Weglänge bewegt, die grösser als zwei aber kleiner als drei Theilungen ist, so schleift der Haken zuerst um $s - 2t$ auf dem Zahn und bewegt diesen dann um zwei Teilungen weiter u. s. f. Man sieht, dass mit dieser Einrichtung immer nur um ganze Theilungen geschaltet werden kann.

Stangenschaltung für halbe Theilungen.

Fig. 8, Tafel XXIII. a ist eine verzahnte Stange, die ruckweise nach links bewegt werden soll. Ihrer Bewegung wirke ein Widerstand entgegen oder eine stets nach rechts hin treibende Kraft. b b_1 sind zwei Hemmhaken, der eine b stemmt sich gegen einen Zahn der Stange, der andere b_1 steht auf halber Theilung. c c_1 sind zwei zusammen gehängte Schalthaken, der eine c stemmt sich gegen einen Zahn, der andere steht auf halber Theilung. Werden die Haken c c_1 zusammen um weniger als eine halbe Theilung hin und her bewegt, und zwar zuerst nach rechtshin, so schleift der Haken c auf dem Zahn f_1 und der Haken c_1 auf f_2 hin und her, ohne die Stange zu bewegen. Werden dagegen die Haken c c_1 um einen Weg s hin und her bewegt, der etwas grösser als eine halbe Theilung $\frac{1}{2}$ t ist, und zwar zuerst nach rechts hin und dann nach links zurück, so veranlasst die erstere dieser Bewegungen, dass der Haken c an dem Zahn f_1 hinaufschleift, der Haken c_1 aber an der Spitze von f_2 abfällt und dann noch um $s - \frac{1}{2} t$ fortgeht. Erfolgt hierauf die Rückbewegung, so gehen zuerst die Haken um $s - \frac{1}{2} t$ leer zurück. Dann aber stemmt sich c_1 gegen f_2 und wird die Stange genau um $\frac{1}{2}$ t nach links geschoben, was zur Folge hat, dass b_1 in e_2 einfällt und b auf die halbe Theilung von e gestellt wird. Bei dem nächst folgenden Gang nach rechts wird daher die Stange durch b_1 gehalten. Man sieht, dass auf diese Weise immer halbe Theilungen geschaltet werden können.

Wollte man, allgemein gesprochen, um den n-ten Theil einer Theilung t schalten, so müsste man n-Hemmhaken und n-Schalthaken anwenden und die letzteren um etwas mehr als $\frac{t}{n}$ hin und her bewegen. Diese Einrichtungen, durch welche man um aliquote

Theile einer Theilung schalten kann, sind in den Fällen nützlich, wenn das Fortrücken der Stange so wenig betragen soll, dass die Zahntheilung zu fein ausfallen müsste, wenn man die vorhergehende Anordnung, bei welcher nur um ganze Theilungen geschaltet werden kann, anwenden wollte.

Continuirliche Schaltung.

Fig. 9, Tafel XXIII. a ist eine verzahnte Stange. $c\ c_1$ ein Hebel, der um e hin und her gedreht wird. $b\ b_1$ zwei Schalthaken, der erstere stösst, der letztere zieht. Wird der Hebel $c\ c_1$ nach der durch die Pfeile angedeuteten Richtung um so viel gedreht, dass die Hakenenden h und h_1 eine halbe Theilung zurücklegen, so wird die Stange a durch den Haken h_1 um eine halbe Theilung nach links gezogen. Fällt aber der Haken h an der Zahnspitze f_1 ab, weil bei diesem Vorgang h um eine halbe Theilung rechts, f_1 um eine halbe Theilung nach links geht, also die relative Bewegung von h gegen f_1 eine ganze Theilung beträgt. Dreht man hierauf $c\ c_1$ nach entgegengesetzter Richtung um so viel, dass h den Zahn f_1 um eine halbe Theilung nach links schiebt, so fällt h_1 in g_1 ein u. s. w.

Man kann also durch diese Anordnung ein continuirliches Schalten um halbe Theilungen bewirken und braucht keine Hemmhaken anzubringen.

Es kommt nur selten vor, dass gerade Stangen geschaltet werden müssen, sondern in den meisten Fällen werden Schalträder angewendet. Die im Vorhergehenden gegebenen Erklärungen gelten aber selbstverständlich auch für Schalträder.

Bohrmechanismen.

Die Bohrmaschinen zum Ausdrehen hohlgegossener grösserer Cylinder bestehen im Wesentlichen aus einer starken horizontal gelagerten Axe (der Bohrspindel), mit welcher ein scheibenförmiger Körper (der Bohrkopf) so verbunden ist, dass bei einer Drehung der Spindel der Bohrkopf mitgedreht wird, gleichzeitig aber auch ein langsames Fortrücken desselben nach der Spindel stattfindet. Am Umfang des Bohrkopfes werden Meisel eingesetzt. Um einen Cylinder auszubohren, wird derselbe so eingespannt, dass er die Spindel concentrisch umgibt, werden die Meisel so gestellt, dass ihre Schneiden in die innere Fläche des Cylinders eingreifen und wird dann die Spindel in drehende Bewegung versetzt. Die in das

Metall der innern Wand eingreifenden Schneiden der Meisel beschreiben dann gegen die innere Fläche Schraubenlinien von so geringer Höhe, dass die einzelnen Gänge zusammenfliessen und eine stetige cylindrische Fläche bilden.

Erste Bohrvorrichtung.

Fig. 10, Tafel XXIII. a ist die in Lager gelegte Bohrspindel. b der Bohrkopf, der sich mit a dreht, aber längs dieser Axe verschiebbar ist. c_1 c_1 sind zwei mit a verbundene Traversen, in welchen sich die Schraubenspindeln c c drehen, deren Gewinde in dem Bohrkopf entsprechende Muttern finden. d d zwei kleine Rädchen, die mit den Spindeln c c verbunden sind. e und f zwei durch eine Röhre verbundene Räder, die sich frei auf a drehen. g ein mit a fest verbundenes Rad. h und i zwei in g und f eingreifende, durch eine Röhre verbundene Räder, die sich auf einem am Gestell angebrachten Zapfen drehen.

Bezeichnet man durch d, e, f, g, h, i nicht nur die Räder als Gegenstände, sondern auch deren Halbmesser, so ist die Anzahl der Umdrehungen des Rades e bei einer Umdrehung der Spindel a gleich $\frac{g}{h}\frac{i}{f}$, relativ gegen a macht also e, $1-\frac{g}{h}\frac{i}{f}$ Umdrehungen, und folglich ist die Anzahl der Umdrehungen des Rades d bei einer Umdrehung von a gleich $\left(1-\frac{g}{h}\frac{i}{f}\right)\frac{e}{d}$. Nennt man ε die Höhe eines Schraubenganges von c und x das Fortrücken des Bohrkopfes bei einer Umdrehung von a, so hat man:

$$x = \varepsilon\left(1-\frac{g}{h}\frac{i}{f}\right)\frac{e}{d}$$

Zweite Bohrvorrichtung.

Fig. 11, Tafel XXIII. Bei dieser Vorrichtung ist die in Lagern d d gelegte Bohrspindel a geschlitzt und enthält in der Mitte eine Schraubenspindel c, deren Gewinde auf eine Mutter wirken, die im Bohrkopf b angebracht ist. Die Bohrspindel a reicht bis an das Rad g, die Schraubenspindel c dagegen geht durch d e f g, hat jedoch auf dieser Strecke kein Gewinde. e ist ein unbewegliches, an das Gestell geschraubtes Rad. f ein kurbelartiger mit der Bohrspindel befestigter Arm. g ein mit der Schraubenspindel c verbundenes Rad. h und k zwei Räder, die an einer Axe befestigt sind, die sich in

der Hülse i des Kurbelarmes *f* dreht. g und h, so wie e und k greifen in einander ein.

Wird die Axe a einmal herumgedreht, so macht der Kurbelarm *f* eine Umdrehung und rollt das Rad k auf dem fixen Rad e einmal herum, wobei es sich $\frac{e}{k}$ mal um seine Axe dreht, allein da h mit k verbunden ist, so dreht sich auch h, $\frac{e}{k}$ mal um seine Axe und geht einmal um das Rad g herum, wodurch bewirkt wird, dass g, $1 - \frac{e}{k}\frac{h}{g}$ mal gedreht wird. Die relative Drehung von c gegen a ist demnach $\frac{e}{k}\frac{h}{g}$, und wenn man ε die Höhe eines Schraubenganges der Spindel c nennt und x das Fortrücken des Bohrkopfes bei einer Umdrehung von a, so ist

$$x = \varepsilon \frac{e}{k}\frac{h}{g}$$

Parallel-Bewegungen.

Parallel-Bewegungen werden solche Mechanismen genannt, vermittelst welchen ein Körper so bewegt wird, dass alle seine Lagen zu einander parallel bleiben. Es ist hierzu nur nothwendig, dass zwei oder drei Punkte des Körpers identische Bewegungen zu machen gezwungen sind. Ist der Körper plattenförmig und soll seine Bewegung in der Ebene der Platte statt finden, so genügt es, wenn zwei Punkte der Platte identisch bewegt werden. Ist der Körper plattenförmig und soll die Bewegung nach einer auf die Ebene der Platte senkrechten Richtung erfolgen, so müssen wenigstens drei Punkte der Platte identisch bewegt werden.

Bewegungs-Mechanismen dieser Art kann man selbstverständlich sehr viele hervorbringen. Die nachfolgenden Beispiele werden die Sache erklären.

Das Parallel-Lineal,

Fig. 12, Tafel XXIII., welches früher bei den Reiszeugen gebraucht wurde, kann zuweilen auch bei Maschinen angewendet werden.

Linealbewegung mit Schnüren.

Fig. 13, Tafel XXIII. a ist ein Lineal mit vier kleinen Röllchen $c\,c_1$ $d\,d_1$. $b\,b_1$ $e\,e_1$ sind Fixpunkte. b c d e, b_1 c_1 d_1 e_1 sind gespannte

Schnüre. Die erstere verhindert eine Rechtsdrehung des Lineals, die letztere eine Linksdrehung. Als Linealbewegung kann dieser Mechanismus zum Zeichnen auf grossen Wandtafeln angewendet werden. Er dient aber auch bei der *Mule-Jenny*-Spinnmaschine zur Führung des Spindelwagens.

Schützenaufzug mit Schaltwerk.

Fig. 14, Tafel XXIII. a ist der Schützen. Er ist an Ketten b b gehängt, die sich auf zwei Walzen c c aufwickeln. Die Axe d d ist mit einem Schaltrad e versehen und dieses wird vermittelst eines in der Zeichnung nicht angedeuteten Schalthebels bewegt. Ein Sperrhaken verhindert das Niedersinken des Schützens.

Schützenaufzug mit Zahnstangen.

Fig. 15, Tafel XXIII. a ist der Schützen. b b zwei Zahnstangen. c c zwei in dieselben eingreifende Getriebe. d eine Axe, die durch eine Kurbel e gedreht wird. Bei schweren Schützen werden noch Räderübersetzungen angewendet.

Schützenaufzug mit Schrauben.

Fig. 16, Tafel XXIII. a ist der Schützen. b b zwei Schraubenstangen. c c zwei Zahnräder, deren Hülsen mit Schraubenmuttern versehen sind. d d zwei in c c eingreifende Räder. e eine mit einer Kurbel versehene Axe, deren Richtung die Richtungen der Axen von b und b nicht schneidet. Die Räder c d, c d sind deshalb nicht gewöhnliche konische, sondern haben eine hyperbolische Grundform und schräg geschnittene Zähne.

Abstellung und Einkehrung.

Diese sogenannten Abstellungen und Einkehrungen sind Vorrichtungen, durch welche die Verbindung zweier Maschinenbestandtheile aufgehoben und wieder hergestellt werden kann. Einige von den Mechanismen, deren Beschreibung nun folgen wird, sind nicht blose Abstellungen, sondern sie dienen auch dazu, um gewisse Maschinentheile nach einer oder nach entgegengesetzter Richtung in Gang zu bringen, können daher auch gebraucht werden, um con-

tinuirlich drehende Bewegungen in drehend hin- und hergehende zu verwandeln.

Die Leerrolle.

Fig. 17, Tafel XXIII. a ist die Triebaxe einer Arbeitsmaschine. b eine mit a fest verbundene Rolle. c eine auf a frei drehbare Rolle (Leerrolle). d eine Transmissionswelle, von welcher aus die Arbeitsmaschine bewegt wird. e eine mit d fest verbundene Rolle. Wenn a im Gang ist, werden die Rollen e und b von einem Riemen umfasst. Wenn a abgestellt werden soll, wird der Riemen entweder von Hand oder durch einen Riemenleiter *f* auf die Rolle c hinübergeleitet. Soll die Maschine, nachdem sie längere Zeit abgestellt war, wiederum in Gang gebracht werden, so wird der Riemen wieder von c auf b gebracht. Diese Vorrichtung ist von sehr grossem praktischen Werth, indem vermittelst derselben nicht nur die Abstellung, sondern auch die Ingangsetzung einer Maschine ohne Stoss bewerkstelligt werden kann.

Abstellung und Einkehrung mit drei Rollen.

Fig. 18, Tafel XXIII. a ist eine Axe, die entweder abgestellt oder nach einer oder nach entgegengesetzter Richtung in Gang gebracht werden soll. b eine mit der Axe a verbundene Riemenrolle. c eine Leerrolle, d. h. eine um die Axe a frei drehbare Rolle. d eine zweite um die Axe a frei drehbare Rolle. e ein mit der Hülse von d fest verbundenes Kegelrad. f ein mit der Axe a fest verbundenes Rad. g ein um einen besonderen Zapfen h drehbares in e und f eingreifendes konisches Zwischenrad.

Leitet man einen Riemen von einer Transmission her auf die Leerrolle c, so ist die Axe a abgestellt. Leitet man diesen Riemen auf die Rolle b hinüber, so wird die Axe a direkt getrieben und die Räder f g e, so wie die Rolle d laufen zwecklos herum. Leitet man den Riemen auf die Rolle d, so wird durch Vermittlung der Räder e g f die Axe a gedreht, aber nach einer Richtung, die entgegengesetzt ist jener, welche eintrat, als der Riemen die Rolle b bewegte. Die Drehungsgeschwindigkeit der Axe a ist jedoch in beiden Bewegungen gleich gross.

Fig. 1, Tafel XXIV. Diese Anordnung unterscheidet sich von der vorhergehenden dadurch, dass hier die Räder e und f ungleich gross sind, und dass an dem Zapfen h zwei mit einander fest verbundene Räder g_1 und g_2 von ungleicher Grösse vorkommen.

g_2 greift in e, g_1 greift in f ein. Dies hat zur Folge, dass die Bewegungsgeschwindigkeit der Axe a grösser ist, wenn der Riemen auf b, als wenn er auf d geführt wird, denn die Halbmesser von e und g_2 sind gleich gross, jener von g_1 ist aber kleiner als der von f.

Abstellung mit drei Rollen.

Fig. 2, Tafel XXIV. a ist die Axe, welche abgestellt oder in Gang gebracht werden soll. b eine Leerrolle. c eine mit a fest verbundene Rolle. d eine um a frei drehbare Rolle mit einer inneren Verzahnung. e ein mit der Axe a verbundenes Getriebe. f ein um den Zapfen g drehbares Zwischenrad, das in e und in die innere Verzahnung von d eingreift.

Wird ein Triebriemen auf b geleitet, so ist a abgestellt. Wird der Riemen auf c geleitet, so wird die Axe a direkt getrieben. Wird der Riemen auf d geleitet, so wird die Axe a durch Vermittlung der Verzahnung getrieben. Die Bewegungsrichtung von a ist, wenn d getrieben wird, entgegengesetzt jener, wenn c getrieben wird. Die Drehungsgeschwindigkeit von a ist, wenn d getrieben wird, viel schneller, als wenn c getrieben wird, und zwar im Verhältniss der Halbmesser der inneren Verzahnung und des Getriebes e. Im Modell ist dieses Verhältniss gleich 3; die Bewegung von a ist also, wenn d getrieben wird, dreimal so schnell, als wenn c getrieben wird.

Abstellung mit Zwischenrad.

Fig. 3, Tafel XXIV. a und b sind zwei parallele Axen, die in oder ausser Verbindung gesetzt werden sollen. A und B zwei mit diesen Axen verbundene Räder. C ein Zwischenrad, das sich um einen Zapfen c dreht, der an einen Hebel D befestigt ist, welcher um b drehbar ist. C greift beständig in B ein und wird von b aus fortwährend gedreht. Je nachdem der Hebel in die Stellung D_1 C_1 oder in die Stellung D C gebracht wird, ist die Axe a im ersten Falle abgestellt, im letzteren in Gang gesetzt.

Radauskehrung mit Schraube.

Fig. 4, Tafel XXIV. Die Auskehrung geschieht hier, indem eines von zwei in einander greifenden Rädern längs seiner Axe verschoben wird.

Das Rad b ist mit der Axe a durch einen Mitnehmerkeil so in Verbindung gebracht, dass es sich mit der Axe drehen muss, aber längs derselben um etwas mehr, als die Zahnbreite beträgt, verschoben werden kann. d ist ein auf die Axe a passendes, aussen mit einem flachkantigen Schraubengewinde versehenes, gegen den Radkörper b geschraubtes Rohr. e eine aussen sechsseitige, innen mit einem Muttergewinde versehene Hülse, die vermittelst des Deckels g und eines Wellenansatzes mit a so verbunden ist, dass sie um die Axe gedreht, aber längs derselben nicht verschoben werden kann.

Wird diese Hülse vermittelst eines Schlüssels gedreht, so wird die Rohr-Spindel d und wird folglich auch das Rad b längs der Axe verschoben, was die Ein- und Auskehrung bewirkt. Diese kann jedoch nur im Stillstand der Maschine geschehen.

Abstellung und Einkehrung mit Friktionskegeln.

Fig. 5, Tafel XXIV. a die abzustellende Axe. b eine um die Axe a frei drehbare im Innern mit einem Konus versehene Riemenrolle. d ein zweiter mit einer Hülse versehener Konus, der sich mit der Axe a dreht, aber längs derselben etwas verschoben werden kann, so zwar, dass die innere Fläche von d mit c in oder ausser Berührung gebracht werden kann. f ein mit Tastern versehener Hebel, der durch eine Schraubenaxe g etwas gedreht werden kann.

Indem man den Hebel f vermittelst g nach einer oder nach der andern Richtung dreht, wird der Konus d fest auf c geschoben oder von c weggezogen. Im ersteren Falle wird die Verbindung von b mit a hergestellt, im letzteren aufgehoben.

Aus- und Einkehrung mit Konus und Klaue.

Fig. 6, Tafel XXIV. a ist eine Axe, die beständig gedreht wird. b ein Rad, das sich mit a oder frei auf a dreht, je nachdem die übrigen Theile des Mechanismus gestellt werden. Im ersteren Falle überträgt es die Bewegung auf eine zweite Axe, im letzteren nicht. Mit diesem Rad ist eine Zahnklaue c und ein Konus d verbunden. e ist ein zweiter Konus, der über den ersten, nämlich über d geschoben werden kann. An e ist eine Hülse f mit zwei eingedrehten Hälsen. Dieselbe ist mit a so verbunden, dass sie sich mit a drehen muss, aber auf a verschoben werden kann. g ist eine zweite

Zahnklaue mit einer Hülse, die sich ebenfalls mit a dreht, aber auf a verschiebbar ist. Die Hülsen sind durch zwei die Hälse umfassende Zäume h und i und durch zwei Stängelchen k und l verbunden. m ist ein Hebel, der mit zwei Zapfen in den äussern Ring der Konushülse eingreift.

Bewegt man den Griff des Hebels etwas nach rechts hin, so hört die Berührung zwischen d und e auf, und die Verbindung der Theile c b d mit a ist dann ganz aufgehoben, das Rad b kann also nicht mehr treibend wirken. Schiebt man den Hebel nach links, so fasst der Konus e den Konus d durch Reibung und hierdurch wird b mit a verbunden, jedoch nicht ganz sicher. Schiebt man aber den Hebel, nachdem das Rad b die Geschwindigkeit von a angenommen hat, rasch nach rechts hinüber, so lässt der Konus e aus und treten dagegen die Zähne der Klauen g und c in Eingriff und bringen eine ganz sichere Verbindung des Rades b mit a hervor. Durch eine geschickte Handhabung dieser Einkehrung kann die Ingangsetzung des Rades b ganz allmählig und ohne harte Stösse bewirkt werden.

Aus- und Einkehrung mit Bremse und Klaue.

Fig. 7, Tafel XXIV. a ist eine beständig in Bewegung befindliche Welle. b eine zweite, die nach Belieben mit a in Verbindung oder ausser Verbindung gebracht werden soll. c und d sind zwei Rollen, erstere ist mit b verbunden, letztere dreht sich frei um a. Um diese Rollen ist ein Bremsband e angelegt, und durch Schrauben so angezogen, dass es die Rollen c und d durch Reibung auf angemessene Weise anfasst. Mit d ist eine Zahnklaue f verbunden. g ist eine zweite Klauenhülse, die sich mit a dreht, aber längs a verschiebbar ist. Diese Verschiebung geschieht vermittelst des Hebels h. In der in Fig. 7 dargestellten Stellung ist die Axe b abgestellt. Schiebt man aber, während a in Bewegung ist, die Hülse g nach links hinüber, so fassen ihre Zähne jene der Hülse f, diese muss also nun mitrotiren, und nimmt durch Reibung das Band e mit, welches dann c und mithin b in Bewegung setzt. Auch hier kann die Ingangsetzung der Axe b mit allmählig zunehmender Geschwindigkeit geschehen.

Aus- und Einkehrung mit Klauen.

Fig. 8, Tafel XXIV. a ist eine beständig in rotirender Bewegung befindliche Axe. b ist eine zweite Axe, die nach Belieben

abgestellt oder rechts wie links in Gang gebracht werden soll. c und d sind zwei gleich grosse auf a frei drehbare konische Räder. An die Körper derselben sind die Klauenhülsen e und f geschraubt. Zwischen denselben befindet sich eine mit Klauen g h versehene Hülse, die sich mit der Axe a dreht, aber längs derselben hin und her verschiebbar ist. Um diese Verschiebung zu bewirken, dient der Hebel i, der mit zwei Zapfen in den mittleren Hals der Hülse eingreift. k ist ein mit b verbundenes Kegelrad, dessen (nicht gezeichnete) Zähne in die Zähne von c und d eingreifen. Wenn die Hülse so steht, wie in Fig. 8 dargestellt ist, greifen ihre Zähne weder in e noch in f ein, wird also weder c noch d gedreht, ist mithin die Axe b abgestellt; wird hingegen die Hülse verschoben, so dass entweder h in f oder g in e eingreift, so wird die Axe b im ersteren Falle durch d und k, im letzteren Falle durch c und k in drehende Bewegung versetzt. Die Drehungsrichtungen von b sind aber in diesen zwei Fällen entgegengesetzt.

Abstellung mit Bremse und Differenzialräderwerk.

Fig. 9, Tafel XXIV. a ist eine Axe., die beständig im Gang ist. b ein Stirnrad, das in ein in der Zeichnung nicht dargestelltes Räderwerk einer Maschine eingreift. Diese Maschine wird demnach abgestellt oder in Bewegung befindlich sein, je nachdem b nicht getrieben oder getrieben wird. c ein mit a fest verbundenes Kegelrad. d eine um a frei drehbare Röhre, mit welcher ein Kegelrad e und das Stirnrad b verbunden ist. f und g zwei mit ihren Zähnen in e und c eingreifende Kegelräder, die sich um Axen drehen, welche in dem Körper einer Rolle h gelagert sind. Diese Rolle h dreht sich frei um a und ihr Umfang wird von einem Bremsband umfasst, das durch einen Hebel i angezogen oder schlaff gelassen werden kann.

Wird das Bremsband vermittelst i angezogen, so hält es die Rolle h fest und diese verrichtet dann nur die Dienste eines Lagerkörpers für die Axen der Räder f und g. f und g sind also in diesem Falle Zwischenräder, durch welche die Bewegung, von a und c auf e d b übertragen wird. Das Rad b und die damit in Verbindung stehende Maschine gerathen also in Bewegung wenn die Rolle h durch das Bremsband festgehalten wird. Wird dagegen das Bremsband nicht angezogen, also die Rolle frei gelassen, so bleiben die Räder b und e durch den Widerstand, den die zu betreibende Maschine verursacht, stehen, und die Räder f und g rollen auf dem

Rad e herum, wobei gleichzeitig die Rolle h um die Axe a herum geführt wird. Die Maschine ist demnach abgestellt, so wie die Rolle h nicht festgehalten wird.

Abstellung und Einkehrung mit Bremse und Planetenrad.

Fig. 10, Tafel XXIV. a ist eine beständig im Gang befindliche Axe. b ein mit derselben verbundenes Rädchen. c eine um a frei drehbare Bremsrolle, die von einem Bremsband umfasst ist, welches vermittelst eines Hebels d angezogen werden kann. e ein mit dem Körper von c verbundener Zapfen, auf welchem sich ein Rädchen f dreht. g eine Riemenrolle, die sich frei um a dreht und am inneren Umfang mit einer Verzahnung h versehen ist. Die Zähne des Zwischenrades f greifen einerseits in h, anderseits in b ein.

Ist a in Bewegung und wird c durch die Bremse festgehalten, so verrichtet c nur den Dienst, dass es den Zapfen e festhält, und dann wird die Bewegung von a aus vermittelst b und f nach h und g übertragen, die Rolle g wirkt also dann treibend auf den sie umfassenden Riemen. Wird dagegen die Rolle c freigelassen, so bleibt g stehen und das Getriebe f rollt in der Verzahnung h herum, indem es gleichzeitig die Bremsrolle c und die Axe a herumführt.

Kraftmaschinenkupplung.

Wenn zwei sehr verschiedenartige Kraftmaschinen, z. B. eine Turbine und eine Dampfmaschine gemeinschaftlich auf eine Transmissionswelle einzuwirken haben, ist es zweckmässig, die Einrichtung in der Art zu treffen, dass die Turbine die Dampfmaschine und dass die Dampfmaschine die Turbine nicht forçiren kann. Eine solche Kraftmaschinenverkupplung ist Fig. 11, Tafel XXIV. dargestellt. a stelle die Axe der Turbine, b die Axe der Damfmaschine vor. c sei die Axe, auf welche die Kraft beider Maschinen übertragen werden soll. d und e sind zwei Zwischenwellen, die vermittelst der Räder h f g mit c in Verbindung stehen. i und k sind zwei mit d und e verbundene Schalträder. l und m zwei mit b und a verbundene kurbelartige Arme. Dieselben sind mit Zapfen versehen, an welchen Schalthaken n und p angebracht sind, die durch Stahlfedern gegen die Verzahnung gedrückt werden.

Die Wirkungen dieser Einrichtung sind folgende:

1. Erfolgt die Drehung der Axe a und b mit gleicher Geschwindigkeit nach den Richtungen, welche die Pfeile andeuten, so

stemmen sich die Haken n und p gegen die Zähne der Schalträder und nehmen diese mit herum, was zur Folge hat, dass die Kraft beider Maschinen auf die Welle c übertragen wird.

2. Sind anfänglich beide Maschinen abgestellt und bringt man sie gleichzeitig in Gang, lässt also gleichzeitig den Dampf auf die Dampfmaschine und das Wasser auf die Turbine wirken, so beginnen sie gemeinschaftlich auf die Axe c treibend einzuwirken.

3. Sind die Maschinen anfänglich abgestellt, und setzt man die eine, z. B. die Turbine in Gang, die Dampfmaschine aber noch nicht, sondern erst später, so kann es geschehen, dass die Turbine allein langsam zu treiben anfängt, und dann wird die Dampfmaschine, wenn sie später in Gang gesetzt wird, der Turbine nacheilen, bis der Sperrhaken der Dampfmaschine ebenfalls anfasst.

4. Sind beide Maschinen längere Zeit im regelmässigen Gang, und fängt eine derselben, z. B. die Dampfmaschine plötzlich an, kräftiger als bis daher zu wirken, so nimmt die Geschwindigkeit der Welle c zu. Das Schaltrad der Turbine entfernt sich vom Schalthaken, die Turbine hat nun nichts zu treiben und wird sich beeilen, mit ihrem Schalthaken das Schaltrad einzuholen.

Hieraus sieht man, dass diese Maschinenverkupplung von praktischem Nutzen ist.

SECHSTER ABSCHNITT.

Messinstrumente.

Die Messinstrumente können eingetheilt werden in geometrische und in mechanistische.

Zu den ersteren gehören die Winkel-, Längen-, Flächen-, Körpermessinstrumente. Ihre Theorie gehört in das Gebiet der praktischen Geometrie. Zu den letzteren gehören die Instrumente zur Bestimmung

a) der Gewichte der Körper, Wagen;
b) der Kräfte, Dynamometer, Manometer;
c) der Zeit, Uhren.

Die Theorie dieser mechanistischen Instrumente gehört in das Gebiet der Mechanik, daher wir uns mit einigen derselben befassen wollen.

Theorie der Wagen.

Die Schnellwage, Römische Wage, Krämerwage.

Fig. 12, Tafel XXIV. A B C ist ein Hebel mit einem kurzen Arm A C und einem langen Arm C B. Er dreht sich bei C um eine Schneide, die in einem Gehänge aufliegt und ist bei A mit einer Wagschale versehen, in welche der Körper F gelegt wird, dessen Gewicht bestimmt werden soll. Auf C B ist eine Eintheilung angebracht. Das Abwägen des Körpers geschieht, indem ein Laufgewicht D längs der Eintheilung von C B hinausgeschoben wird, bis es an einen Ort kommt, wo es dem Gewicht des auf die Wagschale gelegten Körpers das Gleichgewicht hält. Diese Position des Laufgewichtes soll dann auf der Skala das Gewicht angeben.

Nennen wir:
Q das zu bestimmende Gewicht des Körpers F,
S das Gewicht der Wagschale,
P das Laufgewicht,
p das Gewicht des Wagebalkens ohne Schale,
a die Entfernung der Punkte A und C,
b die Entfernung des zwischen C und B liegenden Schwerpunktes des Wagebalkens vom Drehungspunkt C,
x die Entfernung des Laufgewichtes vom Drehungspunkt,
so hat man im Gleichgewichtszustand

$$a (Q + S) = p b + P x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung ist jedoch nur dann richtig, 1) wenn bei C kein Reibungswiderstand vorhanden ist, 2) wenn die Aufhängung der Schale bei A eine vollkommen freie, d. h. eine solche ist, dass die durch diesen Aufhängepunkt gehende Vertikallinie genau durch den Schwerpunkt geht, welcher der Schale und dem darauf liegenden Gewicht entspricht.

Nimmt Q um eine Einheit zu, so muss, um das Gleichgewicht wiederum herzustellen, das Laufgewicht um eine gewisse Länge Δx weiter hinaus geschoben werden, und man hat

$$a (Q + 1 + S) = p b + P (x + \Delta x) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Differenz von (2) und (1) gibt:

$$a = P \Delta x, \quad \Delta x = \frac{a}{P}$$

Da Δx constant ist, so fallen die Intervalle der Eintheilung auf BC gleich gross aus, und die Eintheilung kann praktisch bestimmt werden, indem man auf die Wagschale nach einander zwei bekannte Gewichte Q_1 und Q_2 legt, jedesmal die Gleichgewichtsposition des Laufgewichtes auf dem Wagebalken bemerkt und den Abstand dieser zwei Positionen in $Q_2 - Q_1$ gleiche Theile theilt und eine von Q_1 bis Q_2 fortgehende Numerirung der Theilstriche anbringt.

Diese Wage ist weder genau noch bequem und wird nur noch selten gebraucht.

Die gleicharmige Wage.

Es sei, Fig. 13, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Wagebalkens, A und D die Anhängepunkte der Wageschalen, E der Schwer-

punkt des Wagebalkens. Ist A B = B D und wird auf beide Schalen gleiches Gewicht gelegt, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, bei welchem die Zunge der Wage einspielt, also vertikal steht. Ist jedoch eines der beiden Gewichte, z. B. P_1, etwas grösser als P, so tritt ein Gleichgewichtszustand ein, wobei die Zunge mit der vertikalen Richtung einen gewissen Winkel φ oder sogenannten Ausschlagswinkel bildet. Eine Wage ist empfindlich, wenn bei einer kleinen Differenz von $P_1 - P$ ein merklicher Ausschlagswinkel eintritt.

Wir wollen nun die Grösse dieses Winkels φ berechnen, wollen jedoch der Untersuchung eine Wage mit ganz beliebigen Abmessungen zu Grunde legen, damit wir aus der Theorie erfahren, welche Bedingungen erfüllt werden müssen, um eine richtige Gewichtsbestimmung zu erhalten.

Es seien, Fig. 14, Tafel XXIV., A und A_1 die Aufhängepunkte der Schalen. Wir nehmen an, diese Aufhängung sei eine vollständig freie, d. h. eine solche, dass wenn man durch diese Punkte Vertikallinien zieht, sie durch die Schwerpunkte der angehängten Körper (Schale und Gewicht) gehen. Es sei ferner C der Drehungspunkt des Wagebalkens und E sein Schwerpunkt. Da wir uns so benehmen wollen, wie wenn wir erst durch die Theorie belehrt werden müssten, wie die Wage angeordnet sein soll, so nehmen wir an, dass die Richtung von C E gegen $A A_1$ irgend einen Winkel $C D A_1 = \beta$ bildet und dass die Längen A D und $D A_1$ nicht gleich gross, sondern dass die erstere a, die letztere a_1 sei. Die Zungenrichtung C G wird möglicher Weise gegen C E einen Winkel bilden. Wir setzen $\widehat{HCG} = \gamma$, ferner C D = b, C E = c. Das Gewicht der Schale mit den Anhängeketten oder Schnüren wird auch ungleich sein können, wir nennen dieselben S und S_1 und das Gewicht des Hebels p und fragen nun wie gross der Ausschlagwinkel ψ sein wird, wenn auf die eine Schale ein Körper gelegt wird, dessen wahres Gewicht P und auf die andere Schale ein Gewicht P_1 gelegt wird, das von P verschieden ist.

Wie Fig. 14, Tafel XXIV. zeigt, sind $\overline{CB}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{CL}$ die Längen der Perpendikel, welche vom Drehungspunkt aus auf die vertikalen Richtungen der Kräfte $S + P$, $S_1 + P_1$, p gefällt werden können, und es ist:

$$\overline{CB} = a \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) + b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \cos\left(\psi - \gamma + \beta - \frac{\pi}{2}\right) - b \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\psi - \gamma)\right]$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

oder:

$$\overline{CB} = a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CB_1} = a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)$$

$$\overline{CL} = c \sin(\psi - \gamma)$$

Die Gleichgewichtsgleichung ist demnach:

$$(S_1 + P_1\ [a_1 \sin(\psi - \gamma + \beta) - b \sin(\psi - \gamma)] = (S + P)\ [a \sin(\psi - \gamma + \beta) + b \sin(\psi - \gamma)] + p\, c \sin(\psi - \gamma)$$

oder

$$(S_1 + P_1)\ [a_1 \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a_1 \cos(\psi - \gamma) \sin\beta - b \sin(\psi - \gamma)] =$$

$$(S + P)\ [a \sin(\psi - \gamma) \cos\beta + a \cos(\psi - \gamma) \sin\beta + b \sin(\psi - \gamma)] + p\, c \sin(\psi - \gamma)$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\cos(\psi - \gamma)$ und sucht hierauf $\operatorname{tang}(\psi - \gamma)$, so findet man:

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \frac{(P_1 a_1 - P a) + (S_1 a_1 - S a)}{(S + S_1 + P + P_1) b + p c - \cos\beta (P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a)} \sin\beta \quad (1)$$

oder

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \sin\beta \frac{1}{\dfrac{(S + S_1 + P + P_1) b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta} \quad . \quad (2)$$

oder

$$\operatorname{cotg}(\psi - \gamma) = \frac{1}{\sin\beta} \left[\frac{(S + S_1 + P + P_1) b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta \right] \quad (3)$$

Der Winkel γ ist bei jeder Wage äusserst klein, denn er ist ja nur ein kleiner Fehler der Construktion oder Ausführung, und ψ ist der sehr kleine Ausschlagwinkel, wenn P_1 sehr wenig von P verschieden ist. Wir dürfen daher setzen:

$$\operatorname{tang}(\psi - \gamma) = \psi - \gamma, \quad \operatorname{cotg}(\psi - \gamma) = \frac{1}{\psi - \gamma}$$

und erhalten demnach

$$\frac{1}{\psi - \gamma} = \frac{1}{\sin\beta} \left[\frac{(S + S_1 + P + P_1) b + p c}{P_1 a_1 - P a + S_1 a_1 - S a} - \cos\beta \right] \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Wagen werden immer so adjustirt, dass die Zunge einspielt, wenn die Schalen unbelastet sind.

Für eine in solcher Weise adjustirte Wage ist demnach für $P = P_1 = o$, $\psi = o$, daher:

$$\frac{1}{-\gamma} = \frac{1}{\sin\beta}\left[\frac{(S + S_1)\, b + p\, c}{S_1\, a_1 - S\, a} - \cos\beta\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Durch Elimination von γ aus (4) und (5) folgt:

$$\psi = \sin\beta\left[\frac{P_1\, a_1 - P\, a + S_1\, a_1 - S\, a}{b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\, c - \cos\beta\,(P_1\, a_1 - P\, a + S_1\, a_1 - S\, a)} - \frac{S_1\, a_1 - S\, a}{b\,(S + S_1) + p\, c - \cos\beta\,(S_1\, a_1 - S\, a)}\right]$$

oder wenn man die Brüche auf gleiche Nenner bringt:

$$\psi = \sin\beta \frac{(P_1\, a_1 - P\, a)\,[b\,(S + S_1) + p\, c] - (S_1\, a_1 - S\, a)\, b\,(P + P_1)}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(P + S_1 + P + P_1) + p\, c - \cos\beta\,(P_1\, a_1 - P\, a + S_1\, a_1 - S\, a)] \\ \times\, [b\,(S + S_1) + p\, c - \cos\beta\,(S_1\, a_1 - S\, a)]\end{array}\right\}} \quad (6)$$

oder auch:

$$\psi = \sin\beta \frac{(P_1 - P)\, a + P_1\,(a_1 - a) - \dfrac{(S_1\, a_1 - S\, a)\, b\,(P + P_1)}{b\,(S + S_1) + p\, c}}{\left\{\begin{array}{c}[b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\, c - \cos\beta\,(P_1\, a_1 - P\, a + S_1\, a_1 - S\, a)] \\ \times \left[1 - \cos\beta\, \dfrac{S_1\, a_1 - S\, a}{b\,(S + S_1) + p\, c}\right]\end{array}\right\}} \quad (7)$$

Vermittelst dieses Ausdruckes lernen wir nun die Bedingungen der Empfindlichkeit einer gleicharmigen Wage kennen. Wir haben hierbei unsere Aufmerksamkeit vorzugsweise nur auf das Glied $(P_1 - P)\, a$ des Zählers und auf die Glieder $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\, c$ des Nenners zu richten, denn die übrigen Glieder haben bei jeder wirklichen Wage verschwindend kleine Werthe. Es sind nämlich bei jeder nur einigermassen genauen Wage 1) die Arme a und a_1 beinahe gleich gross, 2) die Gewichte der Wagschalen gleich gross, 3) ist ferner der Winkel β beinahe $= 90^\circ$, also $\cos\beta$ beinahe $= 0$. Wenn wir nur allein die Glieder $(P_1 - P)\, a$ und $b\,(S + S_1 + P + P_1) + p\, c$ berücksichtigen, so ergeben sich aus (7) nachstehende Folgerungen: ψ fällt gross aus, d. h. die Wage wird empfindlich,

1) wenn a gross ist, d. h. wenn die Arme lang sind,
2) wenn b und c klein sind, d. h. wenn die Entfernung des Drehpunktes c von der Armlinie $A\, A_1$ klein ist und wenn ferner der

Schwerpunkt des Wagebalkens nur wenig unter seinem Drehungspunkt liegt,

3) wenn die Schalengewichte S und S_1 klein sind, also leichte Schalen genommen werden,
4) wenn das zu bestimmende Gewicht nicht zu gross ist,
5) wenn p klein ist, d. h. wenn der Wagebalken ein geringes Gewicht hat.

Durch die Gewichte $P + S$, $P_1 + S_1$ kann der Wagebalken, wenn er zu leicht gebaut wird, leicht etwas deformirt werden, was zur Folge hat, dass sich die Armlängen a und a_1 ändern und dass b wie c grösser wird, wodurch die Verlässlichkeit und Empfindlichkeit der Wage leidet. Es soll daher der Wagebalken nicht nur leicht, sondern gleichzeitig auch sehr fest gebaut werden.

Die empfindlichen Wagen der chemischen und physikalischen Laboratorien entsprechen den so eben aufgefundenen Bedingungen sehr wohl.

Vermittelst der Gleichung (6) können wir einen praktisch sehr wichtigen Satz nachweisen, dass mit einer Wage, welche den Bedingungen der Empfindlichkeit entspricht, eine genaue Gewichtsbestimmung auch dann möglich ist, wenn a nicht gleich a_1, S nicht gleich S_1, γ nicht Null und β nicht 90^0 ist. Diese richtige Bestimmung geschieht durch zweimaliges Abwiegen auf folgende Weise.

Man bringt den Körper, dessen Gewicht P bestimmt werden soll, auf die Schale A und legt auf die andere Schale A_1 Gewichte P_1 auf, bis die Wage einspielt, d. h. bis $\psi = 0$ ist. Hierauf legt man den Körper auf A_1 und auf die Schale A so viele Gewichte P_2, bis die Wage wiederum einspielt.

Die Bedingungen dieser zwei Gleichgewichtszustände erhalten wir aus (6), wenn wir den Zähler gleich Null setzen, hierauf P_1 mit P und P mit P_2 vertauschen und dann den Zähler nochmals $= 0$ setzen. Diese Bedingungen sind demnach:

$$(P_1 a_1 - P a) [b (S + S_1) + p c] - (S_1 a_1 - S a) b (P + P_1) = 0$$

$$(P a_1 - P_2 a) [b (S + S_1) + p c] - (S_1 a_1 - S a) b (P_2 + P) = 0$$

Hieraus folgt:

$$\frac{P_1 a_1 - P a}{P a_1 - P_2 a} = \frac{P + P_1}{P + P_2}$$

und dieser Ausdruck gibt:

$$P = \sqrt{P_1 P_2}$$

Das wahre Gewicht ist also die Quadratwurzel aus dem Prodrukt der Gewichte, die durch das zweimalige Abwägen gefunden wurden und es ist in der That interessant, dass diese Regel auch dann zur Wahrheit führt, wenn die Wage gar nicht adjustirt ist, d. h. wenn $a \gtrless a_1$, $s \gtrless s_1$, $\gamma \lessgtr 0$, $\beta \gtrless \frac{\pi}{2}$.

Die nach den aufgefundenen Regeln angeordneten und sorgfältig ausgeführten gleicharmigen Wagen geben die genauesten Gewichtsbestimmungen. Auch sind diese Wagen bequem zu gebrauchen, wenn überhaupt nur leichte oder doch nicht schwere Körper abgewogen werden sollen. Zum Abwägen von schweren Körpern sind sie jedoch nicht bequem, theils wegen der vielen zum Abwägen erforderlichen Gewichte, theils auch, weil es umständlich und unbequem ist, die Gegenstände auf die an Ketten hängenden Wagschalen zu bringen. Für kaufmännische Zwecke wird deshalb die sogenannte Dezimalwage gebraucht.

Erste Dezimalwage.

Fig. 15, Tafel XXIV., stellt eine solche Dezimalwage vor, mit Hinweglassung der construktiven Details. Das Gestell der Wage besteht aus einem dreieckigen Rahmen, der bei M breit, bei L schmal ist und einem vertikalen Brette N L, welches oben das Lager für den Wagbalken trägt. F H ist ein dreieckiger Hebel, der bei H mit Schneiden versehen ist und damit auf Metallplatten aufliegt, bei F aber vermittelst einer Stange F D an den Wagbalken A D gehängt ist. E J ist ein zweites Hebelwerk, das bei G mit Schneiden auf dem ersten Hebelwerk F H aufliegt, es ist mit Bedielung J K versehen, auf welche die abzuwägenden Gegenstände gestellt werden, und vermittelst einer Stange E C an den Wagebalken A D gehängt. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustand einspielt, d. h. dass die Hebel A D, E J, F H horizontal schweben. Das Abwägen geschieht, indem man den Körper auf die Bedielung bringt und in die Schale Gewichte legt, bis die Wage wiederum einspielt.

Nennen wir Q das Gewicht des Körpers, P das Gewicht, das auf die Wagschale gelegt werden muss, um dem Gewicht des Körpers das Gleichgewicht zu halten, und setzen $\overline{BC} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{GH} = a_1$, $\overline{HF} = b_1$, $\overline{AB} = c$, Q_1 die aus dem Gewicht Q entstehende Pressung der Schneide bei G, Q_2 den Zug bei E, so ist, welche Lage auch der Körper haben mag:

$$Q_1 + Q_2 = Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Für das Gleichgewicht zwischen Q und P ist aber auch

$$P c = Q_1 \frac{a_1}{b_1} b + Q_2 a$$

oder wegen (1)

$$P c = Q_1 \frac{a_1}{b_1} b + (Q - Q_1) a$$

oder auch

$$P c = Q_1 \left(\frac{a_1}{b_1} b - a\right) + Q a$$

Damit nun stets das gleiche Gewicht gefunden wird, wo man auch den Körper hinlegen mag, muss offenbar $\frac{a_1}{b_1} b - a = 0$ oder $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ sein, und dann wird:

$$P = Q \frac{a}{c}$$

Richtet man also die Hebelarme so ein, dass $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ und dass $\frac{a}{c} = \frac{1}{10}$ ist, so wird $P = \frac{Q}{10}$, d. h. das Gewicht des Körpers ist dann zehnmal so gross, als das auf die Wagschale gelegte Gewicht.

Die Bedingung $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$ drückt nichts anderes aus, als dass die Ebene der Bedielung stets eine horizontale bleiben soll, wenn die Wagschale auf und nieder schwankt, d. h. der Mechanismus ist ein Parallelmechanismus.

Zweite Dezimalwage.

Auf dieser Grundeigenschaft beruht auch folgende Dezimalwage. Fig. 16, Tafel XXIV. A B C, $A_1 B_1 C_1$ sind zwei steife Winkelhebel, der erstere ist durch zwei Stängelchen $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ mit dem letzteren zusammen gegliedert, so dass A B gegen D E parallel bleiben muss. F G H ist ein Wagebalken, der bei G seinen Drehungspunkt hat, bei H mit einer Wageschale verbunden ist und an welchen bei F der Winkelhebel A B C gehängt wird. Die Wage wird so tarirt, dass sie im unbelasteten Zustande einspielt. Der abzuwägende Körper wird auf B C gelegt und das Abwägen geschieht, indem man ein Gewicht P auf die Wagschale legt, bis die Wage einspielt.

Setzt man $G H = c$, $G F = a$ und macht $\frac{c}{a} = 10$, so ist für das Gleichgewicht

$$P c = Q a, \quad \frac{P}{Q} = \frac{a}{c} = \frac{1}{10}$$

Brückenwagen für schwere Lasten.

Diese Wagen dienen vorzugsweise zur Gewichtsbestimmung von beladenen Lastwagen, und ist das Gewicht in der Schale in der Regel $=\frac{1}{100}$ von dem Gewicht der Last.

Die Zeigerwage und die Garnwage.

Die Zeigerwage ist in der Weise eingerichtet, dass sie durch die Stellung eines Zeigers das Gewicht eines Körpers angibt. Sie wird theils zur Abwägung der Briefgewichte, insbesondere aber in den Baumwollspinnereien zum Sortiren der Garne gebraucht. Wir wollen uns mit der Theorie dieser Garnwage beschäftigen. Aus dem gesponnenen Garne werden sogenannte Strehne gebildet, von denen jeder nach der französischen Garnnummerirung eine Fadenlänge von 1000 Meter enthält. Die Feinheit des Garns wird gemessen, indem man die Anzahl der Strehne angibt die zusammen $\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegen. Nennt man also allgemein n die Feinheits-Nummer eines Garnes, q das Gewicht eines Strehnes in Kilogrammen von 1000 Meter Fadenlänge, so ist

$$q = \frac{1}{2\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

und es ist auch n die Anzahl der Strehne, die zusammen $\frac{1}{2}$ Kilogramm wiegen.

Diese Garnwage besteht aus einem um eine horizontale Axe möglichst beweglichen Winkelhebel, dessen Schwerpunkt nicht in der Drehungsaxe liegt. Einer der Arme ist mit einem Zeiger versehen, der auf eine eingetheilte Bogenskala zeigt, das Ende des Armes ist mit einem leichten Häkchen versehen, an welches der Strehn gehängt wird, dessen Nummer bestimmt werden soll. Wird ein Strehn angehängt, so nimmt der Winkelhebel eine Stellung an, bei welcher das Gewicht des Strehnes mit dem Gewichte des Winkelhebels im Gleichgewicht ist, der Zeiger weist dann auf eine bestimmte Stelle der Bogentheilung, und wenn diese in angemessener Weise angeordnet ist, so wird durch die Stellung des Zeigers das Gewicht des Strehnes angegeben.

Es sei, Fig. 17, Tafel XXIV., C der Drehungspunkt des Winkelhebels, B der Anhängepunkt des Strehnes, A der Schwerpunkt des Winkelhebels,

p das Gewicht des Winkelhebels in Kilogrammen,

$q = \frac{1}{2n}$ das Gewicht des Strehnes von Nummer n,

$\alpha = \widehat{ACB}$ der Winkel, den die Verbindungslinie des Drehungspunktes C mit dem Schwerpunkt A und mit dem Aufhängepunkt B zusammen bilden,

φ der Winkel, welchen der Zeigerarm A C mit einer durch C gezogenen Horizontallinie bildet, wenn der Strehn mit dem Gewicht des Armes im Gleichgewicht ist,

$\left.\begin{array}{l} CA = a \\ CB = b \end{array}\right\}$ die Entfernungen der Punkte A und B von C,

so ist die Bedingungsgleichung des Gleichgewichtes:

$$p\,a \cos\varphi = q\,b \cos[\pi - (\alpha + \varphi)]$$

oder

$$p\,a \cos\varphi = - b\,q \cos(\alpha + \varphi) = b\,q\,(\sin\alpha \sin\varphi - \cos\alpha \cos\varphi)$$

hieraus folgt:

$$\text{tang}\,\varphi = \text{cotg}\,\alpha + \frac{p\,a}{b\,q \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

oder wenn man q durch n ausdrückt:

$$\text{tang}\,\varphi = \text{cotg}\,\alpha + 2\,\frac{p\,a}{b}\,\frac{n}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Gleichung bestimmt die Gleichgewichtslage des Winkelhebels. Hängt man an die Wage statt des Strehnes von Nr. n einen leichteren Strehn von Nr. $n+1$, so tritt nun eine Gleichgewichtslage ein, in welcher der Zeiger A C mit der horizontalen Richtung einen Winkel φ_1 bildet. Zur Bestimmung dieses Winkels erhält man aus (3), wenn man in derselben $n+1$ statt n, und φ_1 statt φ setzt, folgenden Ausdruck:

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \text{cotg}\,\alpha + \frac{2\,p\,a}{b \sin\alpha}(n+1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Differenz der Gleichungen (4) und (3) gibt:

$$\text{tang}\,\varphi_1 - \text{tang}\,\varphi = \frac{2\,p\,a}{b \sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Da für eine bestimmte Anordnung $\frac{2\,p\,a}{b \sin\alpha}$ eine constante Grösse ist, so folgt aus Gleichung (5), dass für jede Aenderung der Garn-

nummer um eine Einheit die Aenderung der trigonometrischen Tangente des Winkels φ constant ist.

Hieraus ergibt sich für die Construktion der Bogeneintheilung folgendes Verfahren. Fig. 18, Tafel XXIV.

Man verfertige eine solche Zeigerwage, indem man eine bereits existirende aus einer Spinnerei als Muster nimmt. Stelle die Wage auf, lege an den Bogen ein Lineal an, so dass seine Kante vertikal steht. Hänge einen schweren Strehn an, dessen Gewicht und Nummer bereits durch eine andere empfindliche Wage bestimmt worden ist (n_1 sei die Nr. dieses Strehnes), beobachte die Gleichgewichtsstellung $C A_1$ des Zeigers, verlängere die Richtung $C A_1$ bis an die Linealkante und bemerke sich den Punkt a_1. Hierauf hänge man statt des schweren Strehnes einen bedeutend leichteren von Nr. n_2 an, bemerke die Gleichgewichtsposition $C A_2$ des Zeigers, verlängere $C A_2$ bis an die Kante des Lineals und bemerke den Punkt a_2. Hierauf theile man den Abstand $a_2\, a_1$ in $n_2 - n_1$ gleiche Theile, ziehe aus den Theilungspunkten Radien nach C und bemerke die Stellen, wo diese Radien den Kreisbogen schneiden durch Striche, so hat man eine richtige Bogeneintheilung, d. h. eine solche Eintheilung, bei welcher die Aenderungen der trigonometrischen Tangenten des Winkels φ für jede Aenderung der Garnnummer um eine Einheit gleich gross sind, wie es die entwickelte Theorie verlangt.

Aber gleichwohl wird eine auf diese Weise angefertigte Garnwage sehr ungenaue Gewichtsbestimmungen geben, wenn nicht der Winkelhebel gewissen Bedingungen entspricht. Angenommen, n_1 sei die niedrigste, n_2 die höchste Garnnummer, die durch die Wage bestimmt werden soll, dann können die Winkel β_1 und β_2, welche diesen Nummern entsprechen, entweder sehr klein oder sehr gross ausfallen, je nachdem der Winkelhebel beschaffen ist, und beides ist für die Genauigkeit der Gewichtsbestimmungen nachtheilig. Fallen beide Winkel klein aus, so erhält überhaupt die ganze Bogentheilung eine geringe Ausdehnung, fallen daher sämmtliche Intervalle der Eintheilung sehr klein aus, wird daher der geringste Grad von Schwerbeweglichkeit des Wagebalkens zur Folge haben, dass man sich um mehrere Nummern irrt. Fallen dagegen beide Winkel (β_1 und β_2) sehr gross aus, so würden zwar die Intervalle auf der Tangententheilung alle sehr gross ausfallen, würden aber gleichwohl die äussersten Intervalle der Bogentheilung sehr klein, so dass mit einer solchen Wage wohl die mittleren Garnnummern genau, die niedrigsten und höheren dagegen nur ungenau bestimmt werden können. Es ist hieraus zu ersehen, dass eine solche Garnwage dann die grösste Genauigkeit geben wird, wenn der Winkelhebel so ange-

ordnet wird, dass das erste und das letzte Intervall der Bogeneintheilung möglichst gross ausfällt. Unter welchen Umständen dies der Fall ist, wollen wir nun ausfindig zu machen suchen.

Nennt man:

e das constante Intervall der Tangenteneintheilung,

μ diejenige Garnnummer, welche der Horizontalstellung des Zeigers entspricht,

n_2 die höchste, n_1 die niedrigste von den Garnnummern, die durch die Wage zu bestimmen sind,

β_2, β_1 die Winkel des Zeigers gegen den Horizont, welche den Nummern n_2 und n_1 entsprechen,

$\beta_2 - \Delta\beta_2$, $\beta_1 - \Delta\beta_1$ die Winkel des Zeigers gegen den Horizont, welche den Nummern $n_2 - 1$, $n_1 + 1$ entsprechen,

so ist zunächst:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tang} \beta_2 = e\,(n_2 - \mu) \\ \operatorname{tang}(\beta_2 - \Delta\beta_2) = e\,(n_2 - \mu - 1) \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta_2 - \Delta\beta_2)}{\operatorname{tang}\beta_2} = \frac{n_2 - \mu - 1}{n_2 - \mu} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

oder wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\frac{n_2 - \mu - 1}{n_2 - \mu} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{\operatorname{tang}(\beta_2 - \Delta\beta_2)}{\operatorname{tang}\beta_2} = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Nun entspricht $\Delta\beta_2$ dem untersten Intervall der Bogeneintheilung, welches Intervall nach der oben gegebenen Erklärung möglichst gross ausfallen soll; wir müssen demnach β_2 selbst so zu bestimmen suchen, dass $\Delta\beta_2$ ein Maximum wird. Diesen vortheilhaftesten Werth von β_2 finden wir, wenn wir die Gleichung (9) in Bezug auf β_2 und $\Delta\beta_2$ differenziren, jedoch $d\,(\Delta\beta_2) = 0$ setzen, dann findet man:

$$\frac{d\beta_2}{\cos^2(\beta_2 - \Delta\beta_2)} = \lambda\,\frac{d\beta_2}{\cos^2\beta_2}$$

oder

$$\cos^2\beta_2 = \lambda\cos^2(\beta_2 - \Delta\beta_2)$$

oder

$$1 + \text{tang}^2 (\beta_2 - \Delta \beta_2) = \lambda (1 + \text{tang}^2 \beta_2)$$

oder endlich, wenn man vermittelst (9) $\text{tang} (\beta_2 - \Delta \beta_2)$ durch $\text{tang} \beta_2$ ausdrückt:

$$1 + \lambda^2 \text{tang}^2 \beta_2 = \lambda + \lambda \text{tang}^2 \beta_2$$

Hieraus folgt:

$$\text{tang} \beta_2 = \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda(1-\lambda)}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\frac{n_2 - \mu}{n_2 - \mu - 1}} \quad . \quad (10)$$

Nun ist in allen Fällen der Anwendung $n_2 - \mu$ gegen die Einheit sehr gross, daher $\frac{n_2 - \mu}{n_2 - \mu - 1}$ sehr nahe gleich der Einheit, demnach $\text{tang} \beta_2$ ebenfalls nahe gleich Eins, also β_2 nahe gleich 45°.

Ganz auf die gleiche Weise wie dieser vortheilhafteste Werth von β_2 gefunden wurde, kann man auch den vortheilhaftesten Werth von β_1 bestimmen, und findet für denselben selbstverständlich ebenfalls 45°.

Aus dieser Untersuchung geht also hervor, dass der Winkelhebel in solcher Weise angeordnet werden soll, dass der Zeiger, wenn ein Strehn von der niedrigsten Nummer angehängt wird um 45° aufwärts, und wenn ein Strehn von der höchsten Nummer angehängt wird, um 45° abwärts von der horizontalen Lage abweicht.

Wir werden sogleich erfahren, was zu thun ist, um dem Winkelhebel diese Eigenschaft zu ertheilen.

Für die vortheilhafteste Einrichtung ist

$$\text{für } n = n_1 , \quad \varphi = -45^0$$

$$\text{,,} \quad n = n_2 , \quad \varphi = +45^0$$

Die Gleichung (3) gibt demnach für die vortheilhafteste Einrichtung folgende Bedingungen:

$$\left. \begin{aligned} -1 &= \text{cotg} \, \alpha + 2 \frac{p \, a}{b \sin \alpha} n_1 \\ +1 &= \text{cotg} \, \alpha + 2 \frac{p \, a}{b \sin \alpha} n_2 \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

wodurch zwei Grössen bestimmt werden.

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst durch Elimination von $\frac{2 \, p \, a}{b \sin \alpha}$:

$$\frac{1 - \operatorname{cotg} \alpha}{1 + \operatorname{cotg} \alpha} = - \frac{n_2}{n_1}$$

oder

$$\frac{1 + \operatorname{tang} \alpha}{1 - \operatorname{tang} \alpha} = + \frac{n_1}{n_2}$$

oder auch

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = + \frac{n_1}{n_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Die Differenz der Gleichungen (11) gibt ferner:

$$\frac{p\,a}{b} = \frac{\sin \alpha}{n_2 - n_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

Die Gleichung (12) bestimmt den vortheilhaftesten Werth des Winkels $\alpha = \widehat{A\,C\,B}$, Fig. 17, Tafel XXIV., und die Gleichung (13) bestimmt ferner, wenn einmal α bekannt ist, den besten Werth des Quotienten $\frac{p\,a}{b}$.

Da $\frac{n_1}{n_2}$ positiv und kleiner als Eins ist, ferner $n_2 - n_1$ positiv ist, so liegt α nothwendig im dritten Quadranten, denn nur wenn dies der Fall ist, kann $\sin \alpha$ positiv ausfallen, wie die Gleichung (13) fordert, und demnach $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ kleiner als Eins werden, wie es Gleichung (12) vorschreibt.

Wir wollen von dieser Theorie eine Anwendung machen, um deutlich zeigen zu können, wie man sich zu benehmen hat, um den Anforderungen der Rechnung zu entsprechen.

Es sei eine Garnwage herzustellen, vermittelst welcher Garne von Nummer $n_1 = 20$ bis zu Nummer $n_2 = 60$ gut sortirt werden können.

Dann erhalten wir vermöge (12):

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} = 0{\cdot}333 = \operatorname{tang}(\pi + 18^0 + 26')$$

demnach

$$45^0 + \alpha = 180^0 + 18^0 + 26'$$

$$\alpha = 153^0 + 26'$$

$$\sin \alpha = 0{\cdot}4472$$

Und nun folgt aus Gleichung (13):

$$p\,\frac{a}{b} = \frac{0{\cdot}4472}{40} = \frac{1}{89{\cdot}4}$$

Fig. 1, Tafel XXV. zeigt in einfachen Linien die Einrichtung der Garnwage. Tafel LXXIV. der „Bewegungsmechanismen“ zeigt die construktive Durchführung.

Zeitmessung durch Uhren.

Die Zeit kann durch gleichförmige und durch gleichförmig periodische Bewegungen gemessen werden. Ist eine stetig gleichförmige Bewegung vorhanden, so werden bei derselben in gleichen Zeiten gleich lange Wege zurückgelegt. Nimmt man als Zeiteinheit diejenige Zeit an, in der eine ganz bestimmte Weglänge s zurückgelegt wird, so findet man irgend eine andere Zeit T, in welcher ein Weg S zurückgelegt wird, indem man diesen Weg S durch den einer Zeiteinheit entsprechenden Weg s dividirt.

Bei einer solchen stetig gleichförmigen Bewegung kann möglicher Weise jede beliebige Zeit gleich genau bestimmt werden.

Durch periodische, z. B. durch schwingende Bewegungen, können mit Genauigkeit nur solche Zeiten gemessen werden, die ganze vielfache von der Zeit einer Schwingung sind. Zeittheilchen, die kleiner als eine Schwingungszeit sind, müssen in diesem Falle durch Schätzung bestimmt werden.

Uhren sind Messapparate, welche entweder eine stetig gleichförmige oder eine periodisch gleichförmige Bewegung darbieten. Eine natürliche Uhr der ersteren Art ist die Erde durch ihre gleichförmige Axendrehung. Eine künstliche Uhr mit stetig gleichförmiger Bewegung erhält man durch das sogenannte Centrifugal-Pendel.

Bei den meisten Uhren werden jedoch periodische Schwingungen zur Zeitmessung benutzt und zwar entweder Pendelschwingungen oder Schwungradschwingungen. Wir werden uns nun mit der Theorie dieser beiden Schwingungen beschäftigen.

Pendelschwingungen.

Eine genaue Theorie der Pendelschwingungen erfordert, dass alles berücksichtigt werde, was auf die Bewegung Einfluss haben kann. Es ist daher zu berücksichtigen:

1) Das Gewicht des Pendels und aller Theile, die mit demselben schwingen. 2) Die Widerstände, welche der Aufhängungsmechanismus verursachen kann. 3) Der Gewichtsverlust des Pendels in der Luft, welcher gleich ist dem Gewicht eines Luftvolumens, das so gross ist, als das Volumen des Pendels. 4) Der Luftwiderstand. 5) Die Temperatur der Luft, in welcher das Pendel schwingt. Von diesen Einflüssen kann jedoch nur der erste, von dem Gewichte herrührende mit voller Genauigkeit in Rechnung gebracht werden, alle

übrigen können nur annähernd durch mehr oder weniger naturgemässe Annahmen beachtet werden. Berücksichtigen wir zunächst nur allein das Gewicht, die Form und die Masse des Pendels, und vernachlässigen die unter 2 bis 5 angeführten Nebenumstände, dann erhalten wir folgende

Annäherungstheorie der Pendelschwingungen.

Es sei, Fig. 2, Tafel XXV., A der Drehungspunkt des Pendels. A x eine durch A gehende Vertikallinie, in welcher der Schwerpunkt des Pendelkörpers liegen wird, wenn dasselbe ruht. Dreht man das Pendel aus seiner Ruhelage bis der Schwerpunkt nach B fällt, und überlässt es dann der Einwirkung der Schwere, so schwingt es gegen die Ruheposition hin und es gelangt der Schwerpunkt nach einiger Zeit nach C. Es sei $\widehat{xAB} = \alpha$, $\widehat{CAB} = \varphi$, $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ die Entfernung des Schwerpunktes vom Drehungspunkt, t die Zeit, welche verflossen ist, während das Pendel um den Winkel φ gedreht wurde. G das Gewicht des Pendelkörpers in Kilogrammen. M die auf den Schwerpunkt reduzirte Masse des Pendels, d. h. M ist eine ideale Masse, welche statt der wirklichen Masse des Pendels, in den Schwerpunkt concentrirt, ein eben so grosses Trägheitsmoment gibt als das wirkliche Pendel. Die drehende Bewegung des Pendels erfolgt genau so, wie wenn im Schwerpunkt eine Masse M concentrirt wäre, auf welche nach vertikaler Richtung eine Kraft gleich dem Gewicht G einwirkt.

Nun ist $\frac{d\varphi}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit, $l\frac{d\varphi}{dt}$ die absolute Geschwindigkeit des Punktes C, $d\left(l\frac{d\varphi}{dt}\right) = l\frac{d^2\varphi}{dt}$ die Aenderung dieser Geschwindigkeit im Zeitelemente dt, daher $\frac{l\frac{d^2\varphi}{dt}}{dt} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ die Beschleunigung von C, demnach [vermöge Gleichung (3), Prinzipien der Mechanik, Seite 53]:

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{G}{M}\sin(\alpha - \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Diese Gleichung lässt sich zwar einmal integriren, wodurch man $\frac{d\varphi}{dt}$ als Funktion von t erhält, allein die zweite Integration, wodurch φ als Funktion von t erhalten wird, führt auf ein elliptisches Integrale. Für Anwendungen der Pendeltheorie auf Uhren darf man sich erlauben α und folglich auch $\alpha - \varphi$ als einen so kleinen Winkel

anzusehen, dass $\sin(\alpha - \varphi)$ gleich $(\alpha - \varphi)$ gesetzt werden darf. Dann aber folgt aus obiger Gleichung:

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = k (\alpha - \varphi) \text{ wobei } k = \frac{G}{2 l M} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Versuchen wir dieser Gleichung zu genügen durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A} + \mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wobei $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, λ constante Grössen sind.

Aus (3) folgt

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = - \lambda^2 . (\mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t)$$

Führt man diese Werthe von φ und $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ in (2) ein, so folgt:

$$- \lambda^2 (\mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t) = k \alpha - k (\mathfrak{A} + \mathfrak{M} \sin \lambda t + \mathfrak{N} \cos \lambda t)$$

Dieser Gleichung wird identisch entsprochen, wenn man nimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} = \alpha \\ \lambda = \sqrt{k} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Das Integrale von (2) ist demnach:

$$\varphi = \alpha + \mathfrak{M} \sin \sqrt{k}\, t + \mathfrak{N} \cos \sqrt{k}\, t \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Nun ist für $t = 0$, $\varphi = 0$, $\frac{d \varphi}{d t} = 0$, daher:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \alpha + \mathfrak{N} \\ \left(\frac{d \varphi}{d t}\right)_{t=0} = 0 = \sqrt{k}\, \mathfrak{M} \end{array}\right\} \text{demnach} \begin{array}{l} \mathfrak{N} = - \alpha \\ \mathfrak{M} = 0 \end{array}$$

folglich erhalten wir:

$$\varphi = \alpha (1 - \cos \sqrt{k}\, t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Für $t = 0, \frac{2 \pi}{\sqrt{k}}, \frac{4 \pi}{\sqrt{k}}, \ldots\ldots$ wird $\varphi = 0$, kehrt also das Pendel in seine anfängliche Position zurück.

Für $t = \frac{\pi}{\sqrt{k}}, \frac{3 \pi}{\sqrt{k}}, \frac{5 \pi}{\sqrt{k}}, \ldots\ldots$ wird $\varphi = 2 \alpha$, erreicht also φ seinen grössten Werth, wobei das Pendel um eben so viel von

seiner mittleren Position nach links abweicht, als in der anfänglichen Position nach rechts. Das Pendel schwingt in seiner mittleren Position hin und her und entfernt sich dabei um einen Winkel α von seiner mittleren Stellung. Nennt man T die Zeit eines Schwunges d. h. die Zeit, in welcher das Pendel den Winkel $\varphi = 2\alpha$ zurücklegt, so ist:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k}} = \pi \sqrt{\frac{2\,l\,M}{G}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Diese Zeit ist von dem Ablenkungswinkel oder Schwingungswinkel α unabhängig; wir dürfen also den Satz aussprechen, dass die Schwingungszeit eines Pendels von dem Schwingungswinkel nicht abhängt, in so fern derselbe so klein ist, dass er als unendlich kleine Grösse angesehen werden kann, oder auch: so lange der Schwingungswinkel eine kleine Grösse ist, ist die Schwingungszeit von demselben unabhängig. Die Masse M kann auf folgende Weise ausgedrückt werden. Nennt man $\frac{G}{2g}h^2$ das Trägheitsmoment des Pendelkörpers in Bezug auf eine Axe, die durch den Schwerpunkt geht und deren Richtung jener der wirklichen Drehungsaxe parallel ist, so hat man (vermöge Prinzipien, Seite 118, Nr. 66):

$$M\,l^2 = \frac{G}{2g}h^2 + \frac{G}{2g}l^2$$

oder

$$M = \frac{G}{2g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Führt man diesen Werth in (7) ein, so findet man

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}\left[1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2\right]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Genauere Berechnung der Pendelschwingungen mit Rücksicht auf die Nebenhindernisse etc.

Suchen wir nun das Gesetz der Pendelschwingungen zu erforschen, indem wir 1) nicht nur das Gewicht des Pendels, sondern auch 2) seinen Gewichtsverlust in der Luft, 3) den Luftwiderstand, 4) den Widerstand der Aufhängung berücksichtigen.

Es sei:

$a\,G$ der constante Gewichtsverlust, welcher gleich ist dem Gewicht einer Luftmenge, deren Volumen gleich ist dem Volumen des Pendels,

$b \frac{d\varphi}{dt}$ der Betrag des Luftwiderstandes, welchen wir der Winkelgeschwindigkeit proportional annehmen dürfen, weil die Geschwindigkeit der Bewegung in allen Fällen der Anwendung klein ist,

c der constante Widerstand der Aufhängung,

dann haben wir folgende Gleichung:

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{G \sin(\alpha - \varphi) - a\,G - b\frac{d\varphi}{dt} - c}{M} \quad . \; . \; . \; (1)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{G}{2\,l\,M} \sin(\alpha - \varphi) - \frac{a\,G + c}{l\,M} - \frac{b}{2\,l\,M}\frac{d\varphi}{dt} \; . \; . \; . \; (2)$$

oder wenn wir auch hier wiederum annehmen, dass α so klein ist, dass man keinen merklichen Fehler begeht, wenn $\sin(\alpha - \varphi) = \alpha - \varphi$ gesetzt wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n\frac{d\varphi}{dt} + m\,\varphi = m\,\alpha - p \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{G}{2\,l\,M} \\ \frac{a\,G + c}{M\,l} &= p \\ n &= \frac{b}{2\,M\,l} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Versuchen wir der Gleichung (3) durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A}\,e^{kt} + \mathfrak{B} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

zu genügen, wobei $\mathfrak{A}$, k, $\mathfrak{B}$ constante Grössen sind. Aus (5) folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \mathfrak{A}\,k^2 e^{kt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \mathfrak{A}\,k\,e^{kt} \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Die Werthe (5) und (6) in (3) eingeführt, findet man:

$$(\mathfrak{A}\,k^2 + n\,\mathfrak{A}\,k + m\,\mathfrak{A})\,e^{kt} + m\,\mathfrak{B} = m\,\alpha - p$$

Dieser Gleichung wird für jeden Werth von t entsprochen, wenn man nimmt:

$$k^2 + n\,k + m = 0$$

$$\mathfrak{B} = \alpha - \frac{p}{m}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,\sqrt{-1} \\ \mathfrak{B} &= \alpha - \frac{p}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{n}{2} = \frac{b}{4\,M\,l} \\ \varepsilon &= \frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G}{M\,l} - \left(\frac{b}{2\,M\,l}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8)$$

so wird:

$$k = -\lambda \pm \varepsilon\sqrt{-1}$$

$$\mathfrak{B} = \alpha - \frac{p}{m}$$

Da wir für k zwei Werthe gefunden haben, so liefert jeder derselben ein partikulares Integrale, und das allgemeine Integrale ist die Summe der beiden partikularen, wir erhalten demnach vermöge (5):

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{A}_1\,e^{(-\lambda + \varepsilon\sqrt{-1})\,t} + \mathfrak{A}_2\,e^{(-\lambda - \varepsilon\sqrt{-1})\,t}$$

oder

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + e^{-\lambda t}\left(\mathfrak{A}_1\,e^{\varepsilon\sqrt{-1}\,t} + \mathfrak{A}_2\,e^{-\varepsilon\sqrt{-1}\,t}\right)$$

oder endlich

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} + e^{-\lambda t}\,(\mathfrak{M}\cos\varepsilon\,t + \mathfrak{N}\sin\varepsilon\,t) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

wobei $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei neue Constanten bezeichnen, deren Werthe durch den Initial-Zustand bestimmt werden müssen.

Nun ist

$$\text{für } t = 0,\ \varphi = 0,\ \frac{d\varphi}{dt} = 0$$

demnach wegen (9):

$$0 = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{M} \text{ oder } \mathfrak{M} = -\left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \quad \ldots \quad (10)$$

Ferner folgt aus (9)

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\lambda t} \varepsilon (-\mathfrak{M} \sin \varepsilon t + \mathfrak{N} \cos \varepsilon t) - \lambda e^{-\lambda t} (\mathfrak{M} \cos \varepsilon t + \mathfrak{N} \sin \varepsilon t)$$

folglich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = 0 = \varepsilon \mathfrak{N} - \lambda \mathfrak{M} \text{ oder } \mathfrak{N} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{M} \quad . \; . \; . \; (11)$$

Durch (10) und (11) sind nun die Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ bestimmt, die Gleichung (9) gibt demnach

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m} - e^{-\lambda t} \left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \left(\cos \varepsilon t + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin \varepsilon t\right)$$

oder

$$\varphi = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \left[1 - e^{-\lambda t} \left(\cos \varepsilon t + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sin \varepsilon t\right)\right] \quad . \; . \; (12)$$

Hiermit ist φ als Funktion von t berechnet. Aus (12) folgt

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right) \left(\frac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{\varepsilon}\right) e^{-\lambda t} \sin \varepsilon t$$

Nach jedem Schwung ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, daher ist die Zeit T einer Schwingung

$$T = \frac{\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\,G}{M\,l} - \left(\frac{b}{2\,M\,l}\right)^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13)$$

und diese ist nun abermals constant, obgleich wir auf die verschiedenen Nebenkräfte Rücksicht genommen haben. Luftwiderstand, Gewichtsverlust, Aufhängungswiderstand vermögen also die Dauer einer Schwingung nicht variabel zu machen. Dagegen werden die Ausschlagwinkel der aufeinanderfolgenden Schwingungen immer kleiner und kleiner.

Nennen wir $\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3\ \dots$ die Werthe von φ, welche der Position des Pendels am Ende der ersten, zweiten, drittten Schwingung entsprechen, so ergeben sich diese Werthe, wenn wir in (12) der Reihe nach t gleich $\frac{\pi}{\varepsilon}$, $2\frac{\pi}{\varepsilon}$, $3\frac{\pi}{\varepsilon}$ setzen; daher ist

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
\varphi_2 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 - e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
\varphi_3 &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-3\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Nun sind aber

$$\varphi_1,\ \varphi_1 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_4,\ \varphi_5 - \varphi_4 \ldots\ldots$$

die numerischen Werthe der Winkel, welche der ersten, zweiten, dritten Schwingung entsprechen. Wegen (14) erhalten wir also

$$\left.\begin{aligned}
&\text{erster Schwung:} \\
&\varphi_1 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\text{zweiter Schwung:} \\
&\varphi_1 - \varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\text{dritter Schwung:} \\
&\varphi_3 - \varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-3\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-2\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\text{iter Schwung:} \\
&\varphi_i - \varphi_{i-1} = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-i\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi} + e^{-(i-1)\frac{\lambda}{\varepsilon}\pi}\right) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

woraus man sieht, dass die Schwingungen immer kleiner und kleiner werden und zuletzt ganz aufhören.

Die Bewegung erlahmt in kurzer Zeit, wenn $\frac{p}{m}$ und $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ grosse Werthe haben, d. h. wenn gross ist:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p}{m} = 2a + \frac{2c}{G} \\ \\ \frac{\lambda}{\varepsilon} = \frac{\frac{b}{4Ml}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2G}{Ml} - \left(\frac{b}{2lM}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{8GMl}{b^2} - 1}} \end{array}\right\} \quad . \quad (16)$$

d. h. wenn a, c, b beträchtliche Werthe haben, wenn also die Nebenhindernisse, Reibung, Luftwiderstand, Gewichtsverlust gross sind.

Wir können nun vermöge (13), (15), (16) folgende Sätze aussprechen:

1) Die Schwingungszeit eines Pendels bleibt constant trotz Reibung, Gewichtsverlust und Luftwiderstand.
2) Die Schwingungszeit wird durch den Gewichtsverlust und die Reibung der Aufhängung nicht verändert, sie wird dagegen durch den Luftwiderstand vergrössert, d. h. die Anzahl der Schwingungen in einer gewissen Zeit nimmt ab.
3) Der Schwungwinkel wird theils wegen Reibung und Gewichtsverlust, insbesondere aber wegen des Luftwiderstandes immer kleiner und kleiner und verschwindet zuletzt.

Diese Sätze sind wir aber nur berechtigt auszusprechen, wenn überhaupt der Ausschlagwinkel klein ist, und wenn der Luftwiderstand der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit proportional gesetzt werden darf.

Pendelschwingung mit Reibung und Luftwiderstand.

Wir wollen noch die Schwingungen eines Pendels unter der Voraussetzung berechnen, dass der Luftwiderstand dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit proportional ist.

Für diesen Fall ist die Differenzialgleichung der Bewegung, Fig. 3, Tafel XXV.:

$$l \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{1}{2} \; \frac{G \sin(\alpha - \varphi) - c - c_1 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}{M} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Dabei ist:

G das Gewicht des Pendelkörpers. l Entfernung des Schwerpunktes vom Aufhängepunkt. c eine Constante, welche dem Widerstand der Aufhängung entspricht. c_1 eine Constante für den Luftwiderstand. M die auf den Schwerpunkt des Pendels reducirte Masse desselben.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{G}{2\,l\,M} = m, \quad \frac{c}{2\,l\,M} = q, \quad \frac{c_1}{2\,l\,M} = n \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

so wird die Gleichung (1):

$$\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = m \sin(\alpha - \varphi) - q - n\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} + n\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = m \sin(\alpha - \varphi) - q \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Setzen wir ferner:

$$\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = 2\,y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

so wird

$$\frac{d^2\varphi}{d\,t^2} = \frac{d\,y}{d\,\varphi}$$

demnach wird aus Gleichung (4):

$$\frac{d\,y}{d\,\varphi} + 2\,n\,y = m \sin(\alpha - \varphi) - q \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$y = \mathfrak{A}\, e^{-2\,n\,\varphi} + \frac{m}{4\,n^2 + 1}\,[2\,n \sin(\alpha - \varphi) + \cos(\alpha - \varphi)] - \frac{q}{2\,n} \quad (7)$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Constante der Integration bedeutet. Für $\varphi = 0$ ist $\frac{d\,\varphi}{d\,t} = 0$ und $y = 0$, demnach:

$$0 = \mathfrak{A} + \frac{m}{4\,n^2 + 1}\,(2\,n \sin\alpha + \cos\alpha) - \frac{q}{2\,n} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Aus (7) und (8) $\mathfrak{A}$ eliminirt und für y seinen Werth aus (5) gesetzt, erhält man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right)^2 = \frac{q}{2\,n}\left(e^{-2\,n\,\varphi} - 1\right) + \frac{m}{4\,n^2 + 1}\left\{\begin{array}{l} 2\,n \sin(\alpha - \quad) + \cos(\alpha - \varphi) \\ - e^{-2\,n\,\varphi}(2\,n \sin\alpha + \cos\alpha) \end{array}\right\} \quad (9)$$

Betrachtet man α und $\alpha - \varphi$ als kleine Winkel, deren dritte und höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen, so findet man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{q}{2n}(1 - 2n\varphi + 2n^2\varphi^2 - 1)$$

$$+ \frac{m}{4n^2+1}\left\{\begin{array}{l} 2n(\alpha-\varphi) + 1 - \frac{1}{2}(\alpha-\varphi)^2 \\ -(1 - 2n\varphi + 2n^2\varphi^2)\left(2n\alpha + 1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \end{array}\right\}.$$

oder

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (m\alpha - q)\varphi - \left(\frac{1}{2}m - nq\right)\varphi^2 \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Hieraus folgt

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2(m\alpha - q)\varphi - (m - 2nq)\varphi^2}} \quad . \; , \; . \; . \; . \quad (11)$$

Das Integrale dieser Gleichung ist

$$t = \frac{1}{\sqrt{m - 2nq}}\left[\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin}\left(1 - \frac{m - 2nq}{m\alpha - q}\varphi\right)\right] \quad . \; . \quad (12)$$

oder

$$\varphi = \frac{m\alpha - q}{m - 2nq}\left(1 - \cos\sqrt{m - 2nq}\, t\right). \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Nennt man T die Zeit eines einfachen Pendelschwunges, so ist diese vermöge (13):

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{m - 2nq}} = \pi\sqrt{\frac{2lm}{G}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{c\,c_1}{lMG}}}$$

oder annähernd, weil $\frac{c\,c_1}{lMG}$ eine sehr kleine Grösse ist:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2lM}{G}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{c\,c_1}{lMG}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Dieser Ausdruck ist von dem anfänglichen Ausschlagwinkel α unabhängig. Wenn also dieser Winkel α so klein ist, dass man die dritten und höheren Potenzen desselben vernachlässigen darf, so ist die Schwingungszeit unabhängig von dem Ausschlagwinkel. Die Schwingungszeit fällt jedoch wegen des Aufhängewiderstandes c und wegen des Luftwiderstandes c_1 kleiner aus, als sie in dem Falle wäre, wenn diese Widerstände nicht vorhanden wären.

Aber obgleich die Schwingungszeit von α nicht abhängt, so werden dennoch die Schwingungswinkel allmählig kleiner und kleiner, wie sogleich bewiesen werden soll.

Nennen wir α_1 den Winkel A_1CB, um welchen die Pendelstange links von der Vertikalen BC abweicht, nachdem der erste Schwung

geschehen ist, so wird für $t = T = \frac{\pi}{\sqrt{m - 2nq}}$, $\varphi = \alpha + \alpha_1$ daher vermöge (13):

$$\alpha + \alpha_1 = 2 \frac{m\alpha - q}{m - 2nq}$$

Hieraus folgt:

$$\alpha_1 = \alpha \frac{m + 2nq}{m - 2nq} - \frac{2q}{m - 2nq}$$

oder weil $2nq$ eine gegen m sehr kleine Grösse ist

$$\alpha_1 = \alpha + \frac{4nq}{m}\alpha - \frac{2q}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

n, q, α sind sehr kleine Grössen, $\frac{4nq}{m}\alpha$ ist deshalb bedeutend kleiner als $\frac{2q}{m}$, α_1 ist daher kleiner als α. Das Pendel ist daher am Ende des ersten Schwunges nicht so weit von der Vertikalen entfernt als am Anfang dieses Schwunges.

Bezeichnet man nun mit $\alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Winkel, welche das Pendel nach dem zweiten, dritten Schwung mit der Vertikalen bildet, so hat man wegen (15):

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{4nq}{m}\alpha_1 - \frac{2q}{m}$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{4nq}{m}\alpha_2 - \frac{2q}{m}$$

Diese Winkel nehmen also fort und fort ab, bis zuletzt ein Stillstand eintritt.

Schwungrad-Schwingungen.

Bei Taschenuhren, Reiseuhren und überhaupt bei solchen Uhren, die eine feste Aufstellung nicht haben können, wird als schwingender Körper ein Schwungrad gebraucht. Um dasselbe schwingen zu machen, nimmt man eine schraubenförmig oder spiralförmig zusammengewundene Stahlfeder, befestigt das eine der beiden Enden mit der Axe des Schwungrades, das andere Ende hingegen mit irgend einem unbeweglichen Körper, bringt hierauf das Rad aus der Gleichgewichtslage, wobei die Feder entweder mehr auf- oder mehr zusammengewunden wird und überlässt sodann das Schwungrad der Einwirkung der Feder.

Wir haben in der Theorie der Spiralfedern, Seite 116, und in der Theorie der schraubenförmigen Federn, Seite 120, gezeigt, dass

das statische Moment der Kraft, mit welcher eine solche Feder in ihre natürliche Form zurückzukehren strebt, wenn sie um einen gewissen Winkel aus dieser natürlichen Lage verwunden wurde, nur dann dem Verwindungswinkel proportional ist, wenn die Feder eine solche Einrichtung hat, dass ihr Schwerpunkt stets in der Drehungsaxe bleibt, während sie ihre Form ändert. Wir setzen in der folgenden Theorie voraus, dass die Feder diese Eigenschaft besitze.

Es sei, Fig. 4, Tafel XXV., A B die Gleichgewichtsposition. $\widehat{BAD} = \alpha$ der Winkel, um welchen anfänglich das Schwungrad aus seiner Gleichgewichtsposition abgelenkt und dann der Einwirkung der Feder überlassen wurde. $\widehat{DAC} = \varphi$ der Winkel, um welchen das Schwungrad während einer gewissen Zeit t zurückgeschwungen ist, so können wir nach obigem Erfahrungssatz annehmen, dass das statische Moment der Federkraft in der Stellung A C durch $\lambda(\alpha - \varphi)$ ausgedrückt wird, wobei λ eine Constante ist, die von der Starrheit der Feder abhängt.

Nennen wir M das als Masse ausgedrückte Trägheitsmoment des Schwungrades, so erhalten wir als Differenzialgleichung der Bewegung:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda(\alpha - \varphi) - b\,\frac{d\varphi}{dt} - c}{M} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wobei angenommen ist, 1) dass der Luftwiderstand der Winkelgeschwindigkeit proportional ist und durch $b\,\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt werden kann; 2) dass die Axenreibung constant ist und durch c bezeichnet wird; 3) dass der Schwerpunkt des Schwungrades in seine Drehungsaxe fällt; 4) dass die Masse der Feder, so wie auch die etwa während der Bewegung eintretenden Aenderungen der Lage ihres Schwerpunktes vernachlässigt werden dürfen.

Unter diesen Voraussetzungen stimmt (der Form nach) die Gleichung (1) ganz mit jener überein, die wir für ein Pendel mit sehr kleinem Schwingungswinkel gefunden haben.

Setzen wir abkürzend:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{\lambda}{2M} \\ n &= \frac{b}{2M} \\ p &= \frac{c}{2M} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

so wird die Gleichung (1)

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + n \frac{d \varphi}{d t} + m \varphi = m \alpha - p \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Versuchen wir dieser Gleichung durch die Annahme

$$\varphi = \mathfrak{A} e^{k t} + \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

zu genügen. Aus (4) folgt

$$\frac{d \varphi}{d t} = k \mathfrak{A} e^{k t}, \quad \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = k^2 \mathfrak{A} e^{k t}$$

Führt man diese Werthe von φ, $\frac{d \varphi}{d t}$, $\frac{d^2 \varphi}{d t^2}$ in (3) ein, so findet man:

$$(k^2 \mathfrak{A} + n k \mathfrak{A} + m \mathfrak{A}) e^{k t} + m \mathfrak{B} = m \alpha - p$$

Damit diese Gleichung eine identische wird, muss sein:

$$k^2 + n k + m = 0$$

$$m \mathfrak{B} = m \alpha - p$$

und hieraus folgt

$$\left.\begin{aligned} k &= -\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1} \\ \mathfrak{B} &= \alpha - \frac{p}{m} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Da wir für k zwei Werthe finden, so gibt jeder derselben ein partikulares Integrale, und ist das allgemeine Integrale die Summe der beiden partikularen Integrale. Wir erhalten demnach:

$$\varphi = \mathfrak{C} e^{\left(-\frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\right) t} + \mathfrak{C} e^{\left(-\frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\right) t} + \alpha - \frac{p}{m}$$

Es ist aber

$$e^{\frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\, t} = \cos \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t + \sqrt{-1} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t$$

$$e^{-\frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2} \sqrt{-1}\, t} = \cos \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t - \sqrt{-1} \sin \frac{1}{2} \sqrt{4 m - n^2}\, t$$

daher findet man

$$\varphi = e^{-\frac{n}{2}t}\,\mathfrak{C}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t + \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\right)$$

$$+ e^{-\frac{n}{2}t}\,\mathfrak{C}\left(\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t - \sqrt{-1}\,\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\right)$$

$$+ \alpha - \frac{p}{m}$$

oder wenn man $\mathfrak{C} + \mathfrak{C} = \mathfrak{M}$, $(\mathfrak{C} - \mathfrak{C})\sqrt{-1} = \mathfrak{N}$ setzt

$$\varphi = \alpha - \frac{p}{m}$$

$$+ e^{-\frac{n}{2}t}\left(\mathfrak{M}\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t + \mathfrak{N}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\right) \quad (6)$$

Durch Differenziation dieses Ausdruckes folgt, wenn man $\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2} = \mu$ setzt

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{-\frac{n}{2}t}\left\{\begin{array}{l}\left(\mathfrak{N}\,\mu - \mathfrak{M}\,\frac{n}{2}\right)\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t \\ -\left(\mathfrak{M}\,\mu + \mathfrak{N}\,\frac{n}{2}\right)\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\,m - n^2}\,t\end{array}\right\} \quad . \; . \quad (7)$$

Die Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ werden bestimmt, indem für $t = 0$ sowohl φ als auch $\frac{d\varphi}{dt}$ verschwindet; daher hat man wegen (6) und (7)

$$0 = \alpha - \frac{p}{m} + \mathfrak{M}$$

$$0 = \mathfrak{N}\,\mu - \mathfrak{M}\,\frac{n}{2}$$

oder

$$\mathfrak{M} = -\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)$$

$$\mathfrak{N} = -\frac{n}{2\,\mu}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right) = -\frac{n}{\sqrt{4\,m - n^2}}\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)$$

Wir haben demnach schliesslich

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left[1 - e^{-\frac{n}{2}t}\left(\begin{array}{r}\cos\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\\ +\frac{n}{\sqrt{4m-n^2}}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\end{array}\right)\right]\\ \frac{d\varphi}{dt} &= \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\frac{2m}{\sqrt{4m-n^2}}e^{-\frac{n}{2}t}\sin\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}\,t\end{aligned}\right\}(8)$$

Nach jedem Schwung ist $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, d. h. immer nach Verlauf einer Zeit $\frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{4m-n^2}}$

Die Zeit T einer jeden Schwingung ist demnach:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{4m-n^2}} = \pi\frac{\sqrt{\frac{2M}{\lambda}}}{\sqrt{1-\frac{b^2}{8\lambda M}}} \quad \ldots\ldots (9)$$

Die Nebenhindernisse vermögen also nicht zu bewirken, dass die Schwingungszeiten veränderlich werden, dagegen aber verursachen sie auch hier, dass der Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner wird, so dass zuletzt Stillstand eintritt. Setzen wir $0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$ die Werthe von φ, welche den aufeinanderfolgenden Schwingungen entsprechen, so erhalten wir dieselben, wenn wir in (8) für φ setzen:

$$\varphi = 0,\ \frac{\pi}{\mu},\ 2\frac{\pi}{\mu},\ 3\frac{\pi}{\mu}\ \ldots\ldots\ldots$$

Es ist demnach:

$$\varphi_1 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\varphi_2 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 - e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

$$\varphi_3 = \left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-3\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right)$$

.

Nun sind aber $\varphi_1 - 0,\ \varphi_1 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_2,\ \varphi_3 - \varphi_4,\ \varphi_5 - \varphi_4 \ldots\ldots$ die Winkel der aufeinanderfolgenden Schwingungen. Die Werthe dieser Winkel sind demnach:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(1 + e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\
\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}} + e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\
\left(\alpha - \frac{p}{m}\right)\left(e^{-3\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}} + e^{-2\frac{n}{2}\frac{\pi}{\mu}}\right) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} \ldots \quad (10)$$

woraus zu ersehen ist, dass die Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner werden.

Aus (9) sieht man, 1) dass die Zeit einer Schwingung klein ausfällt, wenn λ gross ist, d. h. wenn die Feder starr ist; 2) dass die Schwingungszeit durch den Luftwiderstand vergrössert wird oder dass die Zahl der Schwingungen, die in einer gewissen Zeit geschehen, vermindert wird; 3) dass bei hoher Temperatur die Schwingungszeit grösser ist, als bei niedriger, indem die Wärme das Schwungrad ausdehnt, daher das Trägheitsmoment M desselben vergrössert; 4) dass die Axenreibung auf die Dauer einer Schwingung keinen Einfluss ausübt, wohl aber auf die Grösse der einzelnen Schwingungswinkel (wegen 10).

Einrichtung einer Uhr im Allgemeinen.

Die im Vorhergehenden entwickelte Schwingungstheorie hat uns gelehrt, dass die Schwingungszeit sowohl eines Pendels als auch eines Schwungrades selbst unter der Einwirkung des Luftwiderstandes und anderer Nebenhindernisse constant bleibt, dass jedoch die Schwingungswinkel immer kleiner und kleiner werden.

Ein Pendel oder ein Schwungrad kann daher ohne sonstige Hilfseinrichtungen als Uhr gebraucht werden, wenn es sich nur um die Messung von kürzeren Zeitabschnitten handelt. Allein in den meisten Fällen der Anwendung verlangen wir von einer Uhr, dass sie längere Zeit, z. B. einen Tag, eine Woche, einen Monat lang einen continuirlich regelmässigen Gang habe, um auch grössere Zeitabschnitte messen zu können, und dies leistet ein Pendel oder

ein Schwungrad ohne Hilfseinrichtungen nicht, sondern wir müssen dafür sorgen, dass die Schwingungen nicht erlahmen, nicht fort und fort kleiner werden, sondern im Gegentheil lange Zeit hindurch in unveränderlicher Weise fortdauern, was nur möglich wird, wenn wir auf den schwingenden Körper einen Motor in solcher Weise einwirken lassen, dass derselbe dem Pendel oder dem Schwungrad bei jedem Schwung genau so viel an Kraft ersetzt, als durch die Nebenhindernisse der Bewegung verloren geht.

Wir brauchen also zu einer Uhr nebst 1) Pendel oder Schwungrad, 2) einen Motor, der die Wirkungen der Nebenhindernisse aufhebt, 3) einen Hilfsmechanismus, welcher es möglich macht, dass der Motor bei jedem Schwung mit mathematischer Genauigkeit das an Kraft ersetzt, was durch die Nebenhindernisse verloren geht, 4) ein Zählwerk, welches die Anzahl der Schwingungen des Pendels wie des Schwungrades zählt. Als Motoren werden Gewichte oder zusammengewundene Stahlfedern gebraucht. Der unter 3) bezeichnete Hilfsmechanismus wird Hemmung genannt; das Zählwerk besteht gewöhnlich aus Zahnrädern, Zeiger und Zifferblatt. Werden diese Bestandtheile der Uhr sorgfältig und angemessen ausgeführt und zusammengesetzt, so entsteht in der Uhr unter der Einwirkung des Motors ein Beharrungszustand, in welchem dem Pendel oder Schwungrad bei jedem Schwung genau an Kraft ersetzt wird, was bei einem Schwung durch die Nebenhindernisse verloren geht. Dieser Beharrungszustand tritt von selbst ein, weil (wie wir in der Folge sehen werden) der Kraftverlust durch die Nebenhindernisse mit der Grösse des Schwingungswinkels wächst, der Kraftersatz durch den Motor und die Hemmung dagegen mit der Grösse des Schwingungswinkels abnimmt.

Setzt man z. B. eine Pendeluhr so in Bewegung, dass der erste Schwingungswinkel sehr klein ist, so wird während dieses ersten Schwunges nur sehr wenig Kraft verloren, wird dagagen durch den Motor weit mehr Kraft ersetzt, das Pendel gewinnt daher beim ersten Schwung an lebendiger Kraft, was zur Folge hat, dass der zweite Schwung grösser ausfällt als der erste. Dadurch aber wird der Kraftverlust beim zweiten Schwung grösser, der Kraftersatz dagegen kleiner, so dass das Pendel beim zweiten Schwung an lebendiger Kraft weniger gewinnt als beim ersten. Der dritte Schwung wird nun wiederum grösser sein als der zweite, allein dadurch kann es nun kommen, dass der Kraftverlust dem Kraftersatz gleich wird, so dass nun während des dritten Schwunges die lebendige Kraft weder vermindert noch erhöht wird, und dann ist der Beharrungszustand eingetreten, in welchem die Zeit jeder Schwingung den

gleichen Werth hat und (so lange der Schwingungswinkel klein ist) unabhängig ist von der Intensität, mit welcher der Motor einwirkt. Ist diese Intensität gross, so tritt ein Beharrungszustand mit grossem Schwingungswinkel ein, ist diese Intensität klein, so tritt ein Beharrungszustand mit kleinem Schwingungswinkel ein. War die Intensität des Motors veränderlich (und z. B. abnehmend, wie bei einer Stahlfeder), so tritt ein Bewegungszustand mit veränderlichen Schwingungswinkeln ein, aber dennoch bleibt die Schwingungszeit unveränderlich.

Da die Unveränderlichkeit der Schwingungszeit doch nicht mathematisch genau ist, so kann eine Uhr nur dann einen möglichst unveränderlichen Gang annehmen, wenn die Construktion der Uhr einerseits und die treibenden wie hindernden Kräfte eine merkliche Veränderung nicht erleiden; daher eine äusserst genaue Ausführung aller Bestandtheile und sorgfältige Zusammensetzung derselben unerlässlich, denn nur bei einer so vollkommenen Ausführung werden die verschiedenen Bewegungshindernisse so klein sein, dass eine äusserst schwache Einwirkung des Motors genügt, werden also die wechselseitigen Pressungen der Bestandtheile so klein sein, dass eine Abnützung und Deformirung kaum eintritt, wird sich also der ursprüngliche Zustand der Construktion beinahe vollkommen conserviren und ein sich gleich bleibender Gang der Uhr erhalten. Diese sorgfältige Einrichtung und Ausführung der Uhr ist die Aufgabe des Mechanikers, aber das, was einen solchen Mechanismus zu einer Uhr macht, ist doch der sich von selbst einstellende Beharrungszustand. Wenn sich ein solcher Zustand nicht von selbst einstellte, würde kein Mechaniker im Stande sein, eine Uhr mit länger dauerndem gleichförmigem Gang herzustellen. Der Mechaniker hat nichts zu machen, dass ein Beharrungszustand eintritt, sondern er hat nur dafür zu sorgen, dass der von selbst eintretende Beharrungszustand von der Art ist, dass sich in demselben das ganze Werk möglichst unveränderlich erhält. Es verhält sich also bei einer Uhr wie bei jeder Maschine, auch da tritt von selbst ein Beharrungszustand ein und der Mechaniker hat nur dafür zu sorgen, dass dieser Beharrungszustand von gewisser Art sei.

Berechnung des Beharrungszustandes.

Was im Vorhergehenden mit Worten erklärt wurde, kann auch auf folgende Weise durch Rechnung nachgewiesen werden.

Es sei:

F_1 die auf den Umfang des Hemmrades reduzirte Kraft des Motors (Feder oder Gewicht), d. h. die Kraft, mit welcher der Umfang

des Hemmrades durch den Motor getrieben wird oder auch der Druck des Radzahnes gegen den Hemmungsbestandtheil, wenn das Hemmrad ruht,

M_1 die auf den Umfang des Hemmrades reduzirte Masse aller Uhrbestandtheile von der Treibaxe ab bis inklusive Hemmungsrad,

s die Weglänge, durch welche der Zahn des Hemmrades vorrückt, während der Kraftersatz stattfindet,

v die Geschwindigkeit am Umfang des Rades in dem Moment, wenn der Weg s durchlaufen ist, also am Ende der Zeit, während welcher der Kraftersatz stattfindet,

α der Schwungwinkel des Pendels oder des Schwungrades im Beharrungszustande des Uhrganges,

u die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher ein Schwung erfolgt.

Dies vorausgesetzt, schliessen wir nun wie folgt:

Der Motor entwickelt bei einem Schwung eine Wirkungsgrösse $F\,s$ und die Masse M_1 besitzt am Ende der Einwirkung des Motors eine lebendige Kraft $M_1\,v^2$. Bei einem Schwung wird also dem Pendel durch den Motor nur eine Wirkung $F\,s - M_1\,v^2$ mitgetheilt, und diese muss im Beharrungszustand gleich sein der totalen Wirkung aller Widerstände während eines Schwunges. Der mittlere Werth des Widerstandes kann ausgedrückt werden durch

$$a + a_1\,u + a_2\,u^2$$

wobei a, a_1, a_2 für eine bestimmte Uhr constante Grössen sind. Aber der Weg, durch welchen dieser Widerstand überwunden wird, ist offenbar dem Winkel α proportional. Die Wirkung, welche der Ueberwindung sämmtlicher Widerstände während eines Schwunges entspricht, ist daher ein Ausdruck von der Form

$$\alpha\,(a + a_1\,u + a_2\,u^2)$$

Daher hat man die Gleichheit

$$\alpha\,(a + a_1\,u + a_2\,u^2) = F\,s - M_1\,v^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(1)$$

Allein für eine bestimmte Uhr sind die Geschwindigkeiten u und v dem Winkel α proportional, kann man also setzen $u = b\,\alpha$, $v = b_1\,\alpha$, setzt man diese Werthe in (1), so nimmt diese Gleichung die Form an

$$\alpha\,(c + c_1\,\alpha + c_2\,\alpha^2) = F\,s - c_3\,\alpha^2 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

wobei $c\ c_1\ c_2\ c_3$ für eine bestimmte Uhr constante Grössen sind. Hieraus folgt

$$F = \frac{c\,\alpha + c_1\,\alpha^2 + c_2\,\alpha^3 + c_3\,\alpha^4}{s} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

oder wenn man aus (2) α sucht, so findet man

$$\alpha = \text{Funct}\,(F\,s) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Die Gleichung (3) bestimmt die Elastizitätskraft, welche die Feder besitzen muss, damit im Beharrungszustand der Bewegung ein Schwingungswinkel von einer gewissen Grösse α eintritt. Die Gleichung (4) dagegen bestimmt die Grösse dieses Schwingungswinkels, wenn die Elastizitätskraft der Feder bekannt ist.

Aus (3) sieht man, dass ein grosser Schwingungswinkel eine starke, ein kleiner Schwingungswinkel eine schwache Triebfeder erfordert. Zur Ausführung einer Uhr muss die passende Feder durch Versuche bestimmt werden.

Damit aber ein Beharrungszustand eintreten kann, sei es nun dass die Feder stark oder schwach wirkt, ist noch wesentlich der Anforderung zu entsprechen, dass der Kraftersatz nicht am Anfang, sondern am besten in der Mitte des Schwunges stattfindet. Denn wenn der Kraftersatz am Anfang des Schwunges stattfände, würde derselbe mit der Grösse des Schwungwinkels nicht variabel sein, was durchaus nothwendig ist, damit ein Beharrungszustand eintreten kann.

Beschreibung mehrerer Uhrwerke.

Pendeluhr mit Ankerhemmung.

Fig. 5 und 6, Tafel XXV. a a das Gestell. b c d das Pendel. d die Aufhängung desselben vermittelst einer Stahlfeder. b die Pendelstange. c der linsenförmige Pedelkörper. e eine Axe. *f* der daran befestigte Anker. g ein Mitnehmer, derselbe ist mit e verbunden und geht durch eine in der Pendelstange angebrachte Oeffnung. h das Hemmungsrad. k ein kleines Getriebe. h und k sind mit der Axe i verbunden. l ein Zahnrad. m das Gehäuse der als Motor wirkenden Spiralfeder. Wird diese Feder zusammengewunden, so sucht sie zunächst vermittelst der Räder l und k das Hemmungsrad nach der Richtung des Pfeiles zu treiben. Allein wenn das Pendel ruht, entsteht hierdurch noch keine Bewegung, weil der Anker in die Zähne des Hemmungsrades eingreift und dessen Bewegung hemmt. Wird aber auch das Pendel in Bewegung versetzt, so be-

wegt es vermittelst des Mitnehmers g den Anker hin und her, so dass derselbe bald an der einen, bald an der andern Seite in das Hemmungsrad eingreift, und dadurch dem Hemmungsrad gestattet, bei jedem Pendelschwung um eine halbe Zahntheilung fortzurücken.

Der Vorgang während einer Hin- und Herschwingung des Pendels wird durch folgende Zeichnungen und Beschreibungen deutlich gemacht.

Fig. 7, Tafel XXV. zeigt die Stellung des Ankers und Rades, wenn das Pendel seinen Schwung von rechts nach links beginnt. Der Zahn a des Rades liegt an der Krümmung des Hakens g und wird gehemmt. Der Haken h steht ausser dem Bereich des Rades.

Fig, 8, Tafel XXV. Das Pendel ist um so viel nach links geschwungen, dass die Zahnspitze von a an der Abschnittsfläche von g steht. Der Haken h ist in das Bereich des Rades l eingetreten.

Fig. 9, Tafel XXV. Das Pendel ist noch weiter links. Der Zahn a ist unten an der Spitze des Abschnittes und verlässt diese Spitze. Der Haken h steht im Bereich des Rades l.

Fig. 10, Tafel XXV. Das Hemmungsrad ist vorgerückt, wird aber durch h am Zahn *f* gehemmt. g steht ausserhalb des Rades.

Fig. 11, Tafel XXV. Der Pendelschwung ist zu Ende. Der Haken h greift tief in das Rad l ein, der Haken g steht weit ausser dem Rade.

Aehnlich wie bei diesem Schwung nach links, sind auch die Erscheinungen bei dem folgenden Schwung nach rechts. Man wird leicht erkennen, dass bei jedem Schwung Kraftverlust stattfindet in der Zeit, wenn die äussere Hakenfläche von h an *f*, oder die innere Hakenfläche von g an a hinschleift, und dass dieser Verlust um so grösser ist, je grösser der Schwingungswinkel, weil sich darnach die Länge der Bogen richtet, längs welchen Schleifungen stattfinden. Anderseits wird man aber auch erkennen, dass dem Pendel Kraft ersetzt wird, jedesmal, wenn eine Zahnspitze an der Abschrägung eines Hakens hingleitet und weil der Druck des Zahnes gegen diese Abschrägung gross oder klein ausfällt, je nachdem die Bewegung langsam oder schnell erfolgt, so ist der Kraftersatz gross, wenn der Schwingungswinkel klein, und ist der Kraftersatz klein, wenn der Schwingungswinkel gross ist. Kraftersatz und Kraftverlust müssen also nothwendig bei einem gewissen Schwingungswinkel gleich ausfallen und wenn dies eingetreten ist, ist der Beharrungszustand vorhanden.

Cylinder-Hemmung mit Schwungrad.

Fig. 12, Tafel XXV. a a das Gestell. b das Schwungrad. c die Schwungradfeder. d der Cylinder. e das Hemmungsrad. *f*, g Räderübersetzung. h das Gehäuse der Triebfeder. Der sogenannte Cylinder d ist, wie die folgenden Figuren zeigen, ein hohler halbcylindrischer Körper, der mit dem Schwungrad drehende Schwingungen macht. Das Hemmungsrad ist mit keilförmigen Zähnen versehen. Die Flächen $i\ i_1$, $k\ k_1$ der Zähne bilden mit den Radien i o, k o Winkel, die kleiner als 90° sind. Das Spiel dieser Hemmung wird durch die nachfolgenden Figuren erklärt.

Fig. 13, Tafel XXV. zeigt die Stellung, wenn das Schwungrad seinen Linksschwung vollendet hat und den nächsten Rechtsschwung beginnt. Das Hemmungsrad wird durch die Triebfeder nach rechts getrieben, seine Spitze i_1 berührt (mit Pressung) den äusseren Umfang des Cylinders.

Fig. 14, Tafel XXV. Das Schwungrad befindet sich im Rechtsschwung. Die schiefe Ebene $i\ i_1$ wirkt (weil $\widehat{o\ i\ i_1} < 90^0$ ist) treibend auf den Cylinder ein, es findet also nun Kraftersatz statt.

Fig. 15, Tafel XXV. Das Schwungrad ist im Rechtsschwung begriffen. Der Zahn $i\ i_1$ steht in der Höhlung des Cylinders und drückt mit seiner Spitze i_1 gegen die innere Fläche der Höhlung. Es findet Reibung, daher Kraftverlust statt.

Fig. 16, Tafel XXV. Ende des Rechtsschwunges oder Anfang des Linksschwunges. Das Hemmungsrad ruht. Die Spitze i_1 drückt gegen die innere Höhlung, aber die Richtung des Druckes geht durch die Drehungsaxe des Cylinders, daher wird derselbe nicht getrieben.

Fig. 17, Tafel XXV. Das Schwungrad befindet sich im Linksschwung. Die schiefe Ebene $i\ i_1$ wirkt rechts auf den Cylinder und schnellt das Schwungrad weiter fort. Es findet also jetzt abermsls Kraftersatz statt.

Hat der Punkt i den Cylinder verlassen, so wird das Hemmungsrad frei, es fällt vor und die Spitze des nächstfolgenden Zahnes schlägt links an die äussere Fläche des Cylinders an. Bei einem ganzen Hin- und Herschwung findet, wie man sieht, zweimal Kraftverlust und zweimal Kraftersatz statt. Kraftverlust, wenn die Zahnspitze gegen die innere und gegen die äussere Fläche des Cylinders drückt. Der Kraftersatz findet dagegen statt, wenn die schiefe Fläche eines Zahnes gegen die Cylinderenden wirkt. Ist der Schwingungswinkel gross, so sind es auch die Weglängen an der äussern

und innern Fläche des Cylinders, längs welchen die Reibung überwunden werden muss; ist demnach der Kraftverlust gross. Dagegen fällt in diesem Falle der Kraftersatz klein aus, weil während der Einwirkung der schiefen Ebene eines Zahnes der Cylinder schnell ausweicht, was eine Verminderung des Druckes zwischen Zahn und Cylinder zur Folge hat. Ist dagegen der Schwingungswinkel klein, so tritt in Bezug auf Kraftverlust und Kraftersatz das Entgegengesetzte ein. Hieraus erkennt man, dass auch hier ein Beharrungszustand eintreten muss, in welchem Kraftersatz und Kraftverlust gleich sind. Treibt die Feder stark, so sind die Schwingungswinkel gross, treibt sie schwach, so sind die Schwingungswinkel klein, die Schwingungszeit ändert sich jedoch nicht.

Ruhende Stiftenhemmung.

Fig. 18 und 19, Tafel XXV. a ist das Hemmrad. Es wird durch den Motor nach der Richtung des Pfeiles getrieben und ist mit zwölf Stiften versehen, die die Form von Kreissegmenten haben. Die Hemmung besteht aus zwei Haken b und c, die um die halbe Theilung von einander abstehen, und deren Enden schief abgeschnitten sind. Die Arme b_1 c_1 dieser Haken und der Stiel e bilden ein Stück, das sich um d dreht. Das untere Ende *f* des Stieles ist gabelförmig. g ist ein Schwungrad, das, wenn es in Bewegung versetzt wird, unter der Einwirkung einer Feder Hin- und Herschwingungen macht. Die Axe des Schwungrades ist mit einer Kurbel h versehen, deren Zapfen beim Hin- und Herschwingen des Rades an die Gabel *f* schlägt und dieselbe bald nach links, bald nach rechts wirft, wodurch die Haken b und c abwechselnd in das Bereich des Kreises gerathen, in welchem sich die Stiftenmittel des Hemmrades a bewegen. So lange der Kurbelzapfen von h mit *f* nicht in Contakt ist, schwingt das Rad g ganz frei unter der Einwirkung der Feder, und ruhen alle übrigen Theile des Werkes. Wie aber dieser Contakt eintritt, wird zuerst das Hebelsystem b b_1 c c_1 getrieben, bis ein Stift an der schiefen Fläche eines der Haken hinzugleiten beginnt, und dabei findet durch Reibung Kraftverlust statt. Allein so wie ein Stift an der schiefen Ebene eines Hakens hingleitet, wird das Hebelsystem durch die obere Triebfeder getrieben, und dadurch wirkt der Stiel e vermittelst der Gabel *f* auf den Zapfen der Kurbel h ein, was zur Folge hat, dass dem Schwungrad Kraft ersetzt wird.

Freie Hemmung.

Fig. 1, Tafel XXVI. stellt die wesentlichen Bestandtheile einer freien Hemmung vor. Das mit einfachen Zähnen versehene Hemmungsrad l wird durch die Triebfeder fortwährend nach der Richtung des Pfeiles, also nach links getrieben. Ueber dem Hemmungsrad befindet sich eine Axe, mit welcher folgende Bestandtheile verbunden sind: 1) ein in der Zeichnung nicht dargestelltes Schwungrad das durch eine Schwungfeder in schwingenden Bewegungen erhalten wird; 2) eine runde mit einem Ausschnitt (bei b) versehene Scheibe a; 3) eine kleinere, mit einer Nase c versehene Scheibe, die vor der Scheibe e angebracht ist. d e *f* ist ein dreiarmiger Hebel. Am Ende des Armes e ist ein Ansatz k angebracht, welcher die Bewegung des Rades l hemmt, wenn derselbe im Bereich der Radzähne steht. Gegen den Arm d ist oben ein zartes Federchen g befestigt, dessen Ende über das Ende des Armes d etwas hinausragt und in die Peripherie des Kreises hineinreicht, der von der Spitze der Nase c beschrieben wird, wenn das Schwungrad schwingt. Der Arm *f* wird durch ein Federchen i gegen einen Stift h gedrückt. Schwingt das Schwungrad nach links, so begegnet die Nase c dem Ende des leichten Federchens g, biegt dasselbe in die Höhe und lässt es hierauf wieder niederfallen. Hierbei bleibt jedoch der dreiarmige Hebel stehen, und ist das Rad l durch den Ansatz bei k gehemmt. Schwingt hierauf das Rad nach rechts zurück, so kommt die Spitze der Nase c neuerdings mit dem Ende des Federchens g in Contakt, weil sich aber dieses nun an den Arm d anlegt, so muss nun das Winkelhebelsystem d e *f* um seine Axe gedreht werden, was zur Folge hat, 1) dass der Ansatz k aus dem Bereich des Rades l hinausrückt, wodurch dieses selbst frei wird; 2) dass die Spitze des Zahnes m mit der Spitze b des Einschnitts der Scheibe a zusammentrifft und diese Scheibe nach links hinausschnellt, wodurch der Zahn vorrückt. Allein so wie die Spitze von c das Ende des Federchens g verlässt, wird der dreiarmige Winkelhebel durch das Federchen i rechts drehend geschnellt, bis *f* an dem Stift h anliegt und das Ende k abermals in das Bereich des Rades l hereintritt und der auf n folgende Zahn das Rades l an k anstösst, wodurch dieses abermals gehemmt wird. Die Kraftverluste sind bei dieser Hemmung sehr klein und reduziren sich auf die Wirkungen, welche die Deformirungen der zarten Federchen g und i erfordern.

SIEBENTER ABSCHNITT.

Maschinen die durch Menschenkraft bewegt werden.

Der Mensch und die Thiere als Motoren.

Der Organismus des Menschen wie des Thieres wird in mancher Hinsicht sehr verständlich, wenn man denselben mit der Einrichtung und Wirkungsweise einer complizirten Maschine vergleicht, oder schlechtweg als eine eigenthümlich eingerichtete Maschine betrachtet. Eine solche Vergleichung hat allerdings im ersten Moment für das Gefühl etwas Abstossendes, indem es besorgt ist, dass hierdurch ein für den Menschen unwürdiges Ergebniss hervorgehen könnte. Allein eine solche Besorgniss ist ganz unbegründet, denn es ist von vornherein selbstverständlich, dass zwischen dem Menschen und einer Maschine der grosse Unterschied besteht, dass ersterer ein empfindendes, mit Gefühlen, Denkvermögen und Willen begabtes Wesen ist, während die letztere nur aus einem Apparat von todten, nicht empfindenden unorganischen Körpern besteht. Die Vergleichung des menschlichen Organismus mit einer Maschine kann sich daher nur auf diejenigen Einrichtungen und Funktionen beziehen, welche, abgesehen von Fühlen, Denken und Wollen, im lebenden Organismus vorkommen.

So wie eine zusammengesetzte Maschine mit verschiedenen Bewegungsmechanismen versehen ist, von denen jeder in dem Gesammtprozess, welchem die Maschine dient, eine gewisse Funktion zu verrichten hat, so ist der menschliche Organismus mit mancherlei Apparaten versehen, von denen jeder einem gewissen Zweck zu dienen hat.

Allein in einer Maschine kommen nur allein Bewegungsapparate vor; die Körper, aus welchen sie besteht, erleiden im Innern weder mechanistische noch chemische, sondern nur an der Oberfläche theils durch Reibungen, theils durch die Einwirkung der Atmosphäre unwesentliche Veränderungen.

Der Organismus dagegen enthält, nebst mancherlei Bewegungsapparaten, auch noch viele zu andern Zwecken dienende Einrichtungen, und alle Theile des Organismus sind unausgesetzt den manchfaltigsten chemischen und mechanistischen Veränderungen ausgesetzt. Die Theile des Körpers sind von keiner Dauer, sie werden unausgesetzt durch chemische Aktionen aufgelöst und müssen fort und fort durch chemische Neubildungen wieder restaurirt werden.

Die Maschine braucht zu ihrem Fortbestande keinen Stoff in sich aufzunehmen, und scheidet während ihrer Thätigkeit keinen Stoff aus; der Organismus dagegen kann ohne Stoffaufnahme nicht bestehen, er muss fort und fort Material in sich aufnehmen, um das unbrauchbar gewordene Material, das ausgeschieden wird, zu ersetzen. Der Organismus ist also eine Maschine, die sich fort und fort selbst zerstört und die fort und fort wieder aufgebaut werden muss. Diese Materialzufuhr geschieht durch die Nahrungsmittel. Diese werden in der Mundhöhlung zwischen den Zähnen zerkaut, mit Speichel gemengt, hierauf in den Magen gefördert, daselbst mit auflösenden oder zersetzenden Beimengungen versehen und endlich in ein langes Kanalsystem gebracht, dessen Wände die Eigenschaft besitzen, dem auf die beschriebene Weise mechanistisch und chemisch präparirten Stoff die für den Wiederaufbau der Organe geeigneten Bestandtheile zu entziehen, in sich aufzunehmen und dem Organismus zuzuführen. Der für den Bau des Organismus unbrauchbare Theil wird ausgeschieden. Allein diese Ernährung des Körpers hat noch einen andern Zweck zu erfüllen. Durch die unter der Einwirkung des Organismus erfolgende Gesammtheit der chemischen Prozesse, denen die Nahrungsmittel unterworfen sind, werden Wärmethätigkeiten entwickelt, welche theilweise aus dem Körper als fühlbare Wärme entweichen, theilweise aber die Kraftentwicklungen hervorbringen, deren der lebende Organismus fähig ist. In dieser Hinsicht ist der Organismus mit einer Dampfmaschine oder noch treffender, mit einer sogenannten calorischen Maschine zu vergleichen, deren wesentlichste Eigenschaft in der Fähigkeit besteht, Wärme in mechanistische Thätigkeit umzuwandeln, Wärme in sich aufzunehmen und dafür Arbeitskraft zu liefern.

Die Chemiker und Physiologen berechnen, dass von den Nahrungsmitteln, welche ein Mann von mittlerer Stärke täglich in sich

aufnimmt, 0·2514 Kilogramme Kohlenstoff in Kohlensäure und 0·01256 Kilogramme Wasserstoff in Wassergas umgewandelt wird, d. h. mit dem Sauerstoff der eingeathmeten Luft verbrennen. Da durch Verbrennung von 1 Kilogramm Kohlenstoff 7050 und durch Verbrennung von 1 Kilogramm Wasserstoff 34500 Wärmeeinheiten entwickelt werden, so geben die obigen Quantitäten täglich $0{\cdot}2514 \times 7050 + 0{\cdot}01256 \times 34500 = 2207$ Wärmeeinheiten, und da jede Wärmeeinheit einer mechanischen Arbeit gleich 424 Kilogr.-Meter entspricht, so entspricht die tägliche Ernährung eines Mannes einer Leistungsfähigkeit von $2207 \times 424 = 935768$ Kilogr.-Meter.

Allein der Erfahrung zu Folge vermag ein Mann ohne Nachtheil für seine Gesundheit innerhalb 24 Stunden 8 Stunden lang zu arbeiten, und zwar so, dass er in jeder Sekunde dieser 8stündigen Arbeit eine Wirkung von 7·2 Kilogr.-Meter entwickelt. Die totale tägliche Arbeit eines Mannes ist daher $8 \times 3600 \times 7{\cdot}2 = 207360$ Kilogr.-Meter und diese Thätigkeit ist nahezu der 4·5te Theil von derjenigen, welche der Ernährungswärme entspricht.

Der menschliche Organismus ist demnach eine calorische Maschine, welche $\frac{100}{4{\cdot}5} = 22\,\%$ rein mechanistische Nutzwirkung gibt, während (wie wir in der Folge sehen werden) eine Dampfmaschine unter den günstigsten Umständen nur $\frac{100}{20} = 5\,\%$ von der Wärme des Brennstoffs nutzbringend zu machen vermag. Von $100 - 22 = 78\,\%$ Wärme, welche für die Kraftentwicklung verloren gehen, entweicht ein Theil aus dem Körper als Wärme, und wird der Rest zu anderen Funktionen verwendet.

Die mechanische Arbeit, welche ein lebendes Individuum zu entwickeln vermag, ist selbstverständlich nach Umständen veränderlich und richtet sich 1) nach dem Geschlecht, 2) dem Alter, 3) dem Körperbau, 4) dem Klima, 5) nach Uebung und Gewohnheit, 6) nach der Arbeitsweise, 7) und insbesondere auch nach der Geschwindigkeit, mit welcher während der Arbeit der Widerstand überwunden wird.

Eine rationelle Regel, welche den Einfluss all dieser Umstände richtig in Rechnung brächte, gibt es für die Bestimmung der Arbeitsleistung eines Individuums nicht. Aber annähernd kann diese Leistung doch berechnet werden.

Man darf annehmen, dass die Thätigkeit, welche ein bestimmtes Individuum bei angemessener Ernährung innerhalb eines Tages ohne Nachtheil für die Gesundheit zu entwickeln vermag, am grössten ausfällt, wenn es innerhalb 24 Stunden eine gewisse Zahl von T Stunden thätig ist, und in jeder Sekunde seiner Thätigkeit einen

gewissen Widerstand von K Kilogrammen mit einer Geschwindigkeit von C Meter p. 1″ überwindet. Die tägliche Maximalwirkung W genannt, so ist

$$W = 3600\ K\ C\ T \text{ Kilogr.-Meter} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die vortheilhafteste tägliche Arbeitszeit kann für Menschen und Thiere zu T = 8 Stunden angenommen werden und die vortheilhaftesten Werthe von K und C sind nach Erfahrungen in nachstehender Tabelle für verschiedene Individuen zusammengestellt.

Indiv.	Gewicht.	Maschine.	K	C	K C
	Kilg.		Kilg	Meter.	Kilgrmt.
Mensch	70	ohne Maschine .	14	0·8	11
		am Hebel . . .	5	1·1	5·5
		an der Kurbel .	8	0·8	6·4
		am Göpel . . .	12	0·6	7·2
		am Tretrad . .	12	0·7	8·4
		24° Ansteigen am Steigrad . . .	60	0·2	12
Pferd	280	ohne Maschine .	56	1·3	73
		am Göpel . . .	44	0·9	40
Ochse	280	ohne Maschine .	60	0·8	48
		am Göpel . . .	65	0·6	39
Maulesel	234	ohne Maschine .	47	1·1	52
		am Göpel . . .	30	0·9	27
Esel	168	ohne Maschine .	37	0·8	30
		am Göpel . . .	14	8·0	11

Beträgt aber die tägliche Arbeitszeit nicht T, sondern Z Stunden und erfolgt die Thätigkeit nicht mit einer Geschwindigkeit C, sondern mit einer Geschwindigkeit V, so vermag das Individuum einen Widerstand P zu überwinden, der nach *Gerstner* durch folgenden Ausdruck berechnet wird:

$$P = \left(2 - \frac{V}{C}\right)\left(2 - \frac{Z}{T}\right) K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

und dann ist die tägliche Arbeitsleistung:

$$W_1 = 3600\ P\ V\ Z = 3600 \left(2 - \frac{V}{C}\right)\left(2 - \frac{Z}{T}\right) K\ V\ Z \quad . . \quad (3)$$

Dieser empirische Werth von P gründet sich darauf, dass ein Individuum nicht mehr im Stande ist, einen wenn auch noch so kleinen Widerstand dauernd zu überwinden, wenn die Geschwindigkeit V der Thätigkeit zweimal so gross ist als die vortheilhafteste Geschwindigkeit, oder wenn die Arbeitszeit Z zweimal so gross ist als die vortheilhafteste T.

Erfolgt eine Thätigkeit mit der vortheilhaftesten Geschwindigkeit C aber nur während kurzen Zeitintervallen, auf welche längere Ruhepausen folgen, so darf man nehmen:

$$V = C, \quad Z = 0$$

und dann wird vermöge (2):

$$P = 2\,K$$

Dieser Werth darf in Rechnung gebracht werden bei Arbeiten an Krahnen und Winden, die nur von Zeit zu Zeit vorgenommen werden. Für eine solche Arbeit ist $K = 8$, daher $2\,K = 16$ Kilogramme.

Der grösste Widerstand, der innerhalb eines Tages nur durch ganz kurze Zeit überwunden werden kann, folgt aus (2), wenn man $V = 0$, $Z = 0$ setzt, und man findet $P = 4\,K$, oder für einen Menschen $4\,K = 32$ Kilg.

Natürlich dass hier nur von derjenigen Thätigkeit die Rede ist, welche die Menschen als Arbeit entwickeln, wenn sie sich im Schweisse ihres Angesichtes ihr Brod verdienen, ohne ihre Gesundheit aufzureiben. Die Kraftentwicklungen der Menschen bei geistigem Aufschwung, bei heldenmässigen Leistungen kommen bei unseren Zwecken nicht in Betrachtung.

Der praktische Werth der Menschen und Thiere als Motoren.

Obgleich ein Kilogramm billigster, aber doch noch die Gesundheit erhaltender Menschennahrung 20 bis 30 mal mehr kostet als ein Kilogramm Steinkohlen, so ist doch die Wärmethätigkeit, welche einem Kilogramm Nahrungsmittel entspricht, nicht grösser als die von einem Kilogramm Steinkohlen, und ist demnach die Kraftleistungsfähigkeit von einem Kilogramm Nahrungsmittel nicht grösser, sondern (wegen des nothwendigen Stickstoffgehaltes) kleiner als die von einem Kilogramm Steinkohlen. Nahrungsmittel sind daher immer 20 bis 30 mal kostspieligere motorische Substanzen als Steinkohlen. Wäre der menschliche Organismus als Kraftmaschine betrachtet nicht besser als eine Dampfmaschine, so würde die Kraft-

erzeugung aus Nahrungsmitteln vermittelst des menschlichen Organismus 20 bis 30 mal mehr kosten, als die Krafterzeugung aus Kohlen vermittelst einer Dampfmaschine. Allein der menschliche Organismus macht $\frac{1}{4 \cdot 5}$ von der Wärme nutzbar, die im Nahrungsstoff enthalten ist, eine Dampfmaschine bester Art dagegen nur $\frac{1}{20}$ von der Brennstoffwärme, daher ist die Gewinnung der Kraft aus Nahrungsmitteln vermittelst des menschlichen Körpers $20 \times \frac{4 \cdot 5}{20} = 4 \cdot 5$ bis $30 \frac{4 \cdot 5}{20} = 6 \cdot 8$ mal so kostspielig, als die Gewinnung von Kraft aus Steinkohlen vermittelst einer Dampfmaschine.

Von der Ausbildung der calorischen Maschine darf man aber erwarten, dass dieselbe einstens nur ein Viertel oder ein Fünftel von der Brennstoffmenge einer Dampfmaschine erfordern wird, dass sie also zur Umwandlung von Wärme in Arbeit gerade so vortheilhaft werden wird, als in dieser Hinsicht der menschliche Organismus, und dann wird die Gewinnung der Kraft aus Brennstoff vermittelst einer calorischen Maschine 20 bis 30 mal billiger sein, als die Gewinnung von Kraft aus Nahrungsmitteln vermittelst des menschlichen Organismus.

Diese trockene Vergleichung zeigt, dass schon gegenwärtig die Menschenkraft als reine Kraft betrachtet, 6 mal, in Zukunft aber 20 bis 30 mal kostspieliger sein wird, als Brennstoffkraft. Dieses Urtheil wird nicht wesentlich durch den Umstand modifizirt, dass die Brennstoffkraft eine Maschineneinrichtung erfordert, denn der Mensch kann auch nicht mit nacktem Leibe arbeiten, er braucht nebst Nahrung auch Kleidung, Wohnung, und wenn er seine Gesundheit einigermassen erhalten will, auch Erholung und geistige Belebung und Erfrischung, was alles Geld kostet.

Abgesehen von dem, was Gefühl, Religion oder Philosophie gebieten, zwingt uns schon der pure Egoismus, die ganz gewöhnliche Gewinnsucht, den Menschen als Motor überall nicht anzuwenden, wo es möglich ist, an dessen Stelle einen Motor der unorganischen Natur in Anwendung zu bringen.

Im Alterthum gab es keine Physik, keine Chemie, keine Mechanik (als Wissenschaft), hatte man keine Ahnung, dass in der Natur eine Fülle von Kräften vorhanden seien, die zur Verrichtung von Arbeiten für menschliche Zwecke verwendbar gemacht werden könnten, daher die Allgemeinheit der Sklavenarbeit, die in der Neuzeit allerdings noch nicht gänzlich aufgehoben ist, aber nicht mehr als eine prinzipielle geduldet wird, sondern nur theilweise noch faktisch

besteht und deren Beseitigung nach Thunlichkeit angestrebt wird. Naturwissenschaft, Technik und Christenthum haben dahin geführt, dass die Arbeit eine freie Thätigkeit geworden ist, dass Menschenkraft nie als blosse motorische Kraft, sondern immer nur dann angewendet wird, wenn eine Arbeit nicht blos physische Kraft, sondern auch Intelligenz erfordert, die durch eine Maschine nicht ersetzt werden kann. Die Gartenarbeit wird durch Menschenthätigkeit besorgt. Der Feldbau durch Zugthiere unter Leitung des Menschen. Die kolossalen Arbeiten, welche die Herstellung der Eisenbahnbauten erfordern, werden theils durch Zugthiere, vorzugsweise aber durch Menschenthätigkeit vollbracht, weil man noch kein Mittel besitzt, und vielleicht auch in der Folge nicht besitzen wird, wodurch diese Arbeiten durch die verstandeslosen Motoren der unorganischen Natur verrichtet werden könnten. In der Gewerbe- und Fabrikthätigkeit wird der Mensch als reiner Motor gar nicht mehr gebraucht, sonden er verrichtet hier nur solche Arbeiten, die mit Maschinen gar nicht gemacht werden können, oder er unterstützt, leitet und dirigirt eine Maschine, die durch Wasser oder Dampf getrieben wird. Der Mensch ist ein schwacher und kostspieliger, aber er ist zugleich ein mit (wenn auch zuweilen schwacher) Intelligenz ausgerüsteter Motor. Er ist vermöge seines Körperbaues und vermöge seines Geistes eine Universalmaschine, die einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Bewegungsfunktionen fähig ist. Er ist ein sich selbst transportirender Motor, kann sich selbst an den Ort der Arbeit begeben, kann nach seinem Willen die Arbeit beginnen, unterbrechen oder beschliessen, kann nach Erforderniss von einer Thätigkeit in eine andere übergehen, kann den mancherlei der Thätigkeit zufällig entgegentretenden Störungen und Hindernissen begegnen, und so gibt es denn eine grosse Mannigfaltigkeit von Arbeiten, die durch andere Kraft nicht ersetzt werden können. Unvortheilhaft ist und bleibt aber die Menschenarbeit in den Fällen, 1) wenn es sich um eine grosse Kraftentwicklung handelt, 2) wenn es sich um eine Arbeit handelt, die einen hohen Grad von Gleichmässigkeit erfordert. Das Spinnen, Weben, Drehen, Hobeln, Feilen u. s. w. sind Thätigkeiten, die ein um so vollkommeneres Resultat liefern, je gleichförmiger sie erfolgen, daher ist in diesem Falle die Maschinenarbeit der Handarbeit vorzuziehen, denn die grösste Virtuosität eines Handarbeiters kann es nie dahin bringen, eine Gleichförmigkeit zu erzielen, wie sie bei derlei Arbeiten von einer gut eingerichteten Maschine leicht erreicht wird.

Maschinen, die vorzugsweise durch Menschenkraft bewegt werden.

Maschinen, vermittelst welchen die Menschenkraft vortheilhaft verwendet werden kann, gibt es selbstverständlich sehr viele. Es sollen in Folgendem vorzugsweise diejenigen dieser Maschinen betrachtet werden, vermittelst welchen durch Menschenkraft entweder grosse Widerstände, wenn auch mit kleinen Geschwindigkeiten überwunden, oder mit grossen Lasten irgend welche Ortsveränderungen hervorgebracht werden sollen. Zu diesen Maschinen gehören folgende:

A. Horizontal-Bewegungen.

Walzen, Schleifen, Wagen, Schiebebühnen, Drehscheiben.

B. Vertikal-Bewegungen.

Winden, Flaschenzüge, Krahnen, Hebzeuge aller Art.

C. Pressen.

Schraubenpressen, Keilpressen, Kniepressen, hydraulische Pressen.

Bei diesen Maschinen ist sowohl der Receptor als auch das Werkzeug höchst einfach. Der Receptor ist entweder eine Kurbel, ein Hebelgriff, oder eine Zugstange, oder ein Fusstritt. Das Werkzeug besteht meistens nur aus einem oder mehreren Bestandtheilen zum Anfassen des Körpers, auf welchen eingewirkt werden soll.

Da bei diesen Maschinen in der Regel gefordert wird, einen grossen Widerstand, wenn auch nur langsam, also mit kleiner Geschwindigkeit zu überwinden, so besteht der ganze Bewegungsmechanismus aus einem System von Bestandtheilen, welche bewirken, 1) dass die Bewegungsweise des Receptors in jene des Werkzeuges umgewandelt wird; 2) dass die Geschwindigkeit des Werkzeuges vielmal kleiner ausfällt, als jene des Receptors. Gehen wir nun zur Beschreibung und Construktion dieser Arbeitsmaschinen über.

Winden von Holz.

Der Kreuzhaspel.

Fig. 2 und 3, Tafel XXVI. Das Gerüst dieses Haspels besteht aus einem Grundrahmen a und zwei verstrebten Säulen b. In diese ist eine mit Zapfen versehene hölzerne Welle c eingelegt, durch welche vier hölzerne unter gleichen Winkeln gegen einander gestellte Arme d gesteckt sind. Am Umfang der Welle ist in einen Ring ein Seil eingehängt oder eingeknüpft, das sich beim Drehen der Welle um dieselbe aufwickelt, wodurch die direkt oder indirekt an dem Seil hängende Last gehoben wird. Wird der Haspel gebraucht, um eine Last aus einem Schacht oder Brunnen aufzuziehen, so überbaut man denselben mit einer Brücke, stellt den Haspel darauf, hängt die Last an das Seil und lässt die Welle durch Arbeiter, welche die Hebel anfassen, ruckweise drehen. Mehr als vier Arbeiter können nicht wohl angestellt werden. Die Last, welche gehoben werden kann, ist daher nicht gross. Nennt man:

Q die Last. N die Anzahl der Arbeiter. p die Kraft, mit welcher im Mittel ein Arbeiter gegen einen Hebel drückt. w den Halbmesser der Welle. l die Länge eines Hebelarms, so ist, ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse (Steifheit des Seiles, Axenreibung):

$$Q = N\,p\,\frac{l}{w}$$

für $p = 16$ Kilg. $N = 4$, $l = 1^{m}$, $w = 0{\cdot}125$, wird $Q = 512$ Kilg.

Sollen vermittelst eines solchen Haspels Gegenstände auf ein Baugerüst geschafft werden, so stellt man den Haspel unten auf den Boden, belastet ihn mit Steinen, bringt aber auf dem Gerüste eine Rolle an, leitet das Seil von der Haspelwelle weg nach der Rolle, schlingt es um dieselbe herum und bringt an das frei herabhängende Seilende einen Haken an, an welchen die Last gehängt wird.

Der Kurbelhaspel.

Fig. 4, Tafel XXVI. Das Gerüst ist wie bei dem vorhergehenden Haspel. Statt der Arme sind aber die Zapfen der Welle länger und ist die Verlängerung kurbelförmig umgebogen. Die Kurbelrichtungen müssen einen rechten Winkel bilden, weil jeder

Arbeiter nur nach horizontaler Richtung, nicht aber nach vertikaler Richtung gegen eine Kurbel drücken kann. An jede Kurbel können höchstens zwei Arbeiter gestellt werden, und gleichzeitig sind also auch nur zwei Arbeiter thätig. Es ist hier

$$Q = \frac{1}{2} N p \frac{l}{w}$$

wenn durch l der Kurbelhalbmesser und durch N die Gesammtzahl der an den Haspel gestsellten Arbeiter bezeichnet wird.

Für $N = 4$, $p = 16$, $l = 36^{cm}$, $w = 12^{cm}$ wird

$$Q = 96 \text{ Kilg.}$$

Hier ist zu bemerken, dass der Kurbelhalbmesser bei Winden 36 bis höchstens 40 Centimeter betragen soll, damit die Hin- und Herschwingungen des Körpers den Arbeitern nicht zu belästigend werden.

Das Spillenrad.

Fig. 5, Tafel XXVI. Hier ist die Seilwelle mit einem oder mit mehreren Rädern versehen, an deren Seiten oder Umfangsflächen Griffe (Spillen) angebracht sind, die von den Arbeitern angefasst werden. Bringt man in verschiedenen Höhen Stehbretter an, so können an einem solchen Spillenrad gleichzeitig viele Arbeiter wirken, und da der Halbmesser des Rades sehr gross genommen werden kann, so können dann mit einer solchen Winde sehr grosse Lasten gehoben werden. Diese Winde wird sehr häufig bei Bohrarbeiten, wie sie beim Bergbau vorkommen, gebraucht, und wird dann „Förder“- oder „Aufsäuberungsrad“ genannt.

Das Laufrad.

Fig. 6, Tafel XXVI. Diese Winde unterscheidet sich von der vorhergehenden durch die Einrichtung des Rades. Dieses hat hier zwei ringförmige Kränze (ähnlich wie ein oberschlächtiges Wasserrad) und zwischen denselben sind im Zickzack Bretter befestigt, die bei a und b eine horizontale Lage haben. Die Arbeiter stellen sich entweder innerhalb des Rades auf bei a, oder ausserhalb bei b und treiben dasselbe durch ihr Gewicht. Allein da hierbei leicht Beschädigungen oder selbst Verunglückungen eintreten können, so ist diese Maschine mit Recht ausser Gebrauch gekommen.

Der Tummelbaum.

Fig. 7, Tafel XXVI. Das Gerüst besteht aus zwei durch vier verstrebte Säulen c verbundenen Balkenkreuzen a und b. In der Mitte steht eine Welle, die oben und unten mit Zapfen versehen ist, in einer Höhe von 1·3 Meter über dem Boden 4, 6 bis 8 Arme d und oben einen sogenannten Seilkorb e trägt. Das Seil wird durch eine Rolle *f* fortgeleitet. Das untere Kreuz wird mit Brettern belegt, auf welchen die Arbeiter um die Welle herum schreiten, während sie gleichzeitig gegen die Arme d drücken. Wird diese Maschine in ziemlich grossen Dimensionen ausgeführt und mit vielen Armen d versehen, so können an derselben allerdings gleichzeitig ziemlich viele (12 bis 16) Arbeiter thätig sein, allein das Missliche ist nun, dass die Thätigkeit des Einzelnen nicht controlirt werden kann, weil jeder eine Stellung annehmen kann, wie wenn er stark drückte, ohne es wirklich zu thun.

Die Erdwinde.

Fig. 8, Tafel XXVI. Diese ist eine Art Tummelbaum. Die Axe geht über das Gerüst hinaus und ist daselbst mit vier langen Druckhebeln versehen, an welchen die Arbeiter drücken, während sie im Kreise um die Welle herumgehen. Diese Winde wird vorzugsweise bei Flussbauten benützt, um Gegenstände aus dem Fluss ans Ufer zu ziehen. Die Winde muss in diesem Falle durch Belastung mit Steinen gegen das Umstürzen, und durch Pflöcke, welche vor die Winde in den Boden getrieben werden, gegen Verschiebung geschützt werden.

Alle diese Winden lassen sich überall leicht herstellen, kosten wenig, sind aber voluminiös, schwerfällig, nicht leicht transportabel und geben in der Regel keine grosse Zugkraft. Als Hilfsmaschinen bei kleinen Bauten aller Art werden sie verwendet und leisten da gute Dienste. Für grössere Bauten, oder wenn überhaupt grössere bedeutendere Zwecke verfolgt werden sollen, werden eiserne Winden angewendet, deren Einrichtung und Construktion in Folgendem erklärt wird.

Flaschenzüge.

Die Einrichtung der Flaschenzüge ist bekannt. Gewöhnlich befinden sich die Rollen einer und derselben Flasche neben einander und drehen sich frei auf einer und derselben Axe. Bei dem zum

Behufe der Theorie dargestellten Flaschenzug, Fig. 9 und 10, Tafel XXVI., sind dagegen die Rollen einer und derselben Flasche über einander gestellt, und jede ist mit einer besonderen Drehungsaxe versehen. Wenn das Seil nicht steif, sondern vollkommen biegsam wäre, und wenn keine Zapfenreibungen statt fänden, müssten in allen Theilen des Seiles gleich starke Spannungen herrschen, wäre demnach die Spannung P am freien Seilende gleich $\frac{Q}{2\,n}$, wobei n die Anzahl der Rollen einer Flasche bezeichnet. Wegen dieser Seilsteifheit und Zapfenreibungen muss dagegen die Seilspannung im Beharrungszustand der Bewegung von Innen nach Aussen wachsen, denn durch die Differenz der Spannungen zweier unmittelbar auf einander folgenden Seilstücke muss die Steifheit des Seiles und die Axenreibung an der Rolle, welche die Seilstücke berühren, überwunden werden.

Nennt man:

δ den Durchmesser des Seiles,
d den Durchmesser des Zapfens oder der Axe, an welcher die Reibung statt findet,
D den Durchmesser der Rolle,
} in Centimetern,

f den Reibungscoeffizienten für die Axen- oder Zapfenreibung,
n die Anzahl aller Rollen einer Flasche,
Q die zu hebende Last,
P die Kraft am freien Ende des Seiles,
T die Spannung am innersten an die unbewegliche Flasche befestigten Seilstücke,
T_1 T_2 die Spannungen in den folgenden Seilstücken,
k das Verhältniss der Spannungen zweier unmittelbar aufeinander folgenden Seilstücke,

so findet man leicht, dass annähernd

$$k = 1 + 0{\cdot}26\,\frac{\delta^2}{D} + 2\,f\,\frac{d}{D} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

demnach für je zwei Seilstücke constant ist, vorausgesetzt, dass wir uns einen Flaschenzug mit gleich grossen Rollen denken, und dass die Axen oder Zapfen, an welchen Reibungen statt finden, von gleicher Grösse sind. Dann ist aber:

$$\left.\begin{array}{lll} T_1 & = k\,T & \\ T_2 & = k\,T_1 & = k^2\,T \\ T_3 & = k\,T_2 & = k^3\,T \\ T_4 & = k\,T_3 & = k^4\,T \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ T_{2n-1} & = k\,T_{2n-2} & = k^{2n-1}\,T \\ P = T_{2n} & = k\,T_{2n-1} & = k^{2n}\,T \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Nun ist aber offenbar

$$Q = T + T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_{2n-1} \quad \ldots (3)$$

demnach findet man wegen (2):

$$Q = T\left(1 + k + k^2 + \ldots\ldots + k^{2n-1}\right) = T\,\frac{k^{2n} - 1}{k - 1} \quad \ldots (4)$$

Die letzte der Gleichungen (2) gibt:

$$T = \frac{P}{k^{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Führt man diesen Werth in (4) ein, so folgt:

$$Q = P\,\frac{k^{2n} - 1}{k^{2n}\,(k - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\eta = \frac{Q}{2\,n\,P} = \frac{k^{2n} - 1}{2\,n\,k^{2n}\,(k - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Dieser Ausdruck (7) bestimmt das Güteverhältniss eines Flaschenzuges.

Gewöhnlich ist k nur wenig von der Einheit verschieden. Setzt man in diesem Falle

$$\left.\begin{array}{l} \zeta = 0{\cdot}26\,\frac{\delta^2}{D} + 2\,f\,\frac{d}{D} \\ k = 1 + \zeta \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

so wird:

$$\frac{Q}{2\,n\,P} = \frac{(1+\zeta)^{2n} - 1}{2\,n\,(1+\zeta)^{2n}\,\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Entwickelt man die Potenzen nach der Binomialformel und vernachlässiget die Glieder, welche zweite und höhere Potenzen von ζ enthalten, so findet man:

$$\frac{Q}{2\,n\,P} = \frac{1}{1 + 2\,n\,\zeta} = (1 - 2\,n\,\zeta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Dieser Annäherungsausdruck für das Güteverhältniss eines Flaschenzuges zeigt deutlicher als der genaue, dass das Güteverhältniss mit der Anzahl der Rollen abnimmt, dass es also für die Verwendung einer Kraft nicht vortheilhaft ist, die Rollenzahl zu gross zu nehmen. Diese wird auch selten grösser als $n = 3$ genommen, und man zieht es vor, zur Hebung von sehr grossen Lasten lieber mehrere Flaschenzüge, von denen jeder mit einer geringeren Anzahl Rollen versehen ist, anzuwenden, statt eines einzigen mit sehr vielen Rollen.

Die folgende Tabelle ist vermittelst der genaueren Formel (7) berechnet und zeigt, wie das Güteverhältniss mit k und n abnimmt.

n	Güteverhältniss für		
	k = 1·05	k = 1·10	k = 1·15
2	0·88	0·79	0·75
3	0·85	0·73	0·63
4	0·81	0·66	0·56

Die aufgestellten Gleichungen können auch gebraucht werden, um die Dimensionen eines Flaschenzuges so zu bestimmen, dass derselbe bei einer gewissen gegebenen Rollenzahl ein gewisses Güteverhältniss gibt. Ist nämlich n und $\frac{Q}{2\,n\,P}$ gegeben, so kann vermittelst obiger Tabelle oder aus (7) durch Annäherung k bestimmt werden, und dann bestimmt sich der Werth von D vermittelst

$$D = \frac{0{\cdot}26\,\delta^2 + 2\,f\,d}{k - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Es sei z. B. ein Flaschenzug mit $n = 3$ Rollen in einer Flasche anzuordnen, der ein Güteverhältniss 0·85 gibt und eine Last von 5000 Kilogrammen heben soll, dann ist:

$$P = \frac{5000}{0·85 \times 2 \times 3} = 980 \text{ Kilgr.}$$

Für diese Zugkraft wird (nach Resultate Seite 38) der Durchmesser des Seiles $\delta = 3·5$ Centimeter. Ferner wird

$$d = 0·12 \sqrt{\frac{5000}{2}} = 6 \text{ Centimeter}, f = 0·1, \quad k = 1·05$$

Die Formel (11) gibt demnach:

$$D = \frac{0·26 \times 3·5^2 + 2 \times 0·1 \times 6}{0·05} = 87 \text{ Centimeter}$$

Der Rollendurchmesser fällt daher sehr gross aus. Derselbe würde nur 30 Centimeter, wenn man sich mit einem Güteverhältniss von 0·63 begnügte.

Wenn die Flaschenzüge der Einwirkung der Witterung ausgesetzt sind, und die zu hebenden Lasten gross sind, nimmt man Ketten statt Seile. Dann müssen aber die Rollen zur Aufnahme der Kettenglieder eine Furche erhalten.

Eiserne Winden.

Eiserne Winde mit einfacher Uebersetzung.

Fig. 11 und 12, Tafel XXVI. Das Gestell besteht aus zwei dreieckigen Schilden a, die durch drei schmiedeeiserne Traversen b verbunden sind. Zwischen den Schilden befinden sich 1) eine Axe c, an welcher ein Zahnrad d, eine Seilwelle e und eine Bremsrolle f befestigt sind; 2) eine Axe g mit einem Getriebe h und zwei Kurbeln k. Für die Bremsrolle ist ein Bremsband und ein Bremshebel angebracht. Die Axe g ist verschiebbar, so dass h in d eingreift oder nicht eingreift.

Nennt man:

Q die Last am Seil. P die Summe der Kräfte, welche gleichzeitig auf die Kurbeln einwirken und die Axe g drehen. r den Halbmesser von h. R den Halbmesser von d. w den Halbmesser der Seilwelle. k den Halbmesser einer Kurbel, so hat man, wenn alle Nebenhindernisse vernachlässigt werden:

$$Q = P \frac{R}{r} \frac{k}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nehmen wir an, dass im Ganzen vier Arbeiter wirken, dass aber, wegen der rechtwinkligen Stellung der Kurbeln gleichzeitig doch nur zwei Arbeiter drücken, so können wir setzen:

$$P = 2 \times 16 = 32, \quad \frac{R}{r} = 5, \quad \frac{k}{w} = \frac{36}{9} = 4$$

und dann wird:

$$Q = 32 \times 5 \times 4 = 640 \text{ Kilg.}$$

Berechnen wir vermittelst der in den Resultaten zusammengestellten Regeln die wesentlichsten Dimensionen einer solchen Winde für eine Last von 640 Kilogrammen.

Wir erhalten:

Durchmesser des Seiles für 640 Kilogramme Last (Resultate Seite 38)		2·9 Centm.
Torsionsmoment der Kurbelaxe 36×32 . . .	=	1152 Kilgcentm.
Torsionsmoment der Axe der Seilwelle 5×1152	=	5760 „
Durchmesser der Kurbelaxe (Result. Seite 50)		3 Centm.
Durchmesser der Axe der Seilwelle		5·2 „
Relative Grösse des Zahnrades		6
Halbmesser dieses Rades $6 \times 5{\cdot}2$		31·2 „
Halbmesser des Getriebes $\frac{31{\cdot}2}{5}$		6·24 „
Zahnbreite für d und h $\left(\frac{\beta}{\alpha} = 5, \text{ Eisen auf Eisen}\right)$	=	$1{\cdot}212 \times 5{\cdot}2 = 6{\cdot}3$
Anzahl der Zähne { von d	=	70
Anzahl der Zähne { von h	=	14

Der Druck, welchen ein Zapfen der Seilwellenaxe auszuhalten hat, fällt am grössten aus, wenn das Seil entweder ganz aufgewickelt, oder wenn es ganz abgewickelt ist, und beträgt in diesen beiden Fällen (abgesehen vom Gewicht der Theile d e *f*) annähernd 640 Kilogramme. Der Durchmesser eines Zapfens ist demnach (Seite 48 der Resultate) 3 Centm.

Nun ist noch die Bremse zu bestimmen. Wegen der zum Bremsen erforderlichen Kraft ist es nicht gleichgültig, nach welcher Richtung die Seilaufwicklung statt findet. Es ist die Disposition Fig. 13, Tafel XXVI. der Disposition Fig. 14 vorzuziehen, weil bei ersterer die durch den Bremshebel hervorzubringende Spannung kleiner ausfällt, als bei letzterer. Nennen wir für die Disposition Fig. 13 T und t die Spannungen, welche in den Enden des Bremsbandes

vorhanden sein müssen, wenn die Last durch das Bremsen frei hängend erhalten werden soll. ϱ den Halbmesser der Bremsrolle. w den Halbmesser der Seilwelle. L und l die Schenkellängen des Bremshebels. p den Druck gegen das Ende des Schenkels L. σ die Bogenlänge, längs welcher das Band die Rolle berührt. f den Reibungscoeffizienten zur Berechnung der Reibung zwischen Rolle und Band, so hat man zur Bestimmung der kleinsten Werthe von T und t:

$$\left.\begin{aligned} T\varrho &= t\varrho + Qw \\ T &= t\, e^{f\frac{\sigma}{\varrho}} \\ t &= p\frac{L}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} t &= Q\frac{w}{\varrho}\,\frac{1}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}-1} \\ T &= Q\frac{w}{\varrho}\,\frac{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}-1} \\ p\frac{L}{l} &= Q\frac{w}{\varrho}\,\frac{1}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}-1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Für die zu berechnende Winde ist:

$$Q = 640, \quad w = 9$$

und dürfen wir ferner annehmen:

$$f = 0{\cdot}2, \quad \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\frac{2}{3}\,2\varrho\pi}{\varrho} = 4{\cdot}188, \quad f\frac{\sigma}{\varrho} = 0\,8376$$

$$e^{f\frac{\sigma}{\varrho}} = 2{\cdot}718^{0{\cdot}8376} = 2\,307, \quad \varrho = 24, \quad \frac{L}{l} = 5$$

dann findet man:

$$t = 640 \frac{9}{24} \frac{1}{2\,307 - 1} = 183, \quad T = 183 \times 2{\cdot}307 = 422,$$

$$p = \frac{1}{5}\, 183 = 36 \text{ Kilg.}$$

Dabei ist allerdings der Reibungscoeffizient ziemlich gross angenommen worden, was aber auch zulässig und sachgemäss ist, denn derlei Winden können nie sorgfältig rein gehalten werden, sind dem Staub ausgesetzt und überdies ist es für eine Bremsrolle nicht angemessen, wenn ihr Umfang zu glatt gemacht wird.

Nachdem nun t, T und p bestimmt sind, ergeben sich nach unseren construktiven Regeln:

Durchmesser des Zapfens, welcher die Spannung T auszuhalten hat (Seite 48 der Resultate) 2·5 Centm.

Durchmesser des Zapfens für die Spannung t 1·7 „

Querschnitt des Bremsbandes $\dfrac{422}{\frac{1}{20}\,4350}$. . . 2 Quadratcentm.

Dicke des Bandes 0·3 Centm.

Breite desselben 7 „

Zur Bestimmung des Bremshebels hat man nach der Regel Seite 76 der Resultate:

Durchmesser eines Zapfens für den Druck $p = 36$ Kilg. 0·72 Centm.

Durchmesser des Drehungszapfens $2{\cdot}3 \times 0{\cdot}72$. . $= 1{\cdot}66$ „

Querschnitt eines Armes am Drehungspunkt:

$$\left(\frac{p}{\delta_p}\right) = 90, \quad \left(\frac{h}{b}\right) = 2, \ldots \quad \begin{array}{ll} h = 5{\cdot}2 \times 0{\cdot}72 & = 3{\cdot}7 \text{ „} \\ b = \frac{1}{2}\, h \ldots & = 1{\cdot}9 \text{ „} \end{array}$$

Es muss noch bemerkt werden, dass die Länge der Seilwelle durch die Länge des aufzuwickelnden Seiles bestimmt wird. Die für die Thätigkeit der Arbeiter vortheilhafteste Höhe der Kurbelaxe über dem Boden wäre circa die Achselhöhe der Arbeiter, allein diese Höhe macht die Winde zu hoch.

Die verschiedenen Detailabmessungen und namentlich jene für die Schilde findet das Gefühl leicht heraus, wenn einmal die berechneten Abmessungen aufgetragen und das darauf Bezügliche dargestellt ist.

Eiserne Winde mit Doppel-Uebersetzung.

Fig. 15 u. 16, Tafel XXVI. Diese Winde ist mit drei Axen versehen. An a befindet sich die Seilwelle, ein grosses Zahnrad b und eine

Bremsrolle c. An a_1 ist ein in b eingreifendes Getriebe d und ein Zahnrad e angebracht. a_2 ist mit zwei Kurbeln und mit einem in e eingreifenden Getriebe *f* versehen.

Nennt man Q die zu hebende Last. P die senkrecht gegen die Kurbeln wirkende Kraft. k den Halbmesser einer Kurbel. w den Halbmesser der Seilwelle. R, r, R_1, r_1 die Halbmesser von b, d, e, *f*, so hat man, wenn man auch hier die Nebenhindernisse vernachlässigt,

$$Q = P \frac{R}{r} \frac{R_1}{r_1} \frac{k}{w} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Nehmen wir wiederum

$$P = 2 \times 16 = 32 \text{ Kilg. } \frac{R}{r} = 6, \quad \frac{R_1}{r_1} = 5, \quad \frac{k}{w} = \frac{39}{12}$$

so wird:

$$Q = 32 \times 6 \times 5 \times \frac{39}{12} = 3120 \text{ Kilgr.}$$

Nun ist:

Torsionsmoment der Axe a_2	39×32	=	1248	Kilgcm.
„ „ „ a_1	1248×5	=	6240	„
„ „ „ a	6240×6	=	37440	„
Durchmesser der Axen (Res. S. 50)	a_2	=	3	Centm.
	a_1	=	5·4	„
	a	=	9·7	„
Relative Grösse des Rades b		=	6	
Halbmesser dieses Rades	$6 \times 9{\cdot}7$	=	58·2	„
Zahnbreite $\left(\frac{\beta}{\alpha} = 5\right)$	$1{\cdot}212 \times 9{\cdot}7$	=	11·7	„
Anzahl der Zähne von b		=	72	
Halbmesser des Getriebes d,	$\frac{58{\cdot}2}{6}$	=	9·7	„
Anzahl der Zähne desselben	$\frac{72}{6}$	=	12	
Relative Grösse des Rades e		=	5	
Halbmesser von e,	$5 \times 5{\cdot}4$	=	27·0	„
Anzahl der Zähne		=	55	
Zahnbreite	$1{\cdot}328 \times 5{\cdot}4$	=	7·2	„
Halbmesser des Getriebes *f*,	$\frac{27}{5}$	=	5·4	„
Anzahl der Zähne	$\frac{55}{5}$	=	11	

Zur Bestimmung der Abmessungen der Bremse dienen auch hier die Gleichungen Seite 447:

$$\left.\begin{array}{l} t = Q\,\dfrac{w}{\varrho}\,\dfrac{1}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}} - 1} \\[2ex] T = Q\,\dfrac{w}{\varrho}\,\dfrac{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}}}{e^{f\frac{\sigma}{\varrho}} - 1} \\[2ex] p = \dfrac{1}{L}\,t \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Allein es wird in dem vorliegenden Falle schwer halten, durch praktisch annehmbare Dimensionen es dahin zu bringen, dass die Last von 3120 Kilogrammen schwebend erhalten werden kann. Machen wir einen Versuch und nehmen wir:

$$Q = 3120,\quad \frac{w}{\varrho} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4},\quad f = 0{\cdot}2,\quad \frac{\sigma}{\varrho} = \frac{\frac{3}{4}\,2\,\varrho\,\pi}{\varrho} = 4{\cdot}7$$

$$f\,\frac{\sigma}{\varrho} = 0{\cdot}2 \times 4{\cdot}7 = 0{\cdot}94 \text{ oder nahe } f\,\frac{\sigma}{\varrho} = 1,\quad \frac{1}{L} = \frac{1}{10}$$

dann wird:

$$t = 3120\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{2{\cdot}718 - 1} = 454,\quad T = 454 \times 2{\cdot}718 = 1234 \text{ Kilg.}$$

$$p = \frac{454}{10} = 45 \text{ Kilg.}$$

Die Bremsung ist also bei den angenommenen Verhältnissen doch noch möglich.

Nun erhalten wir ferner:

Durchmesser des Zapfens für den Druck T	4·2 Centm.
„ „ „ „ „ „ t	2·6 „
„ „ „ „ „ „ p	0·8 „
Durchmesser des Drehungszapfens für den Winkelhebel $3{\cdot}2 \times 0{\cdot}8$	2·56 „
Querschnitt des Hebels am Drehungszapfen gemessen (Res. S.78, $\frac{p}{\delta_p} = \frac{100}{0{\cdot}8} = 125$, $\frac{h}{b} = 2$) Höhe $5{\cdot}5 \times 0{\cdot}8$	$= 4{\cdot}4$ „
Dicke . . .	$= 2{\cdot}2$ „
Querschnitt des Bremsbandes $\dfrac{1234}{\frac{1}{20}\,4350}$. . .	$= 5{\cdot}6$ Quadrcm.
Dicke des Bandes	$= 0{\cdot}5$ Centm.
Breite	$= 11{\cdot}2$ „

Damit eine solche Winde sowohl für leichtere als für schwerere Lasten gut gebraucht werden kann, ist es gut, sie so einzurichten, dass sie mit einer oder mit zwei Räderübersetzungen arbeiten kann. Zu diesem Behufe versieht man die Axe a_2 noch mit einem zweiten (in der Figur nicht verzeichneten) Getriebe g von der Grösse des Getriebes d und befestigt dasselbe an eine Stelle der Axe a_2 so, dass g in b nicht eingreift, wenn *f* in e eingreift. Macht man nun die Axe a_2 verschiebbar, so kann man machen 1) dass g in b, dagegen *f* in e nicht eingreift, und dann wirkt die Winde mit einer Uebersetzung, 2) dass *f* in e, dagegen g in b nicht eingreift, und dann hat man eine Winde für grosse Lasten mit zwei Uebersetzungen. Schliesslich muss noch bemerkt werden, dass für eine Last von 3120 Kilogrammen kein Seil genommen werden kann, sondern eine Kette genommen werden muss. Der Durchmesser des Ketteneisens ist (nach Resultate, Seite 40) 1·6 Centimeter. Damit die Kettenglieder, wenn sie sich auf die Welle legen, nicht verdrückt werden, muss die Welle zur Aufnahme der stehenden Kettenglieder mit einer schraubenförmigen Furche versehen werden.

Derlei Winden mit zwei Räderübersetzungen werden selten gebraucht. Sie fallen zu schwerfällig aus, und die Lasten, welche mit denselben gehoben werden können, sind doch nicht bedeutend. Winden mit drei Uebersetzungen werden gar nicht gebraucht. Sind die zu hebenden Lasten so gross, dass sie mit einer Winde mit einer oder mit zwei Uebersetzungen nicht gehoben werden können, so wendet man mehrere solche Winden an, oder man benutzt Flaschenzüge und Winden.

Friktions-Winden.

Wenn die aufzuwickelnden Ketten oder Seile sehr lang sind (was insbesondere der Fall ist, wenn Flaschenzüge angewendet werden), fallen die Ketten- oder Seilwellen ebenfalls sehr lang aus. Man kann in solchen Fällen statt der im Vorhergehenden behandelten Winden sogenannte Friktionswinden gebrauchen.

Fig. 17 und 18, Tafel XXVI. stellt eine solche Winde vor. Die Winde hat drei Axen a_1 a_2 a_3. Mit a_1 ist eine Seiltrommel b_1 und ein Zahnrad c_1 verbunden. Mit a_3 eine Seiltrommel b_3 und ein Zahnrad c_3. a_2 ist mit zwei Kurbeln und mit einem in c_1 und c_3 gleichzeitig eingreifenden Getriebe c_2 versehen.

Um mit dieser Winde einen Widerstand nach der Richtung T durch einen langen Weg zu überwinden, wickelt man das Seil mehrmals um die beiden Seiltrommeln, lässt das Ende t durch

einen Arbeiter A anspannen und lässt die Kurbeln durch andere Arbeiter B nach einer Richtung drehen, bei welcher sich das Seilende T stets auf-, das Seilende t dagegen stets abwickelt. Dabei bleiben die Stellen, wo die Auf- und Abwicklungen der Seile T und t stattfinden, immer die gleichen, und wenn der Arbeiter A das Seil stets stark genug spannt, während er fort und fort die Stücke, welche sich abwickeln, auf den Boden fallen lässt, so entsteht durch die im Seil herrschende Spannung am Umfang der Seiltrommeln eine Reibung, welche bewirkt, dass das Seil durch die Trommeln stets mitgenommen wird. Eine solche Friktionswinde ist gleichsam ein umgekehrter Flaschenzug.

Nennt man: T und t die beiden Seilspannungen. w den Halbmesser einer Seiltrommel. k den Halbmesser einer Kurbel, an welcher die Arbeiter B wirken. P die Kraft, mit welcher die Arbeiter gegen die Kurbeln drücken. R die Halbmesser der Räder c_1 c_3. r den Halbmesser des Getriebes c_2, so hat man, vorausgesetzt, dass man einstweilen die Nebenhindernisse (Steifheit des Seiles und Axenreibung) vernachlässiget,

$$T = t + P \frac{R}{r} \frac{k}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Damit aber das Seil auf den Trommeln nicht gleitet, muss zwischen T und t nachstehende Bedingung erfüllt sein:

$$T = t\, e^{f \frac{\sigma}{w}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wobei f den Reibungscoeffizienten für die Reibung zwischen Seil und Trommel und σ die Summe der Bogenlängen bedeutet, längs welchen das Seil die *beiden* Trommeln berührt.

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$\left.\begin{aligned} P &= T \frac{r}{R} \frac{w}{k} \frac{e^{f \frac{\sigma}{w}} - 1}{e^{f \frac{\sigma}{w}}} \\ t &= T \frac{1}{e^{f \frac{\sigma}{w}}} \\ T &= P \frac{R}{r} \frac{k}{w} \frac{e^{f \frac{\sigma}{w}}}{e^{f \frac{\sigma}{w}} - 1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es sei z. B.:

$$P = 2 \times 16, \quad \frac{R}{r} = 5, \quad \frac{k}{w} = \frac{39}{13} = 3, \quad f = 0{\cdot}28,$$

$$\frac{\sigma}{w} = \frac{3 \times 2 w \pi}{w} = 18{\cdot}8 \text{ (drei volle Umwindungen),}$$

dann wird:

$$e^{f \frac{\sigma}{w}} = 2{\cdot}718^{5{\cdot}264} = 193$$

$$T = 32 \times 5 \times 3 \frac{193}{193 - 1} = 480$$

$$t = \frac{480}{193} = 2{\cdot}5 \text{ Kilgr.}$$

Das ablaufende Seil braucht also nur sehr wenig gespannt zu werden.

Diese Berechnung einer Friktionswinde mit Vernachlässigung aller Nebenhindernisse ist wohl für kleine Winden genügend, allein wenn derartige Winden in grossem Maassstabe anzuordnen sind, lohnt es sich wohl der Mühe, die Rechnung möglichst genau durchzuführen, daher wollen wir die Berechnung mit Berücksichtigung der Nebenhindernisse folgen lassen.

Nehmen wir an, die verschiedenen Seilspannungen seien gerade so gross, dass ein Glitschen des Seiles auf den Rollen nicht eintritt. Es seien:

$t\ t_1\ t_2 \ldots\ldots t_{2n} = T$ diese Spannungen in den einzelnen Seilstücken.

n die Zahl, welche angibt, wie oftmal das Seil um jede der beiden Seilwellen geschlungen ist.

$\lambda = e^{f\pi}$ wobei $e = 2{\cdot}718$ die Basis der natürlichen Logarithmen,

π die Ludolph'che Zahl,

f der Reibungscoefficient für die Reibung des Seiles auf den Rollen,

f_1 der Reibungscoefficient zur Berechnung der Zapfenreibungen,

δ der Durchmesser des Seiles in Centimetern,

d der Durchmesser der Zapfen an der Seilwelle,

$D = 2w$ der Durchmesser der Seilwelle.

Wenn alle Spannungen die kleinsten Werthe haben, bei welchen ein Gleiten derselben auf den Trommeln nicht eintritt, so ist:

$$t_1 = \lambda t, \; t_2 = \lambda t_1 = \lambda^2 t, \; t_3 = \lambda t_2 = \lambda^3 t \; \ldots \; t_{2n} = T = \lambda^{2n} t \quad . \quad (1)$$

Die an den Kurbeln wirkende Kraft P hat nicht nur die Spannungsdifferenz $t_{2n} - t = T - t$, sondern auch die Zapfenreibungen und Steifheitswiderstände zu überwinden. Daher hat man:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = t_{2n} - t + f_1 \frac{d}{D} \left[\left(t + t_1\right) + \left(t_1 + t_2\right) + \left(t_2 + t_3\right) \ldots + t_{2n-1} + t_{2n} \right)\right]$$

$$+ 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} \left(t + t_1 + \ldots . + t_{2n-1} \right)$$

oder

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = t_{2n} - t + 2 \left(t + t_1 \ldots + t_{2n-1} \right) f_1 \frac{d}{D} + \left(t_{2n} - t \right) f_1 \frac{d}{D}$$

$$+ 0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} \left(t + t_1 \ldots + t_{2n-1} \right)$$

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = \left(t_{2n} - t \right) \left(1 + f_1 \frac{d}{D} \right) + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D} \right) \left(t + t_1 + \ldots t_{2n-1} \right)$$

Allein es ist vermöge (1):

$$t + t_1 + \ldots . + t_{2n-1} = t \left(1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \ldots \lambda^{2n-1} \right) = \frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda - 1} t$$

demnach erhält man:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = \left(t_{2n} - t \right) \left(1 + f_1 \frac{d}{D} \right) + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D} \right) \frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda - 1} t$$

oder weil $t_{2n} = T = t \lambda^{2n}$ ist:

$$P \frac{R}{r} \frac{k}{w} = T \frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda^{2n}} \left[1 + f_1 \frac{d}{D} + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D} \right) \frac{1}{\lambda - 1} \right]. \quad (2)$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem früher aufgestellten überein, wenn man in demselben diejenigen Glieder verschwinden lässt, welche die Axenreibung und Seilsteifheit ausdrücken. Der Einfluss von n auf den Werth von P liegt in dem Quotienten $\frac{\lambda^{2n} - 1}{\lambda^{2n}}$. Dieser Werth ist kleiner als die Einheit, nähert sich aber sehr bald dieser Grenze, so wie n gleich 2, 3, 4 … gesetzt wird. Hieraus sieht man, dass die zur Ueberwältigung eines gewissen Widerstandes T an den

Kurbeln erforderliche Kraft bei einer grösseren Anzahl von Umwindungen etwas grösser ist als bei einer kleineren Anzahl. Eine grössere Anzahl von Umwindungen vermehrt also die zur Ueberwindung des Widerstandes T erforderliche Kraft nur wenig, vermindert dagegen die Seilspannung t, was die Thätigkeit des Arbeiters, welcher diese Spannung hervorzubringen hat, erleichtert.

Es sei:

$$T = 1248 \text{ Kilgr}, \quad d = 6, \quad \delta = 4, \quad D = 36$$

$$f_1 = 0{\cdot}1, \quad f = 0{\cdot}28, \quad \frac{R}{r} = 5, \quad \frac{k}{w} = \frac{36}{18} = 2, \quad n = 3$$

so wird $\lambda = 2{\cdot}718^{0{\cdot}28 \times 3{\cdot}14} = 2{\cdot}408$ und:

$$1 + f_1 \frac{d}{D} + \left(0{\cdot}26 \frac{\delta^2}{D} + 2 f_1 \frac{d}{D}\right) \frac{1}{\lambda - 1} = 1{\cdot}122$$

$$P = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 1248 \times \frac{2{\cdot}408^6 - 1}{2{\cdot}408^6} \, 1{\cdot}122 = 140 \text{ Kilg.}$$

Die zum Treiben erforderliche Kraft ist in dem vorliegenden Falle im Verhältniss 1·122:1 grösser, als wenn keine Nebenhindernisse zu bewältigen wären.

Krahne.

Ein Krahn ist ein mit einer oder mehreren Winden versehenes, um eine vertikale Axe drehbares Gerüst, vermittels welchem Lasten von einem Ort nach einem anderen gebracht werden, vorausgesetzt, dass die beiden Orte innerhalb der Peripherie eines gewissen Kreises liegen. Nach der Aufstellungsweise können die Krahne in drei Klassen eingetheilt werden. 1) Krahne für geschlossene Lokalitäten, Magazin-Krahne. 2) Freistehende Krahne, Quai-Krahne zur Bedienung der Schiffe. 3) Transportable Krahne, Eisenbahnkrahne. Wir werden mehrere derselben beschreiben und dann ihre Construktion erklären.

Einfacher Magazinkrahn.

Fig. 1, Tafel XXVII. Das Drehgerüste besteht aus drei Balken a, b, c. a bildet eine Säule, sie ist oben und unten mit Zapfen versehen. Der obere g wird durch ein Lager gehalten, das an der Decke

des Magazins befestigt wird. Der untere Zapfen b dreht sich in einer am Boden befindlichen Pfanne. d, e sind Leitrollen. *f* eine Winde mit Rädern und Kurbeln. Das Seil, an welches die Last gehängt wird, geht über d und e und wird auf die Seilwelle der Winde *f* aufgewickelt. Hängt man die Last an das Seil, windet sie hierauf in die Höhe, dreht sodann das Gerüste um einen gewissen Winkel und lässt sodann die Last nieder, so wird mit der Last eine Ortsveränderung vorgenommen, die sich jedoch auf die Peripherie desjenigen Kreises beschränkt, welcher beim Drehen des Krahnes durch den Schwerpunkt der Last beschrieben wird.

Magazinkrahn.

Fig. 2, Tafel XXVII. Dieser unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass sich die Rolle d am Ende der Strebe b befindet, und dass diese durch eine Stange c in ihrer Lage gegen die Säule erhalten wird. Das Seil oder die Kette geht von d weg parallel mit b nach der Windenwelle herab. Die Winde kann hier wie im vorhergehenden Falle mit einer oder mit zwei Räderübersetzungen versehen werden. Die Winde wird jederzeit mit einer Bremse versehen, theils um die Last schwebend erhalten zu können, theils um das Niederlassen der Last sanft machen zu können.

Krahn ohne Strebe.

Fig. 3, Tafel XXVII. Bei dieser Anordnung wird die Strebe durch mehrere Stangen ersetzt, was zur Folge hat, dass der Raum zwischen Säule und Last frei wird.

Krahn ohne Säule.

Fig. 4, Tafel XXVII. Die Strebe dreht sich unten vermittelst eines vertikalen Zapfens in einer Pfanne und ist oben an einen Zapfen gehängt, der an der Decke des Magazins angebracht ist. Die Winde befindet sich an der Strebe und dreht sich mit dieser herum. Die Säule ist hier nicht vorhanden.

Giessereikrahn.

Fig. 5, Tafel XXVII. Der über die Säule herausragende Theil des Gerüstes ist doppelt vorhanden, so dass die oberen horizontalen Balken eine Wagenbahn bilden und zwischen den zwei Strebe-

werken, welche die Bahnbalken stützen, ein Zwischenraum besteht, dessen Breite genau oder nahe gleich ist der Säulendicke. Am äussersten Ende sind die Bahnbalken durch ein Zwischenstück auseinander gehalten und durch Schrauben verbunden.

Die Winde ist mit zwei Räderübersetzungen versehen, weil die zu hebenden Lasten oftmals sehr gross sind. Doch aber hat dieselbe die Einrichtung, dass man auch eine Uebersetzung in Anwendung bringen kann. Auch ist die Winde mit einer Bremsvorrichtung versehen. Bei einem Giessereikrahn ist ferner erforderlich, dass mit demselben die ganze Fläche des Kreises, dessen Halbmesser gleich ist der Länge der Bahnbalken, beherrscht werden kann, und zwar in so vollkommener Weise, dass die Formrahmen mit ganz sanfter Bewegung und genau in vertikaler Richtung von irgend einem Punkte der Kreisfläche in die Höhe gehoben und in irgend einem anderen Punkte der gleichen Kreisfläche abermals ganz sanft und nach vertikaler Richtung abgesetzt werden können. Dies erfordert, dass die Last im schwebenden Zustand von der Axe an bis gegen das Ende der Bahnbalken hin aus- und einbewegt werden kann, und hierzu dient ein (in der Regel) vierrädriger, auf den Bahnbalken laufender Wagen, der durch eine besondere Winde oder durch irgend eine andere Einrichtung zum Hin- und Herrollen gebracht werden kann. Die Last wird in der Regel nicht unmittelbar, sondern mittelbar durch Anwendung eines Flaschenzuges an den Wagen gehängt, und die Einrichtung muss so getroffen werden, dass der Wagen von selbst stehen bleibt, wenn die Last vermittelst der Krahnwinde gehoben oder niedergelassen wird, dass dagegen in der Last weder eine Senkung noch eine Hebung eintritt, wenn der Wagen auf der Bahn hinaus oder hereingerollt wird.

Fig. 6, Tafel XXVII. zeigt einen solchen Wagen mit Flaschenzug. Der Wagen a hat eine ähnliche Einrichtung wie ein Eisenbahnwagen. An demselben sind zwei dreieckige Schilde b angehängt, welche drei Axen tragen. Um die mittlere Axe drehen sich zwei Rollen c c, welche zusammen eine Flasche bilden; jede der beiden andern Axen ist in der Mitte mit einer Leitrolle d, e versehen, *f* ist eine Flasche mit drei Rollen. Das Seil ist aussen an die Bahnbalken befestigt, wird sodann über die Rolle d nach der Flasche *f* herabgeleitet, hierauf um sämmtliche Rollen c und *f* gewickelt, hierauf von *f* weg über e nach der Krahnsäule geleitet und von da an abermals über eine Rolle nach der Welle der Winde. Die Leitrollen d und e sind nothwendig, damit die Richtungen der Seilstücke g und h in eine und dieselbe gerade Linie fallen, so dass keinerlei Kräfte vorhanden sind, die eine Drehung des Wagens

um eine Vertikalaxe hervorzubringen streben. Bei i und k sind an den Wagen die Enden eines Seiles befestigt, das vermittelst mehrerer Leitrollen nach der zur Wagenbewegung dienenden Winde geführt wird.

Der Gerüstbau ist nach der Totallast, die gehoben werden soll, zu construiren, die Winde nach der Kraft, welche am Seil h ziehen muss, um die Hebung der Last zu bewirken, die Wagenwinde nach den Widerständen, welche der Wagenbewegung entgegenwirken.

Freistehender Krahn. Quaikrahn.

Fig. 7, Tafel XXVII. Dieser Krahn unterscheidet sich von den früher beschriebenen durch die Einrichtung, vermittelst welcher die Drehungsaxe in vertikaler Richtung erhalten wird. Die untere Hälfte der Axe ist nämlich hier in einen vertikalen, in einem Quadermauerwerk angebrachten Schacht eingesenkt, dreht sich unten in einer am Boden des Schachtes befindlichen Pfanne, und lehnt sich oben an der Mündung des Schachtes an Rollen, deren Axen in einem Gehäuse gelagert sind. Die oberen Schichten des Quaderbaues müssen mit den unteren gegen Horizontalverschiebung verbunden sein.

Freistehender Krahn mit unbeweglicher Axe.

Fig. 8, Tafel XXVII. Das ganze Krahngerüst dreht sich hier um eine unbewegliche vertikale Säule a, welche oben mit einem vertikalen Zapfen endigt und unten in eine gusseiserne, an ein Quaderwerk geschraubte Platte b eingesetzt ist. Das Drehgerüst besteht aus zwei Schilden c, die oben und unten durch Traversen verbunden sind. Die obere Traverse enthält eine vertikale Pfanne mit abwärts gekehrter Mündung, die untere Traverse bildet ein mit Rollen versehenes Gehäuse. Das ganze Gerüst ist mit seiner Pfanne auf den Zapfen der Säule gesteckt und stemmt sich vermittelst der Rollen am unteren Gehäuse gegen die daselbst rund gedrehte Säule. Vom unteren Gehäuse geht eine Strebe d aus, die am Ende eine Rolle trägt und durch eine eiserne Stange e an das Gerüst gehängt ist.

Blechkrahn, freistehend.

Fig. 9, Tafel XXVII. Dieser Krahn unterscheidet sich von dem vorhergehenden im Wesentlichen dadurch, dass hier das ganze um die feststehende Säule drehbare Gerüst aus Blech gefertigt ist.

Es bildet einen krummen Kanal mit viereckigem Querschnitt, ist bei a mit einer zur Aufnahme einer Pfanne dienenden Traverse und unten mit einem Rollengehäuse b versehen.

Krahn ohne Drehungsaxe.

Fig. 10, Tafel XXVII. Das Gerüst ist hier ein um einen vertikalen Zapfen drehbarer, mit zwei konischen Rädern b versehener Wagen. Die Schilde c des Wagens sind durch mehrere Traversen verbunden. Die Traverse d dient nur zur Verbindung. Die Traverse e verbindet die Schilde und ist in der Mitte mit einer Zapfenhülse versehen. Die Traversen $f\,f_1$ enthalten die Lager für die Axen der konischen Laufräder. Die Axen derselben sind horizontal und sind nach dem Drehungszapfen a hin gerichtet. Der Krahn rollt auf einer eisernen Grundplatte, die in der Mitte mit einer Hülse a_1 und aussen mit einer konischen Bahn versehen ist. Die Strebe g des Krahnes wird durch zwei Stangen h gehalten. Diese Einrichtung ist nicht praktisch, weil sie zu viel benutzbare Bodenfläche wegnimmt.

Transportabler Eisenbahnkrahn.

Fig. 1, Tafel XXVIII. Dieser Krahn unterscheidet sich von dem in Fig. 8, Tafel XXVII. dargestellten darin, dass die Grundplatte nicht auf ein Mauerwerk geschraubt ist, sondern das Gestell eines vierrädrigen Wagens bildet, der auf einer Eisenbahn läuft. a ist ein Gegengewicht, um das Umfallen des Krahnes zu verhüten, wenn derselbe stark belastet ist.

Theorie der Krahne.

Fig. 2, Tafel XXVIII. Die Berechnung der Winden und Flaschenzüge ist bereits früher behandelt worden; bedarf also bei den Krahnen keiner besondern Erklärung. Der Gerüstbau erfordert dagegen die Kenntniss der Kräfte, welche auf alle Theile desselben einwirken, und mit diesem Gegenstand müssen wir uns nun beschäftigen. Wir legen der Betrachtung eine Anordnung, ähnlich der früher beschriebenen zu Grunde. Nehmen wir oben bei A das Lager, unten bei D die Pfanne weg und bringen nach den in der Zeichnung durch Pfeile angedeuteten Richtungen die Kräfte P_1 P_2 P_3 an, von denen die erste gleich ist dem Druck zwischen Zapfen und Lager, die zweite gleich ist dem Druck des Pfannenumfanges gegen den unteren Zapfen der Säule, die dritte endlich gleich ist dem Druck

des Zapfens gegen den Boden der Pfanne, so wird der ganze Krahn in ein freischwebendes Körpersystem verwandelt, an welchem ein Gleichgewicht der Kräfte stattfindet.

Es sei F der Schwerpunkt des Krahnes sammt Winde. P_4 das Gewicht des Krahnes. G der Schwerpunkt der Strebe CE. P_5 das Gewicht derselben. P_6 der in der Zugstange BE herrschende Zug. P_7 die in der Strebe CE herrschende Pressung. Da die sämmtlichen Kräfte im Gleichgewicht sind, so bringen sie weder eine allgemeine noch irgend eine spezielle Bewegung hervor.

Damit keine Drehung um eine durch D gehende auf der Ebene der Zeichnung senkrechten Axe entsteht, muss sein:

$$P_1 \, h = P_4 \, a_1 + Q \, a$$

woraus folgt:

$$P_1 = Q \frac{a}{h} + P_4 \frac{a_1}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Damit keine Drehung um eine durch A gehende Axe entsteht, muss sein

$$P_2 \, h = Q \, a + P_4 \, a_1$$

demnach

$$P_2 = P_1 = Q \frac{a}{h} + P_4 \frac{a_1}{h} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Die Pressungen, welchen die beiden Zapfen der Säule ausgesetzt sind, sind demnach gleich gross, die Zapfendurchmesser erhalten demnach ebenfalls gleiche Grösse. Diese Pressungen fallen gross aus, wenn die Ausladung a gross und die Säulenhöhe klein ist. Eine im Verhältniss zur Ausladung grosse Säulenhöhe ist daher für die Construktion günstig, nicht nur weil hierdurch die Zapfen klein ausfallen, sondern auch weil dann die Befestigung des obern Lagers und der untern Pfanne keinerlei Schwierigkeit verursacht. Gewöhnlich ist

$$\frac{a}{h} = 1, \quad P_4 = Q, \quad \frac{a_1}{h} = \frac{1}{4}$$

und dann wird

$$P_2 = P_1 = \frac{5}{4} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die Momente der Kräfte, welche die Säule bei B und C abzubrechen streben, sind $P_1 \, h_1$ und $P_2 \, h_2$. Damit also der Säulenquerschnitt nicht zu gross gemacht zu werden braucht, ist es gut, wenn die Punkte B und C möglichst nahe an A und D zu liegen kommen.

Jene Momente werden gleich Null, wenn $h_1 = h_2 = 0$, in welchem Falle die Säule gar nicht auf Biegung in Anspruch genommen

wird, daher auch gar nicht zu existiren braucht. (Krahn ohne Säule, Fig. 4, Tafel XXVII.) Für die Stärke der Säule ist es (wenn h_1 und h_2 endliche Werthe haben) vortheilhaft, wenn die Höhe h des Krahnes im Verhältniss zur Ausladung gross ist, weil dann die Pressungen P_1 und P_2 und mithin die Momente $P_1\, h_1$ und $P_2\, h_2$ klein ausfallen.

Schneidet man BE und das Seil EC entzwei und bringt die Züge P_6 und Q an, so ist die Strebe EC ein Hebel, der bei C seinen Drehungspunkt hat und an welchem sich die Kräfte $Q\, P_6\, P_5$ das Gleichgewicht halten, und man erhält:

$$P_5\, a_2 + Q\, a = P_6\, (h - h_1 - h_2) + Q\, a_3$$

wobei a_3 den Abstand des längs der Strebe herablaufenden Seiles von der Axe der Strebe bezeichnet. Hieraus folgt:

$$P_6 = Q\, \frac{a - a_3}{h - h_1 - h_2} + P_5\, \frac{a_2}{h - h_1 - h_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Dieser Stangenzug fällt also klein aus, wenn die Säulenhöhe h im Verhältniss zur Ausladung a gross ist.

Nennt man α und β die Winkel, welche die Richtungen von Q und P_6 mit der Strebenrichtung EC bilden, so erhält man:

$$P_7 = Q + P_6 \cos \beta + Q \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Nach diesem Werth von P_7 ist der Querschnitt der Strebe zu bestimmen.

Ganz ähnliche Resultate erhält man für alle andern Arten von Krahne. Für den Schachtkrahn, Fig. 7, Tafel XXVII., findet man, dass eine grosse Schachttiefe vortheilhaft ist, weil dann die Pressung der Säule gegen die Rollen klein ausfällt, also nicht nur die Rollenzapfen schwach gehalten werden können, sondern auch die Befestigung des Rollengehäuses gegen die oberen Steinschichten und die Befestigung dieser Schichten gegen die untere Quadermasse weniger Schwierigkeiten verursacht. Für einen Säulenkrahn mit unbeweglicher Säule, Fig. 8 und 9, Tafel XXVII., ist eine im Verhältniss zur Ausladung grosse Säulenhöhe vortheilhaft, weil dann der obere Zapfen schwach sein kann. Der untere Querschnitt der Säule ist jedoch von der Säulenhöhe nicht abhängig.

Das Construktionsmaterial für Krahne.

Dass die Winden, Flaschenzüge u. s. w. theils von Schmiedeeisen, theils von Gusseisen herzustellen sind, ist selbstverständlich. Was aber den Gerüstbau betrifft, so kann dieser von Holz, von Gusseisen oder von Schmiedeeisen gemacht werden. Für Magazinkrahne, die unter Dach aufgestellt, daher der Einwirkung der Sonne, des Regens und der Atmosphäre nicht ausgesetzt sind, ist es in der Regel am zweckmässigsten, das Gerüst aus Holz herzustellen, weil es in diesem Falle hinreichende Dauer gewährt, nicht viel kostet und es auf Schönheit nicht eben ankommt.

Freistehende Krahne sollen jedoch jederzeit ein Gerüst aus Schmiede- oder Gusseisen erhalten, weil hölzerne Gerüste zu schnell zu Grunde gehen, wenn sie allen Witterungseinflüssen ausgesetzt sind. Die Blechkrahne sind wohl jetzt ziemlich in der Mode, allein die Krahne mit gerader Strebe und Zugstange verdienen den Vorzug, weil sie nicht auf Biegung in Anspruch genommen sind. Nur ist es wahr, dass die Blechkrahne um die Säule herum sehr viel freien, zu verschiedenen Dingen benutzbaren Raum darbieten.

Für freistehende Krahne, die nicht nur dem Wind und Wetter, sondern auch dem Muthwillen und bösen Willen der Menschen preisgegeben sind, ist es angemessen, in der Construktion alles zu vermeiden, was zu Verletzungen, Beschädigungen oder Entwendungen einladen könnte. Es ist z. B. zweckmässig, die Axen nicht in Lager mit angeschraubten Deckeln zu legen, sondern die Axenenden in Durchbohrungen laufen zu lassen, die an den Schilden anzubringen sind.

Sowohl für die Construktion der Krahnengerüste als auch anderer Gerüste gelten folgende Grundsätze: 1) Diejenigen Construktionen verdienen den Vorzug, bei welchen die grösseren, ausgedehnteren und wichtigeren Bestandtheile entweder einer Ausdehnung oder einer Zusammendrückung, nicht aber einer Biegung ausgesetzt sind. Die Construktionen Fig. 2, 8 und 10, Tafel XXVII. entsprechen am besten diesem Grundsatz und sind den Krahnen mit steifem, gusseisernem oder schmiedeeisernem Schnabel vorzuziehen. 2) Alle Theile eines solchen Gerüstes sollen mit einander in der Weise verbunden werden, dass das Ganze eine Gliederung bildet, in der die einzelnen Theile auch dann nicht gewaltsam gebogen werden, wenn in Folge einer starken Belastung des Baues Formänderungen in den Theilen eintreten. Dieser Grundsatz ist am consequentesten bei dem Krahn Fig. 1, Tafel XXVIII. berücksichtigt, indem alle einzelnen Theile durch Gewerbe verbunden sind.

Vollständige Berechnung eines Krahnes.

Es sei ein Giessereikrahn mit hölzernem Gerüste, ähnlich dem in Fig. 5, Tafel XXVII. dargestellten zu berechnen und zu construiren. Wir nehmen an:

1) Die auf die Kurbeln in jedem Augenblick wirkende Kraft gleich der von zwei Arbeitern, also $P = 2 \times 16 = 32$ Kilg.

2) Eine Winde mit zwei Uebersetzungen, $\frac{R}{r} = 6, \frac{R_1}{r_1} = 5, \frac{k}{w} = 3.$

3) Einen Flaschenzug mit 5 Rollen; 3 Rollen in der unteren, 2 Rollen in der oberen Flasche.

4) Für den ganzen Mechanismus (Winde, Flaschenzug und Rollen) ein Güteverhältniss gleich 0·6.

Unter dieser Voraussetzung ist die Last, welche bei Anwendung einer Kraft von $P = 32$ Kilgr. gehoben werden kann:

$Q = 32 \times 6 \times 5 \times 3 \times 5 \times 0{\cdot}6$	=	8640 Kilg.
Spannung im Seil oder in der Kette, welche sich auf die Welle aufwickelt, annähernd $32 \times 6 \times 5 \times 3$	=	2880 „
Diese Spannung ist so gross, dass eine Kette angewendet werden muss, und es ist (Resultate Seite 40) Durchmesser des Ketteneisens . .	=	1·5 Centm.
Torsionsmoment der Kurbelaxe 32×39	=	1248 Kilgrcm.
Torsionsmoment der mittleren Axe 1248×5 . .	=	6240 „
Torsionsmoment der Kettenaxe 6240×6 . . .	=	37440 „
Durchmesser dieser drei Axen (Result. Seite 50)	=	3·1 Centm.
	=	5·4 „
	=	9·7 „
Halbmesser des grossen Rades $6 \times 9{\cdot}7$	=	58·2 „
Halbmesser des Getriebes hierzu	=	9·7 „
Halbmesser des kleinen Rades $6 \times 5{\cdot}4$	=	32·4 „
Halbmesser des Getriebes $\frac{1}{5}\ 32{\cdot}4$	=	6·5 „
Zahnbreite des grossen Rades $1{\cdot}212 \times 9{\cdot}7$. . .	=	11·75 „
Zahnbreite des kleinen Rades $1{\cdot}212 \times 5{\cdot}4$. . .	=	6·55 „
Anzahl der Zähne eines jeden dieser Räder . .	=	72
Durchmesser des Zapfens der Axe der Kettenwelle $= 0{\cdot}12 \sqrt{2880}$	=	6·4 Centm.
Druck auf jeden Zapfen der drei Leitrollen (annähernd) $\frac{1}{2} \sqrt{\overline{2880}^2 + \overline{2880}^2}$	=	2030 Kilg.
Durchmesser eines solchen Zapfens $0{\cdot}12 \sqrt{2030}$.	=	5·4 Centm.

Durchmesser einer Leitrolle $5 \times 5{\cdot}4$ = 27·0 Centm.
Druck, welchen ein Zapfen der untern Flasche auszuhalten hat $\frac{1}{2}$ 8640 = 4320 Kilg.
Durchmesser eines solchen Zapfens $0{\cdot}12 \sqrt{4320}$. = 7·8 Centm.
Durchmesser einer Rolle des Flaschenzuges . . = 39 „
Druck auf einen Zapfen des Wagens $\frac{8640}{4}$. . = 2160 Kilg.
Durchmesser eines Wagenzapfens = 5·5 Centm.
Durchmesser eines Wagenrades = 27·5 „

Für die Construktion des Krahnengerüstes sei:
Höhe des Krahnes von Zapfen bis Zapfen . . = 500 Centm.
Ausladung = 500 „
Gewicht des Krahnes (dieses ist der Erfahrung gemäss annähernd gleich der Last, welche der Krahn zu heben hat) = 8640 Kilg.
Entfernung des Schwerpunktes des Krahnbaues von der Säulenaxe = 120 Centm.
Senkrechte Entfernung des Punktes, in welchem der Bahnbalken der Säule begegnet von der Richtung der Hauptstrebe = 200 „
Länge der Hauptstrebe = 500 „

Mit diesen Daten findet man:
Druck, welchen ein Zapfen der Säule auszuhalten hat, wenn die Last am Ende des Bahnbalkens hängt $8640 + 8640 \frac{120}{500}$ = 10800 Kilg
Durchmesser eines Zapfens $0{\cdot}12 \sqrt{10800}$ = 12 Centm.
Damit der Zapfen mit der Säule gut befestigt werden kann, ist es angemessen, die Dicke derselben 5 mal so gross zu machen, als den Zapfendurchmesser, demnach ist diese Dicke . . . = 60 „

Die Querschnitte des Bahnbalkens brauchen nicht berechnet zu werden, weil diese Balken durch die Streben mehrmals unterstützt werden. Man darf nehmen:
Höhe eines Bahnbalkens = 40 „
Dicke eines Balkens $\frac{1}{2}$ 40 = 20 „
Pressung, welcher die Hauptstreben ausgesetzt sind, wenn die Last am Ende des Bahnbalkens hängt, gleich $8640 \frac{500}{200}$ = 21600 Kilg.

Hierbei ist jedoch der Einfluss der Hilfsstreben nicht berücksichtigt.

Pressung, welcher eine der beiden Hauptstreben ausgesetzt ist, gleich $\frac{1}{2}$ 21600 = 10800 Kilg.

Bestimmen wir nun den Querschnitt einer solchen Strebe, indem wir festsetzen, dass in derselben ein schwankender Zustand erst dann eintrete, wenn die Pressung zehnmal so gross würde, als sie wirklich ist, und vernachlässigen auch hier den Einfluss der Hilfsstreben, so haben wir zur Bestimmung des Querschnitts in der Formel (Resultate, Seite 21):

$$P = \frac{\varepsilon}{12} \pi^2 \frac{b h^3}{l^2}$$

zu setzen.

$P = 10 \times 10800 = 108000$

$\pi = 3{\cdot}142$

$\varepsilon = 120000$ (Modulus der Elastizität für Eichenholz)

$l = 500$

$b = 2 h$ (die grössere Dimension des Querschnitts zwei mal so gross als die kleinere), und dann findet man:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 \; P \; l^2}{2 \; \varepsilon \; \pi^2}} = \ldots\ldots = 19 \text{ Centm.}$$

$$b = 2 h \ldots\ldots\ldots\ldots = 38 \;\;\text{„}$$

Hebe-Gerüste.

Wenn eine Last in einer vertikalen Richtung gehoben werden soll, werden sogenannte Hebegerüste angewendet. Die gebräuchlichsten sind folgende:

Der Dreifuß.

Fig. 3, Tafel XXVIII. Dieser wird vorzugsweise bei Brunnengrabungen angewendet, und in der Regel sehr provisorisch zusammengesetzt. Er besteht aus drei unten mit eisernen Spitzen versehenen Balken, die in Form einer dreiseitigen Pyramide zusammengestellt und oben durch einen eisernen Querbolzen verbunden sind. An der

Spitze dieser Pyramide hängt eine Rolle und das Gerüst wird mit einem Kreuz- oder Kurbelhaspel versehen. Das Seil, an welchem die Last hängt, geht oben über die Rolle und ist an der Welle des Haspels befestigt.

Der Vierfuß.

Fig. 4, Tafel XXVIII. Dieser besteht aus vier pyramidal zusammengestellten unten mit eisernen Spitzen versehenen Balken, die oben durch eine gusseiserne Fassung in ähnlicher Weise, wie die Füsse eines Messtisches verbunden sind. An diese Fassung ist ein Flaschenzug gehängt und das Seil desselben wird auf die Welle einer Räderwinde aufgewunden, die zwischen zwei von den vier pyramidalen Balken angebracht ist.

Dieser Vierfuss wird in Montirungswerkstätten und zum Belasten von Frachtwagen angewendet. Um eine Last auf einen Frachtwagen zu bringen, wird sie zuerst in die Mitte unter die Pyramide gebracht, dann vermittelst des Flaschenzuges und der Winde so hoch gehoben, dass der Wagen unter dieselbe gebracht werden kann, worauf dann die Last durch eine Rückbewegung der Winde nach dem Wagen herabgelassen wird.

Der Zweifuß oder die Mastenmaschine,

Fig. 5 und 6, Tafel XXVIII., wird vorzugsweise zur Ausrüstung der Segelschiffe, zur Aufstellung der Masten und zur Montirung der Dampfschiffe gebraucht. Die Dimensionen dieser Hebwerke sind in diesem Falle sehr beträchtlich, und die Anordnung und Ausführung geschieht mit vieler Sorgfalt.

a sind zwei oben durch eine Traverse verbundene, durch eingeankerte Ketten b in geneigter Lage gehaltene hohe Stangen oder Masten. Dieselben werden gewöhnlich aus Blechröhren hergestellt. Die unteren halbkugelförmigen Enden sitzen in gusseisernen in die Quaimauern eingelassenen Pfannen. c sind Hilfsstreben aus Holz. In der obern Traverse sind zwei mächtige Flaschenzüge eingehängt. Die freien Seil- oder Kettenenden derselben gehen von den obern Flaschen nach den Leitrollen d d herab, und von da noch in horizontaler Richtung nach zwei Friktionserdwinden e, die in einiger Entfernung vom Quairande so aufgestellt sind, dass zwischen denselben eine freie Gasse entsteht, durch welche die Lasten bis an den Punkt h des Quairandes in die Mitte zwischen die Masten gebracht werden. In der Mitte dieser Gasse hinter den Erdwinden

wird noch eine dritte, in der Zeichnung nicht dargestellte Winde g aufgestellt, deren Bestimmung sogleich erhellen wird, wenn wir den Gebrauch der ganzen Einrichtung erklären. Wenn eine Last, z. B. ein Dampfkessel, in ein Schiff gebracht werden soll, wird derselbe zuerst an den Rand h der Quaimauer gebracht. Hierauf werden die untern Flaschen ganz herabgelassen, nach den Gerüststangen a hereingezogen und wird der Kessel durch Ketten an die Flaschen gehängt. Endlich wird der Kessel durch ein horizontales Seil mit der in der Gasse aufgestellten Winde g verbunden. Nach dieser Vorbereitung werden die Erdwinden e so in Bewegung gesetzt, dass sich die unteren Flaschen der Flaschenzüge den obern Flaschen nähern, wird aber gleichzeitig die mittlere Winde g so bewegt, dass sich das Seil von der Welle abwickelt, aber stets in einem stark gespannten Zustand verbleibt. Nach einiger Zeit kommt der Kessel ins Schweben und dann wird an den Winden e angehalten, wird dagegen an der Winde g nachgelassen, bis der Kessel in vertikaler Richtung unter der obern Traverse schwebt. Endlich wird an der Winde g angehalten, und werden dagegen die Winden e in Gang gebracht, jedoch so, dass sich nun die Last niedersenkt, bis sie die Tiefe erreicht, wo sie im Schiff ihren Platz hat.

Nennen wir l die Länge einer Gerüststange. α und β die Winkel, welche ihre Richtung bildet mit der Kette b und mit der Vertikalen. Q das Gewicht der zu hebenden Last. q das Gewicht der beiden Gerüststangen. S die Summe der Spannungen in den zwei Ketten b. S_1 die Summe der Pressungen in den zwei Gerüsstangen, so hat man, vorausgesetzt, dass der Schwerpunkt der letzteren in ihrer Mitte liegt:

$$S \, l \sin\alpha = Q \, l \sin\beta + q \frac{l}{2} \sin\beta$$

$$S_1 = S \cos\alpha + Q \cos\beta$$

oder

$$\left.\begin{aligned} S &= \left(Q + \frac{1}{2} q\right) \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \\ S_1 &= \left(Q + \frac{1}{2} q\right) \sin\beta \operatorname{cotg}\alpha + Q \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; (1)$$

Diese Kräfte werden klein, wenn β klein, α dagegen gross genommen wird. Es ist also vortheilhaft, die Gerüststangen im Verhältniss zur Ausladung sehr lang zu machen, und die Einankerung der Ketten in grosser Entfernung vom Rande des Quais anzubringen.

30.

Wir wollen die Berechnung eines solchen Hebwerks für folgende Annahmen durchführen:

Durchmesser des Seils	5 Centm.
Entsprechende Spannung in einem Seil m d . .	2000 Kilg.
Anzahl der Rollen einer Flasche	4
Güteverhältniss des Flaschenzuges	0·66

Dann ist

die Last Q, welche durch beide Flaschenzüge gehoben wird, wenn die Seilspannung 2000 Kilg. beträgt, $Q = 2 \times 2000 \times 8 \times 0{\cdot}66$ $=$ 21120 Kilg.

Last für einen Flaschenzug $\frac{1}{2}$ Q $=$ 10560 „

Durchmesser der Rollenaxe eines Flaschenzuges

$0{\cdot}12 \sqrt{\frac{1}{2}\,10560}$ $=$ 8·6 Centm.

Nun ist (Resultate, Seite 104):

$$\frac{k^{2n} - 1}{2\,n\,k^{2n}\,(k-1)} = 0{\cdot}66$$

Hieraus folgt wegen $n = 4$ $k = 1{\cdot}1$

demnach

$$k = 1{\cdot}1 = 1 + 0{\cdot}26\,\frac{\delta^2}{D} + 2\,f\,\frac{d}{D}$$

und es ist zu setzen $\delta = 5$, $d = 8{\cdot}6$, $f = 0{\cdot}1$

Dann findet man

Durchmesser einer Rolle $D =$ 82 Centm.

Für die Berechnung des Gerüstes sei:

Die Ausladung desselben		400 „
Höhe des Gerüstes		1000 „
Entfernung $\overline{in}$	$=$	1000 „
Länge der Gerüststangen		1070 „
Winkel β	$=$	22°
Winkel α	$=$	33°
Ungefähres Gewicht einer Gerüststange, vorausgesetzt, dass dieselben aus Eisenblech gemacht werden		1010 Kilg.
Durchmesser einer Gerüststange $\frac{1070}{25}$		40 Cent.

Nun sind die Spannungen in den beiden Ketten (Gleichung 1)

$$S = (21120 + 1010)\,\frac{0{\cdot}375}{0{\cdot}545} \quad . \; . = 15227 \text{ Kilg.}$$

Spannung in einer Kette $\frac{1}{2}$ s = 7668 Kilg.

Spannung pr. 1 Quadratcentimeter der Kettenstangen gleich $\frac{1}{10}$ der absoluten Festigkeit $\frac{3300}{10}$ = 330 „

Querschnitt einer Kettenstange $\frac{7668}{330}$ = 23 Quadrcm.

Pressung in einer Gerüststange

$$\frac{S_1}{2} = \frac{1}{2}\,(15227 \times 0{\cdot}839 + 21120 \times 9{\cdot}927) \qquad = 16176 \text{ Kilg.}$$

Zur Berechnung der Blechdicke einer Röhre der Gerüsstange hat man die Formel (Resultate, Seite 21):

$$P = \frac{\varepsilon}{64}\,\pi^3\,\frac{d^4 - d_1{}^4}{l^2}$$

woraus folgt:

$$d_1 = \sqrt[4]{d^4 - \frac{64\,P\,l^2}{\varepsilon\,\pi^3}}$$

und es ist zu setzen:

$$l = 1070, \quad d = 40, \quad \varepsilon = 2000000, \quad \pi^3 = (3{\cdot}14)^3 = 31$$

$$P = 10 \times 16176$$

Dieser Werth von P sagt aus, dass der schwankende Zustand in einer Gerüststange eintreten soll, wenn die Pressung in derselben zehnmal so gross ist, als sie wirklich ist.

Mit diesen Werthen findet man:

Innerer Durchmesser der Röhren d_1 = 39 Centm.

Blechdicke der Röhren $\frac{40 - 39}{2}$ = 0·5 „

Zur Bestimmung der Dimensionen der obern Traverse, an welcher die Flaschenzüge hängen, sei:

Länge der Traverse = 150 „

Druck auf einen Zapfen der Traverse $\frac{1}{2}$ 21120 = 10560 Kilgr.

Durchmesser eines Zapfens der Traverse . . . = 12 Centm.

Querschnitt der Traverse (Resultate, Seite 81):

Höhe = 29·3 „

Breite = 9·4 „

Aufstellungsgerüste.

Fig. 7, Tafel XXVIII. Um sehr lange Gegenstände, z. B. Blechkamine, Masten, Obelisken aufzustellen, bedient man sich gewöhnlich eines zu diesem Behufe sehr zweckmässig ausgedachten Gerüstes von folgender Einrichtung, das in Paris zur Aufstellung des Obelisken von Luxor gebraucht wurde.

a ist der Sockelbau, auf welchen der Obelisk b gestellt werden soll. c ist ein provisorischer Unterbau, welcher sich an den Sockel anschliesst und auf welchen der Obelisk vor seiner Aufrichtung gelegt wurde, und zwar so, dass seine Basiskante d die Oberfläche des Sockels längs derjenigen Linie berührt, in welcher diese Kante die Basis berühren soll, wenn der Obelisk aufgestellt ist. Die Basis des Obelisken ist mit einer Armirung versehen, an welcher sich zwei Zapfen befinden, die über die Seitenflächen des Obelisken hinausragen, und deren geometrische Axen mit der Richtung der Kante d zusammenfallen. Diese Zapfen sind in Lager gelegt, welche an dem Sockelbau befestigt sind. Auf diese Weise kann der Obelisk keine andere Bewegung machen, als eine Drehung um seine Kante d. e sind zwei oben bei g verbundene, unten bei *f* ziemlich weit von einander abstehende Gerüststangen, die sich bei *f* in Unterlagen oder um Axen drehen. g h ist eine Kette, welche bei h an die Spitze des Obelisken, bei g an die Gerüststangen befestigt ist. g i ist eine bei g befestigte Kette, die sich bei i um die Welle einer Winde aufwickelt. Es können auch mehrere solcher Ketten und mehrere Winden angewendet werden. h k ist eine dritte Kette; dieselbe ist an der Spitze des Obelisken befestigt und wickelt sich auf einer Welle der Winde k auf. Diese Kette ist etwas länger als die Entfernung des Ortes k von der Spitze des Obelisken, wenn dieser aufgerichtet steht. Die Aufstellung geschieht nun, indem die Winde i durch Arbeiter so bewegt wird, dass sich die Kette g i auf die Welle dieser Winde aufwickelt, während gleichzeitig die Winde k durch andere Arbeiter so bewegt wird, dass die Kette k h stets in einem gespannten Zustand bleibt. Sind die Winden im Gang, so drehen sich die Gerüststangen um *f* nach rechts hin und wird der Obelisk durch die Kette g h gehoben, wobei er sich um die bei d befindlichen Zapfen drehen muss. Ist die Aufrichtung so weit fortgeschritten, dass die durch den Schwerpunkt des Obelisken gehende Vertikallinie durch d geht, so muss in diesem Augenblick die Kette k h stark angezogen sein, denn so wie die Bewegung der Winde i noch um sehr wenig fortgesetzt wird, hört die Spannung in der Kette g i auf, wird demnach der Obelisk nur noch durch die im

gespannten Zustand befindliche Kette k h gehalten. Wird nun die Winde vorsichtig so bewegt, dass sich diese Kette langsam von der Welle der Winde k abwickelt, so erreicht endlich der Obelisk seine Stellung, und zwar diejenige, welche er im aufgerichteten Zustand haben soll. Aehnlich sind auch die Einrichtungen auf den Dampfschiffen zum Umlegen der Kamine, die, wenn sie umlegbar gemacht werden sollen, unten mit einem Charnier versehen werden.

Schiebebühnen.

Schiebebühnen sind vier- oder sechsrädrige niedrige Wagen, die mit einer ebenen Bühne und mit Bahnschienen versehen sind, und zum Transport der Eisenbahnfahrzeuge (Güterwagen, Personenwagen, Tender, Lokomotive) innerhalb des Bahnhofraumes dienen.

Kleine Schiebebühne.

Fig. 8, Tafel XXVIII. A ist eine Wagenremise, aus welcher Eisenbahnfahrzeuge vermittelst einer Schiebebühne auf den Geleisen B und C nach dem zu A parallelen Geleise D D_1 gebracht werden sollen. Die zu diesem Behufe dienende Schiebebühne ist in Fig. 9 und 10, Tafel XXVIII. dargestellt.

B und D sind gewöhnliche Schienenbahnen. C ist eine Verbindungsbahn mit drei Langschwellen. Auf jede Langschwelle ist eine schmiedeeiserne Schiene gelegt und angeschraubt. Die Schiebebühne ist ein aus zwei langen Schienen a a, aus sechs kurzen Schienen b b und aus zwei Kreuzen c c zusammengesetzter Rahmenbau. Zwischen je zwei Schienen b b befinden sich vier Laufräder d d_1. Die Axenlager derselben sind an die Blechwände b b geschraubt. Diese Räder laufen auf den Schienen, mit welchen die Langschwellen C C C versehen sind. An die Schienen a a sind zwei unten rechtwinklig umgebogene Schienen e e befestigt, welche eine Bahn bilden, auf welche der zu transportirende Wagen gestellt wird. f f_1 sind vier um ziemlich lange vertikale Axen drehbare zungenförmige Schienen. Wenn ein Wagen aus der Remise A auf die Bahn gebracht werden soll, verfährt man auf folgende Weise. Man rollt die Schiebebühne auf den Schienen C C C fort, bis die Bahnen e e der Schiebebühne die Verlängerung von B B bilden. Hierauf werden die Zungen um ihre Vertikalaxen gedreht, bis sie die Richtung von B B erhalten. In dieser Stellung bilden die Oberflächen der Zungen schiefe Ebenen, die von den Oberflächen der Schienen B B nach

den etwas höher gelegenen Schienen e e der Schiebebühne führen. Der fortzuschaffende Wagen kann nun von B B über die schiefen Ebenen von $f f$ auf die Schienen e e der Schiebebühne gerollt werden. Nun rollt man die Schiebebühne auf den Schienen C C C fort, bis die Schienen e e in die Richtung der Schienen D D fallen, dreht die Zungen $f f$ oder $f_1 f_1$ um ihre Vertikalaxen, so dass sie ebenfalls in die Richtungen D D oder $D_1 D_1$ fallen und rollt endlich den auf der Schiebebühne stehenden Wagen über die schiefen Ebenen der Zungen $f f$ oder $f_1 f_1$ herab, wodurch derselbe nach D D oder auch nach $D_1 D_1$ gelangt.

Schiebebühne mit Grube.

Fig. 1 und 2, Tafel XXIX. A ist eine Wagenremise. B B_1 eine Eisenbahn. C D E F eine ausgemauerte Grube, auf deren Boden eine Eisenbahn mit zwei oder drei Schienensträngen G G_1 gelegt ist. a_1 a_2 . . . sind Stücke von Eisenbahnen, die durch Thüröffnungen in der Wand der Remise nach dem Rand D F der Grube hinausführen. Auf der Bahn der Grube läuft eine Schiebebühne, welche mit einem zu B B_1 parallelen Eisenbahnstück versesen ist. Die Schienen von B B_1, a_1 a_2 . . . und die Schienen der Schiebebühne liegen gleich hoch. Wird die Schiebebühne nach H gebracht, so bildet ihre Eisenbahn die Fortsetzung von B und B_1, kann also ein Bahnwagen von B_1 oder von B auf die Schiebebühne gebracht werden. Wird dann die Schiebebühne in der Grube bis H_1 fortgerollt, so bildet ihre Eisenbahn die Fortsetzung von a_3, kann also der Wagen auf die Bahn a_3 in der Remise gerollt werden. Die in Fig. 1 und 2 dargestellte Schiebebühne ist zum Transport von unbeladenen Güter- oder Personenwagen geeignet. Sie ist mit keiner Winde versehen, weil in diesem Falle zwei an der Bühne schiebende Arbeiter zu ihrer Fortbewegung genügen.

Grössere Schiebebühnen für Lokomotiv-Remisen.

Fig. 3, Tafel XXIX. A A_1 zwei Lokomotivremisen. B B_1 zwei Eisenbahnen, welche an den Rand einer Grube C D E F führen. J_1 J_2 J_3 J_4 Schienenstränge einer am Boden der Grube gelegten Eisenbahn. G, H die Schiebebühne mit einer zu B B_1 parallelen Eisenbahn. a_1 a_2 . . . b_1 b_2 Eisenbahnstücke, die von den Rändern C D und F E der Grube in die Remisen A A_1 führen. Wird die Schiebebühne nach G gebracht, so bildet ihre Eisenbahn Fortsetzungen der Bahnen B B_1, kann also eine Lokomotive von B oder B_1 auf die Schiebebühne gerollt werden.

Wird hierauf die Schiebebühne nach H fortgerollt, so bildet ihre Eisenbahn Fortsetzungen der Bahnen a_2 b_2, kann also die Lokomotive auf der erstern dieser Bahnen nach A, und auf der letztern nach A_1 gebracht werden. Die Einrichtung dieser Schiebebühne zeigt Fig. 4 und 5, Tafel XXIX.

A B C D ist ein aus vertikal gestellten Schienen zusammengesetzter, durch verschiedene Traversen ausgesteifter Rahmenbau. P Q R ist ein Ausbau, welcher durch die Traversen E F, H G, J K, L M getragen wird. Auf diesem Ausbau steht eine Räderwinde. a_1 a_2 a_3 a_4 sind Laufräder, die auf den Strängen J_1 J_4 der Grubenbahn laufen. b_1 b_2 b_3 b_4 sind Triebräder, die auf den Strängen J_2 J_3 laufen. b_1 und b_2, b_3 und b_4 befinden sich an den Axen c c_1, von denen jede in der Mitte mit einem Wurmrad versehen ist, in die Zähne derselben greifen zwei Schrauben ohne Ende e e_1 ein, die sich an einer Axe d befinden, welche von den Kurbeln der Winde aus durch zwei Räderübersetzungen getrieben wird.

Wir wollen die für die Construktion einer solchen Schiebebühne dienenden Rechnungen durchführen.

Es sei für eine Schiebebühne, vermittelst welcher Lokomotive sammt Tender transportirt werden kann:

Länge der Schiebebühne A C	=	10 Meter
Breite A B	=	1·65 „
Höhe der Hauptschilde mit Einschluss der Bahnschienen	=	0·50 „
Gewicht der Lokomotive mit Wasserfüllung .	=	27000 Kilg.
Druck der am stärksten belasteten Axe gegen die Bahn	=	10000 „
Gewicht des Tenders sammt Wasser und Kohlen	=	17000 „

Um die Metallstärke der Schienen mit möglichster Genauigkeit zu berechnen, müsste man die Brücke als einen Stab ansehen, der an vier Punkten aufliegt und an verschiedenen Punkten belastet wäre. Allein diese genaue Berechnung führt zu grossen Weitläufigkeiten, wir wollen uns daher mit einer Annäherung begnügen, die wir erhalten, indem wir 1) die Brücke aus drei an ihren Enden unterstützten Stäben betrachten, von denen jeder $\frac{1}{3}$ 1000 = 333 Centimeter lang ist; 2) ferner annehmen, dass jeder solche Stab am stärksten in Anspruch genommen ist, wenn die stärkst belastete Axe der Lokomotive über der Mitte eines solchen Stabes steht; 3) das Gewicht der Schiebebühne selbst vernachlässigen, dagegen aber 4) die Schienen so betrachten, dass sie bei dieser Belastung

auf $\frac{1}{10}$ der Bruchfestigkeit in Anspruch genommen würden, wenn die Schiebebühne selbst kein Gewicht hätte.

Nennen wir:

$2\,l = \frac{1}{3}\,1000 = 333$ den dritten Theil der Länge der Bühne;

$l = \frac{1}{2}\,333 = 166$ Centm.

$2\,P = \frac{1}{2} \times 10000 = 5000$ den Druck auf die Mitte *eines* Schienenstückes von der Länge $2\,l$ durch die stärkst belastete Axe der Lokomotive.

h die Höhe der Schiene $= 50^{cm}$, b die Dicke derselben,

$\mathfrak{S} = \frac{4000}{10} = 400$ die Spannung per 1 Quadratcentimeter, welche durch die Belastung eintreten darf.

Behandelt man den Querschnitt der Schiene als ein Rechteck, so wird:

$$P\,l = \frac{\mathfrak{S}}{6}\,b\,h^2$$

Hieraus folgt:

$$b = \frac{6\,P\,l}{\mathfrak{S}\,h^2} = \frac{6 \times 2500 \times 166}{400 \times 2500} = 2{\cdot}49 \text{ Centm.}$$

Nun ist ferner der grösste Druck auf einen der vier Zapfen der Rollen a_1 a_2, $\frac{1}{4}\,10000 = 2500$ Kilgr. Diesen Druck haben die Zapfen auszuhalten, wenn die stärkst belastete Axe über den Zapfen steht. Demnach:

Durchmesser eines Zapfens $0{\cdot}12\,\sqrt{2500}$. . . $=$ 6 Centm.
Durchmesser einer Rolle 10×6 $=$ 60 „
Durchmesser eines Zapfens an den Axen der Triebräder $= 0{\cdot}12\,\sqrt{5000}$ $=$ 8·5 „

Mit diesen angegebenen und berechneten Dimensionen kann nun das Gewicht der Schiebebühne annähernd berechnet werden. Man findet:

Gewicht der Schiebebühne, annähernd $=$ 4000 Kilg.
Die Reibung an den Zapfen der Räderaxen wird hervorgebracht durch das Gewicht der Lokomotive, des Tenders und der Schiebebühne. Dieses Gesammtgewicht ist $27000 + 17000 + 4000$ $=$ 48000 „
Reibungscoeffizient $=$ 0·1
Die zum Fortschieben der belasteten Schiebebühne erforderliche Kraft ist demnach $48000 \times 0{\cdot}1 \times \frac{6}{60}$ $=$ 480 Kilg.

So gross ist also auch die Gesammtkraft, mit welcher an den Umfängen der vier Triebrollen b_1 b_2 b_3 b_4 gewirkt werden müsste, um die Bühne fortzubewegen. Das Torsionsmoment, welchem jedes Axenstück zwischen einem Wurmrad und einem Triebrad ausgesetzt ist, beträgt demnach $\frac{1}{4}$ 480 $\times \frac{60}{2}$ = 3600 Kilgcentm.

Der Durchmesser eines solchen Axenstückes $0{\cdot}29 \sqrt{3600}$ = 4·43 Centm.

Dieser Durchmesser fällt aber kleiner aus als derjenige, den ein solches Axenstück erhalten muss, um hinreichende Festigkeit gegen Biegung zu gewähren. Es ist nämlich das Biegungsmoment für jeden Querschnitt dieses Axenstückes gleich Produkt aus Druck gegen einen Axenzapfen $\left(\frac{1}{2}\ 10000 = 5000\right) \times$ Entfernung des Radmittels vom Zapfenmittel (18^{cm}) $= 18 \times 5000$ = 90000 Kilgcentm.

Durchmesser der Axe (wegen Biegung)

$\sqrt[3]{\frac{32 \times 90000}{3{\cdot}142 \times 400}}$ = 13 Centm.

Diese Axen müssen also, um nicht nur der Torsion, sondern auch der Biegung zu widerstehen 13 Centimeter dick gemacht werden.

Gibt man dem Schraubenrad 30 Zähne, so wird das zur Umdrehung der Wurmaxe erforderliche Torsionsmoment $\frac{2 \times 3600}{30}$ = 240 Kilogramm-Centimeter betragen, wenn keine Reibung zwischen den Gewinden wäre. Wegen dieser Reibung fällt aber jenes Moment circa dreimal so gross aus, als ohne Reibung. Es ist demnach:

Das Torsionsmoment für die Schraubenaxe 3×240 = 720 Kilgcentm.

Werden die vier Uebersetzungsräder gleich gross, und werden Kurbeln von 39^{cm} Halbmesser genommen, so ist der zur Fortbewegung der Schiebebühne erforderliche Druck gegen die Kurbeln $\frac{720}{39}$ = 18 Kilg.

was durch zwei Arbeiter leicht geleistet werden kann.

Lauf-Krahne.

Ein Laufkrahn ist ein Hebezeug, vermittelst welchem eine Last von einem beliebigen Ort A nach einem beliebigen anderen Ort B gebracht werden kann, vorausgesetzt, dass die beiden Orte innerhalb eines gewissen parallelepipedischen Raumes sich befinden. Ein Laufkrahn ist so zu sagen ein mechanistisch realisirtes rechtwinkliges Coordinatensystem, wodurch Lasten innerhalb eines parallelepipedischen Raumes beherrscht werden können. Es sei O der Eckpunkt eines solchen Raumes. O X die Langseite desselben. O Y die Breitseite. O Z die Höhe. Bringen wir parallel mit O X eine Eisenbahn an, construiren eine Schiebebühne, welche auf derselben laufen kann und versehen dieselbe mit einer zu O Y parallelen Eisenbahn und stellen auf dieselbe einen Rollwagen, der mit einer Winde versehen ist, die zum Heben und Senken von Lasten geeignet eingerichtet ist, so erhalten wir einen sogenannten Laufkrahn.

Laufkrahn für eine Montirungswerkstätte.

Fig. 6, Tafel XXIX. zeigt einen Laufkrahn von Eisen für eine Montirungswerkstätte. a a ist eine Schiebebühne die mit 4 Rädern auf einer Eisenbahn b b läuft, welche in einer angemessenen Höhe über dem Boden auf Absätzen der Seitenmauern des Gebäudes liegt. c ist ein mit einer Winde versehener Rollwagen, der auf der Eisenbahn der Schiebebühne hin und her gerollt werden kann. An den Rollwagen ist vermittelst einer Traverse ein Flaschenzug d gehängt. Die Kette oder das Seil des Flaschenzuges wird vermittelst der Räderwinde auf die Welle dieser Winde aufgewickelt. Die Fortbewegung der Schiebebühne geschieht vermittelst einer Räderwinde, durch welche zwei von den vier Rädern der Schiebebühne getrieben werden. Die Fortbewegung des Windenwagens geschieht ohne mechanische Vorrichtung durch unmittelbares Ziehen oder Schieben der Arbeiter. Diese Laufkrahne gewähren den Vortheil, dass sie keinen zu nützlichen Zwecken verwendbaren Raum des Gebäudes wegnehmen. Ist die Breite des Gebäudes (Distanz b b) gross, so muss allerdings die Schiebebühne starke Dimensionen erhalten, um eine Last von 15000 bis 20000 Kilogrammen tragen zu können, und ihr eigenes Gewicht dazu.

Laufkrahn mit hohem Gerüste für Magazine.

Fig. 7 und 8, Tafel XXIX. Bei diesem Krahn liegt die Haupteisenbahn a a_1 auf dem Boden des Gebäudes. Das Gerüst besteht aus

zwei Schwellen b b_1 und aus vier verstrebten Säulen c c_1, welche oben zwei Bahnbalken d d tragen. Das Gerüst hat vier Räder, welche auf den Strängen a a_1 laufen. Zwei dieser Räder werden durch kleine Winden $f\ f_1$ getrieben, wodurch der Krahn auf der Bahn fortgerollt wird. Auf den Bahnbalken d d läuft ein zwei- oder vierrädriger Wagen g, der durch Seile hin und hergezogen werden kann. Dieser Wagen trägt einen Flaschenzug h und zwei Leitrollen i i_1. Die beiden Seilenden des Flaschenzuges werden über diese Rollen und über die Rollen k k_1 nach den Seilwellen l l_1 zweier Räderwinden herabgeleitet und sind an den Umfängen der Seilwellen befestigt. Das Fortrollen des Krahnes auf der Bahn geschieht vermittelst der kleinen Winden $f\ f_1$, die Hin- und Herbewegung des Flaschenzugwagens vermittelst der Seile p p_1, die Hebung oder Senkung der an den Flaschenzug gehängten Last durch gleichzeitige Thätigkeit der Winden m m_1. Der Gerüstbau eines solchen Krahnes hat wenig Stabilität und die auf dem Boden liegende Eisenbahn ist oftmals hinderlich. Aus diesen beiden Gründen werden derlei Krahne selten angewendet.

Laufkrahn für Brückenbauten.

Für Brückenbauten und insbesondere für Pfeilergründungen und Ueberwölbungen derselben werden Laufkrahne angewendet, wie Fig. 1, Tafel XXX. zeigt.

a a_1 sind zwei quer über den Fluss geführte Hilfsbahnen, welche auf leichten eingerammten Pfählen ruhen. Auf diesen Bahnen werden die Baumaterialien und Werkstücke vom Ufer aus nach der Baustelle gebracht und zwar auf kleinen Rollwagen. Um die Baustelle ist ein hohes Gerüst errichtet, das aus mehreren eingerammten Pfählen b b b . . . besteht, die oben zwei Bahnbalken c c tragen. Diese Balken sind mit Bahnschienen belegt und auf diesen befindet sich ein vollständiger in der Regel aus Holz hergestellter Laufkrahn mit dreifacher Bewegung, ähnlich dem auf voriger Seite beschriebenen.

Drehscheiben.

Drehscheiben sind drehbare Wagen, vermittelst welcher Eisenbahnfahrzeuge von einer Bahn A A_1 auf eine Bahn B B_1 gebracht werden können, welche mit ersterer einen gewissen Winkel bildet. Fig. 2, Tafel XXX. Hat die Drehscheibe eine Stellung, dass ihre

Bahn C mit A, und A übereinstimmt, so kann ein Fahrzeug von A oder A, aus auf C gebracht werden. Dreht man hierauf die Scheibe mit dem darauf stehenden Fahrzeug um einen Winkel von 90°, so verbindet die Bahn C die Bahnen B und B, und das Fahrzeug kann dann nach B oder B, gerollt werden.

Drehscheibe für kleinere vierrädrige Personen- oder Frachtwagen.

Fig. 3, Tafel XXX. Die ganze Drehscheibe befindet sich in einer ummauerten cylindrischen Vertiefung oder Grube. In diese Grube ist ein cylindrischer Trog aus Gusseisen eingesetzt, welcher aus folgenden Theilen besteht: 1) der cylindrischen Umfassungswand a; 2) dem Rand b mit einer kreisförmigen Rollenbahn; 3) einem durch Arme mit b b verbundenen Topf c. Auf dieser Kreisbahn liegt und läuft ein Rollwerk mit 6 oder 8 Rollen. Jede Rolle dreht sich frei auf einer radialen Stange *f*, alle Stangen sind aussen unter einander durch Reifen verbunden und sind innen an einer um den Topf c drehbaren Rosette d befestigt. Die Drehscheibe ist wie der Trog aus einem Stück gegossen. Am Umfang der Drehscheibe ist ein Ring g vorhanden, mit welchem sie auf den sechs oder acht Rollen e e aufliegt. In der Mitte hat die Drehscheibe eine cylindrische Hülse h, durch welche ein Bolzen herabgesteckt ist, der unten in den Topf c eindringt. Hierdurch wird die Drehscheibe in concentrischer Lage erhalten, und da dieser Bolzen auch gespannt werden kann, so dass er gegen den Boden seiner im Topf liegenden Pfanne drückt, so kann man bewirken, dass das Gewicht der Drehscheibe und des auf dieselbe gestellten Wagens grösstentheils durch den Zapfen getragen wird, was die Bewegung der Scheibe sehr erleichtert. Die Arme der Drehscheibe bilden die Unterlage für die Bahnschienen zweier sich unter rechtem Winkel durchkreuzenden Geleise.

Drehscheibe für grössere dreiaxige Personen- oder Lastwagen.

Fig. 4, Tafel XXX. Diese unterscheidet sich von der Vorhergehenden theils durch einen grösseren Durchmesser, theils durch das zum Tragen der Scheibe angewendete Rollensystem. Diese Rollen haben eine konische Form und drehen sich um Axen, deren Lager an den cylindrischen Trog der Drehscheibe angegossen sind. Es ist schwierig, die sechs oder acht Rollen so genau zu montiren, dass die Drehscheibe mit ihrem untern konischen Auflagering auf allen Rollen gleichmässig aufliegt.

Große Drehscheibe für Lokomotive und Tender.

Fig. 5, Tafel XXX. Diese Drehscheiben haben eine ähnliche Construktion wie die grossen Schiebebühnen für Lokomotive und Tender. Denkt man sich, dass eine solche Schiebebühne 1) mit einem mittleren Drehungszapfen versehen wird, 2) mit Laufrädern ausgerüstet wird, deren Axen nach dem Mittelpunkt des Drehungszapfens hingerichtet sind, 3) eine Räderwinde erhält, durch die eine drehende Bewegung um den Zapfen hervorgebracht werden kann, so verwandelt sich die Schiebebühne in eine Drehscheibe.

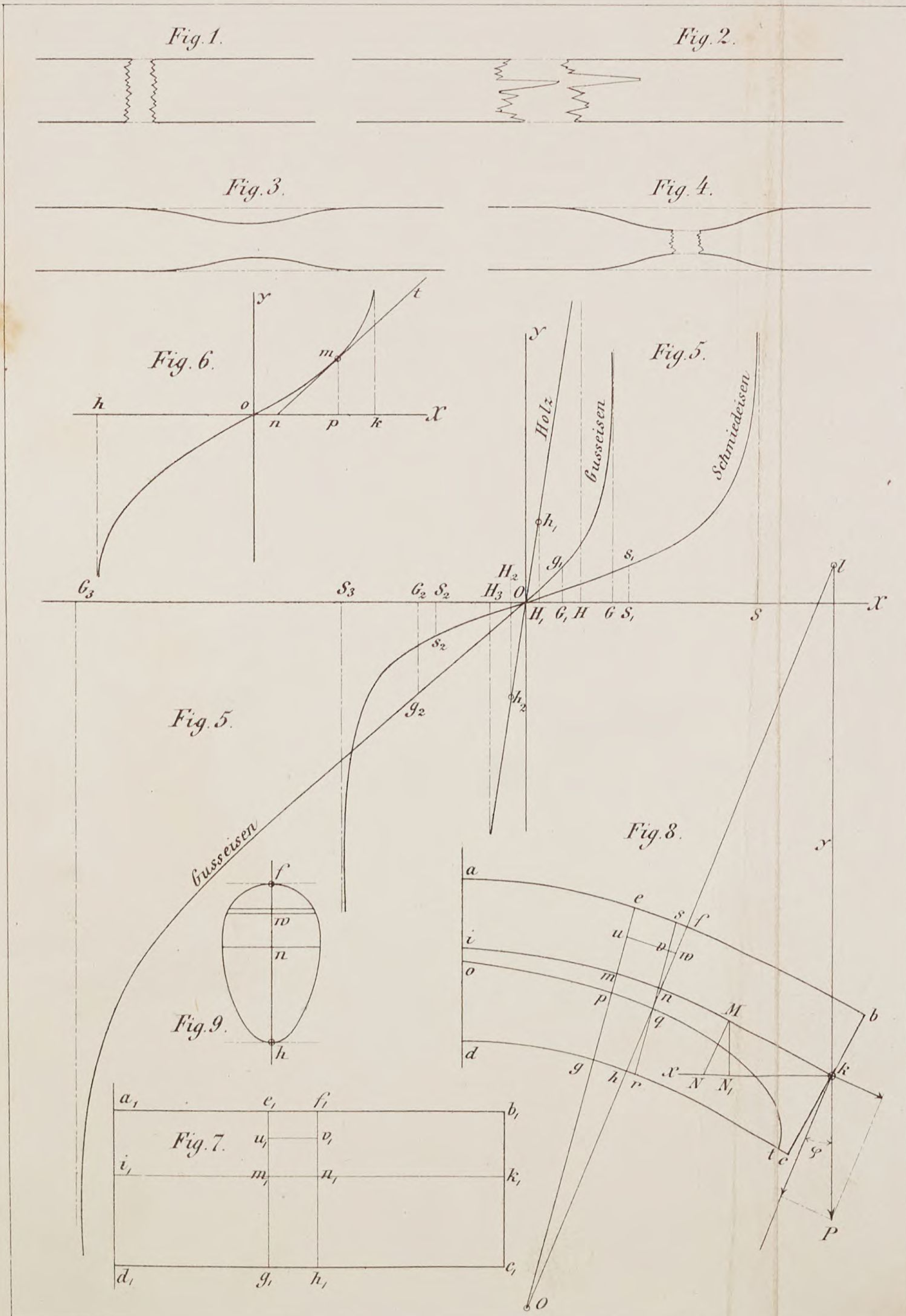
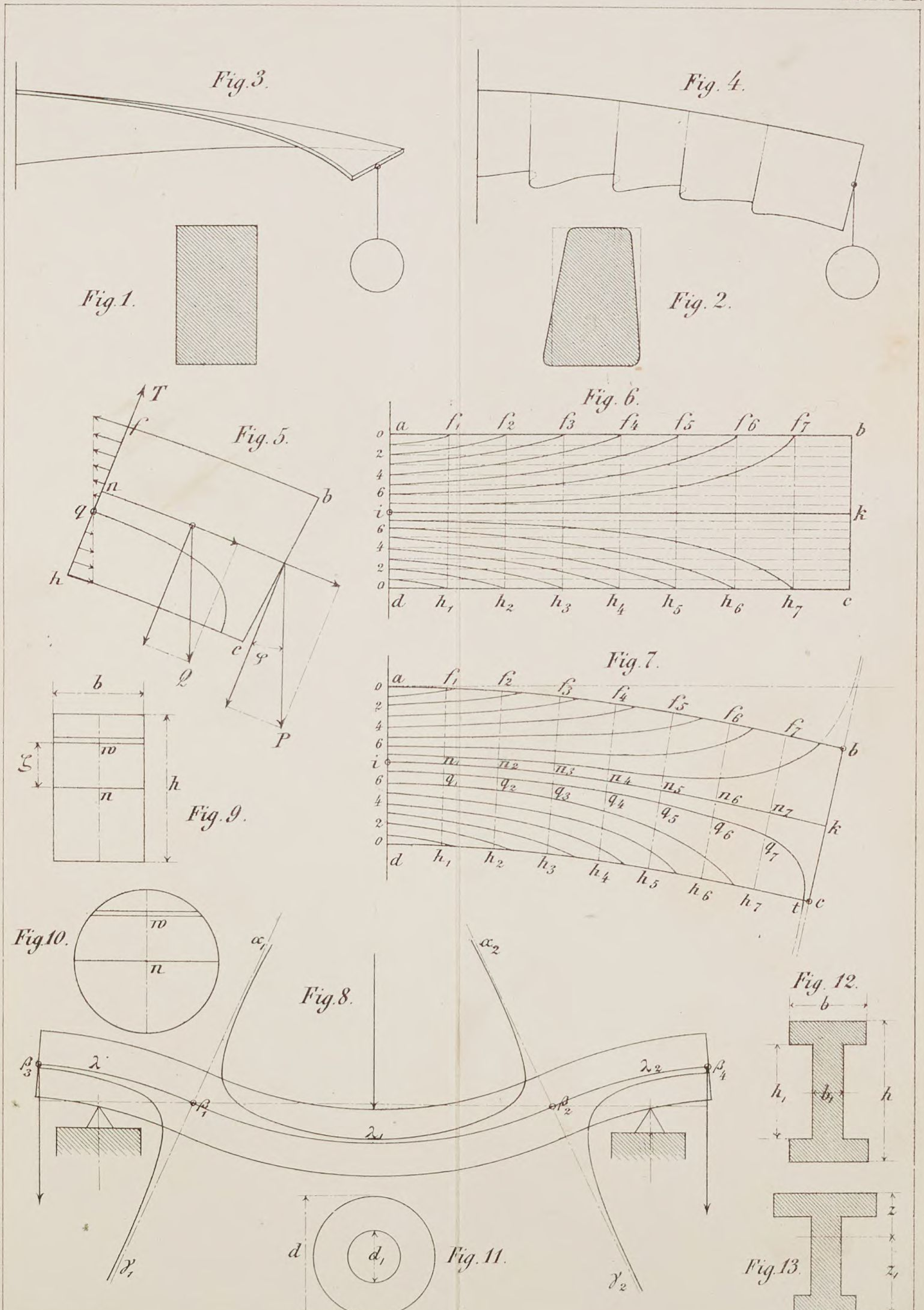
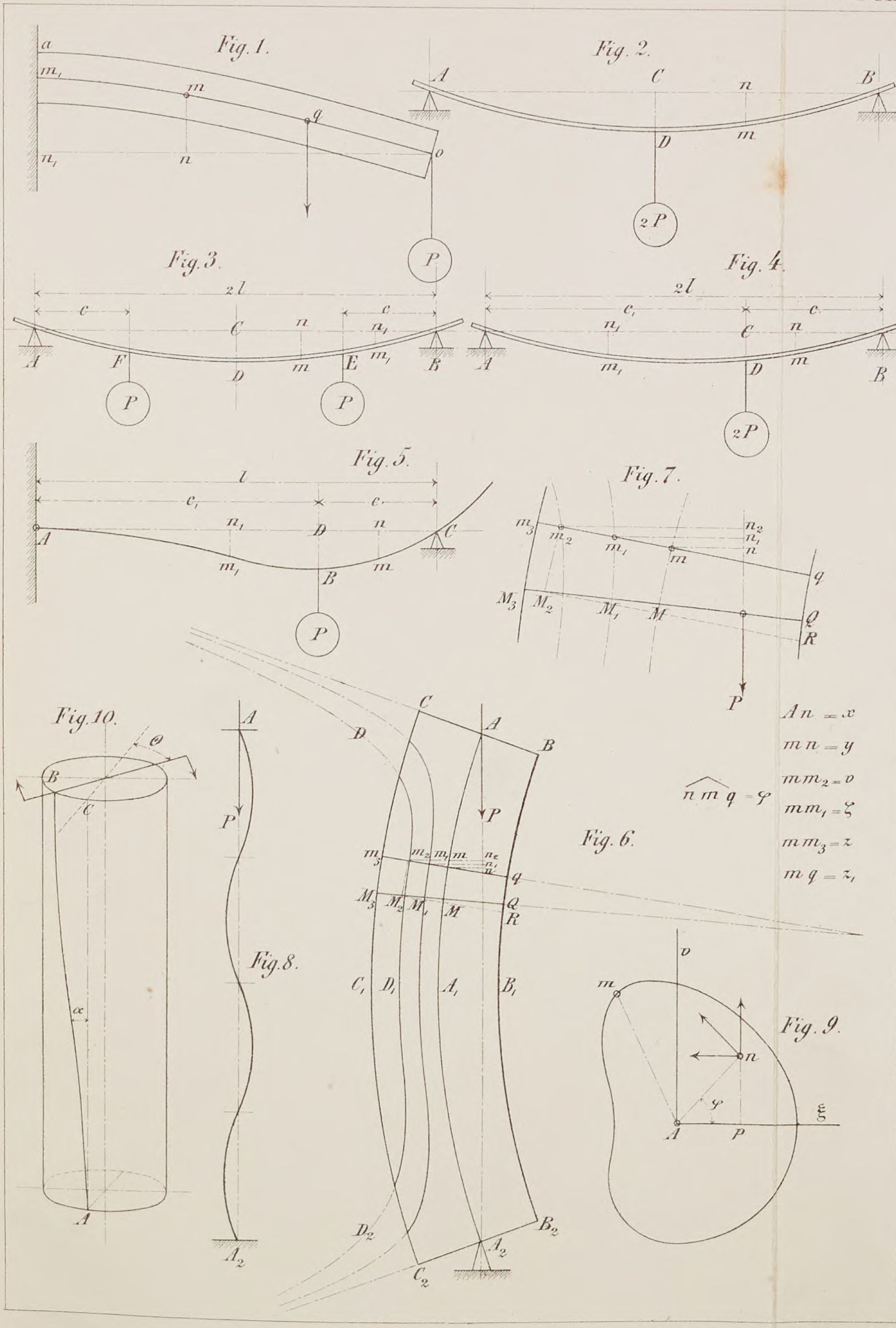


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Holz
Gusseisen
Schmiedeisen
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
T
f
n
q
b
h
c
φ
Q
P
Fig. 6.
a f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 b
i k
d h1 h2 h3 h4 h5 h6 h7 c
Fig. 7.
n1 n2 n3 n4 n5 n6 n7
q1 q2 q3 q4 q5 q6 q7
t
Fig. 8.
α1 α2
β1 β2 β3 β4
λ λ1 λ2
γ1 γ2
Fig. 9.
b
w
n
ζ
h
Fig. 10.
Fig. 11.
d
d1
Fig. 12.
h1
b1
Fig. 13.
z
z1


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
2 P
2l
2 l
An = x
mn = y
mm₂ = v
mm₁ = ζ
mm₃ = z
mq = z₁
n m q = φ

Tafel IV.

Fig. 1.

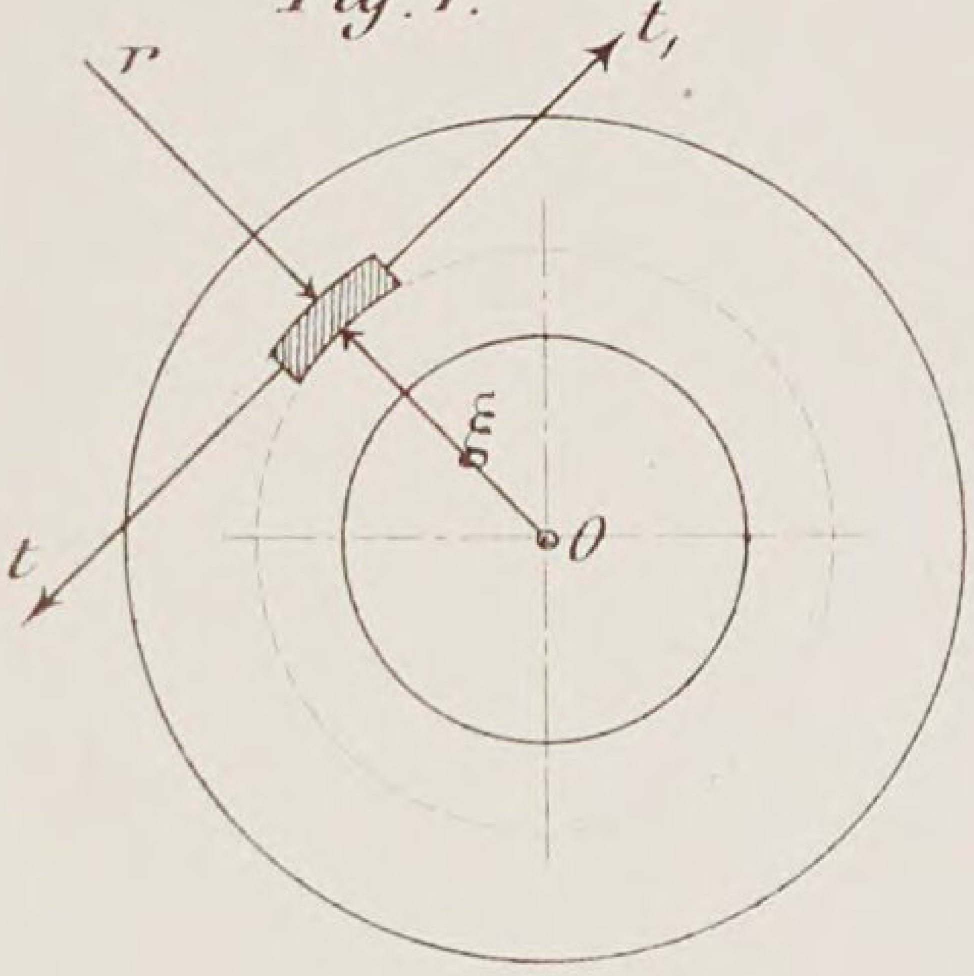


Fig. 2.

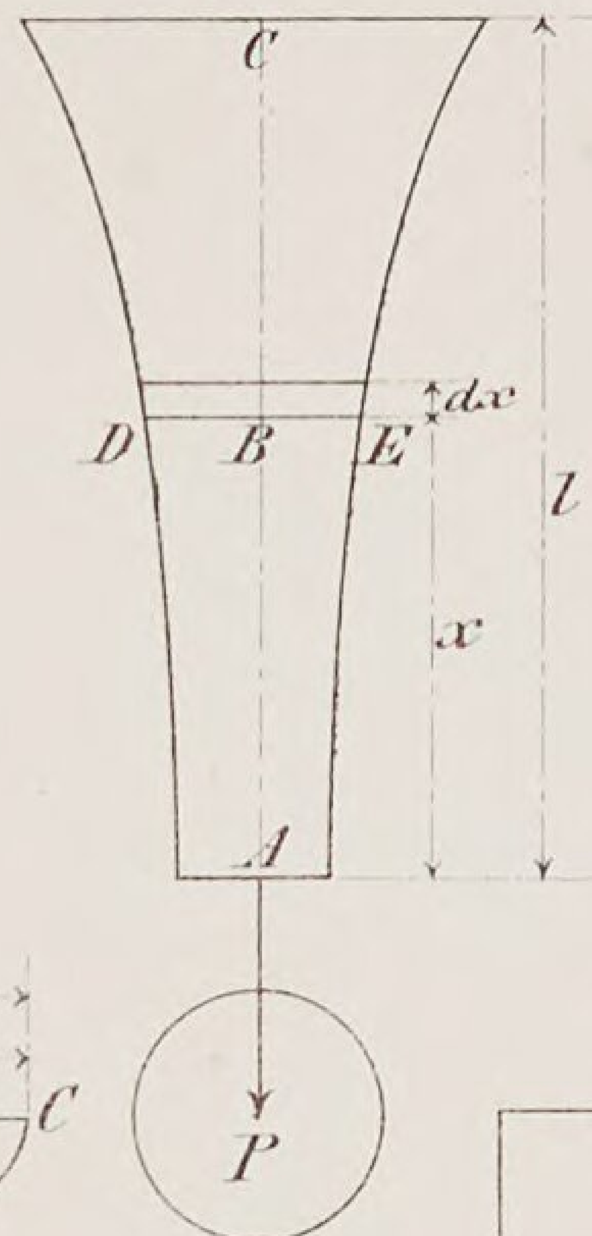
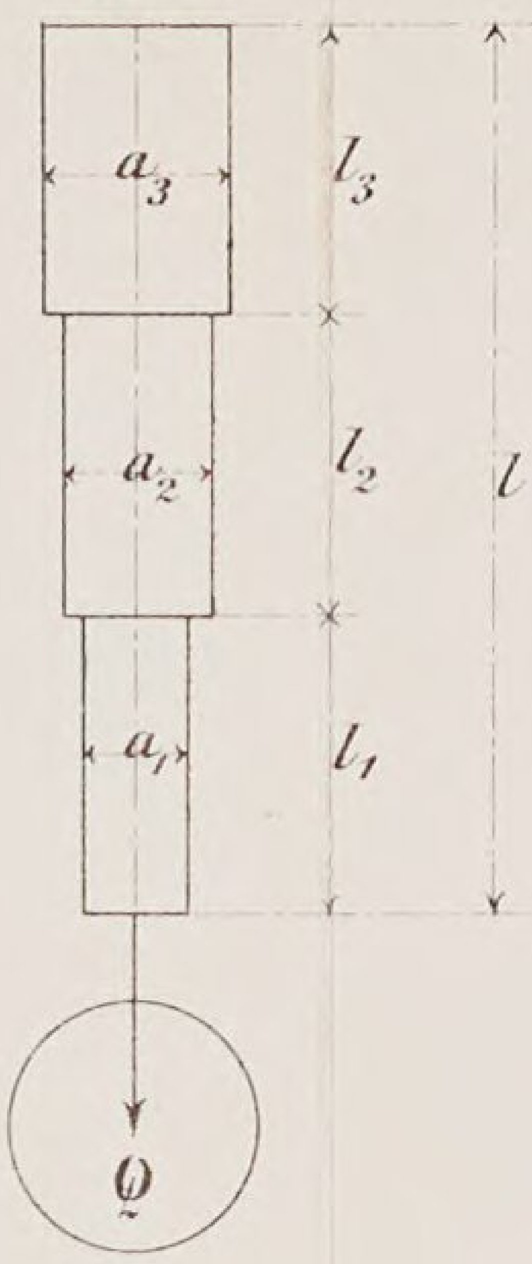
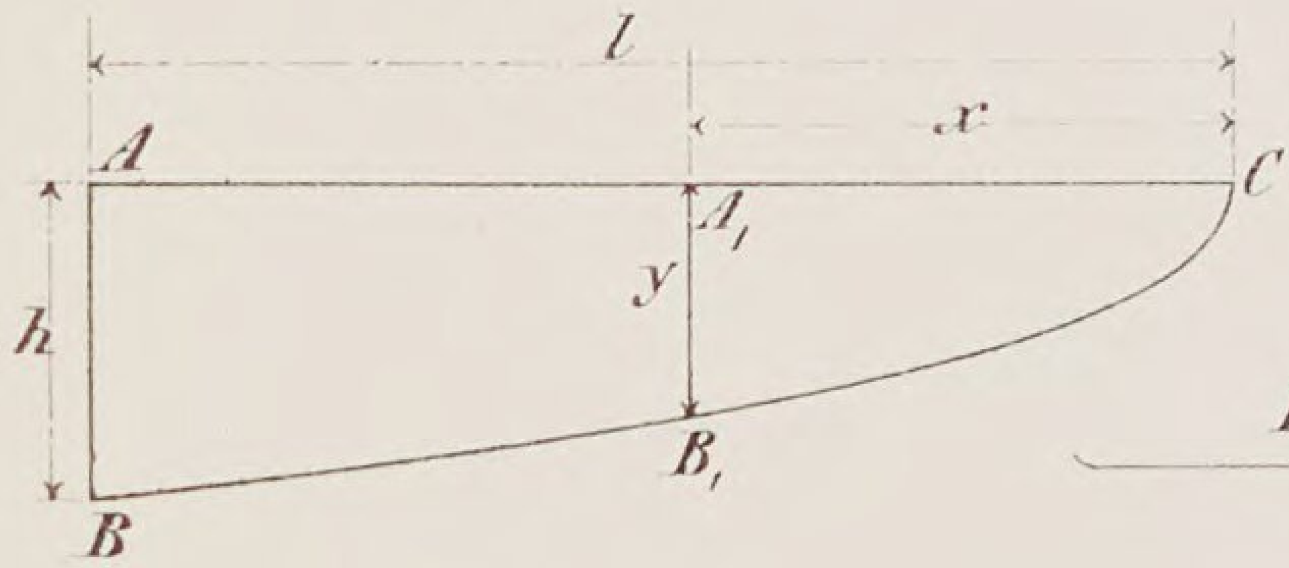


Fig. 3.





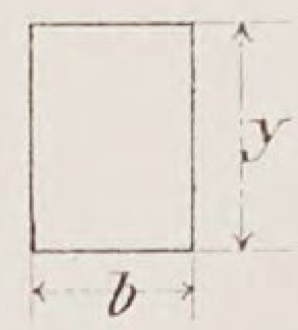


Fig. 4.

Fig. 5.

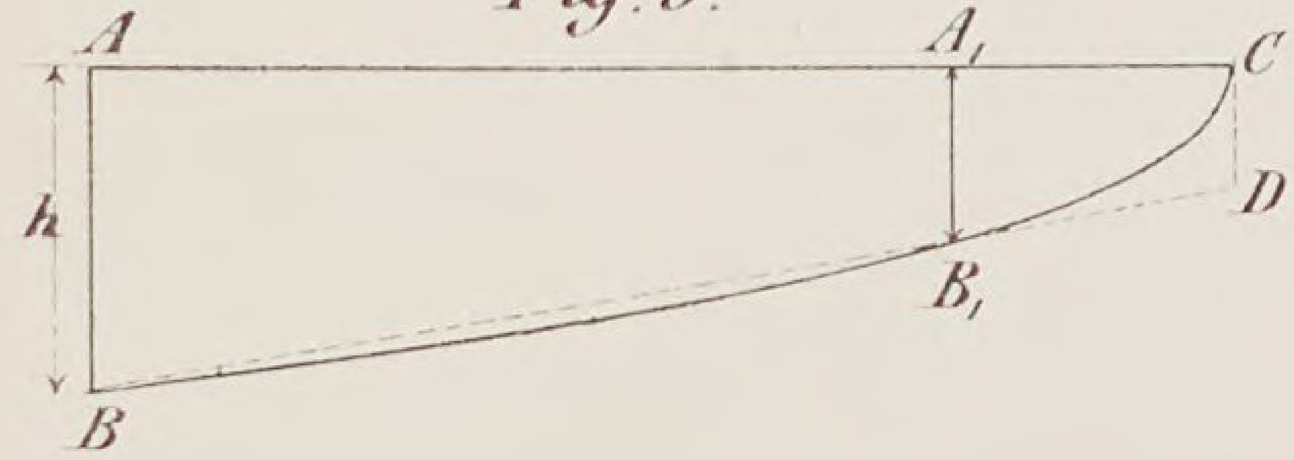
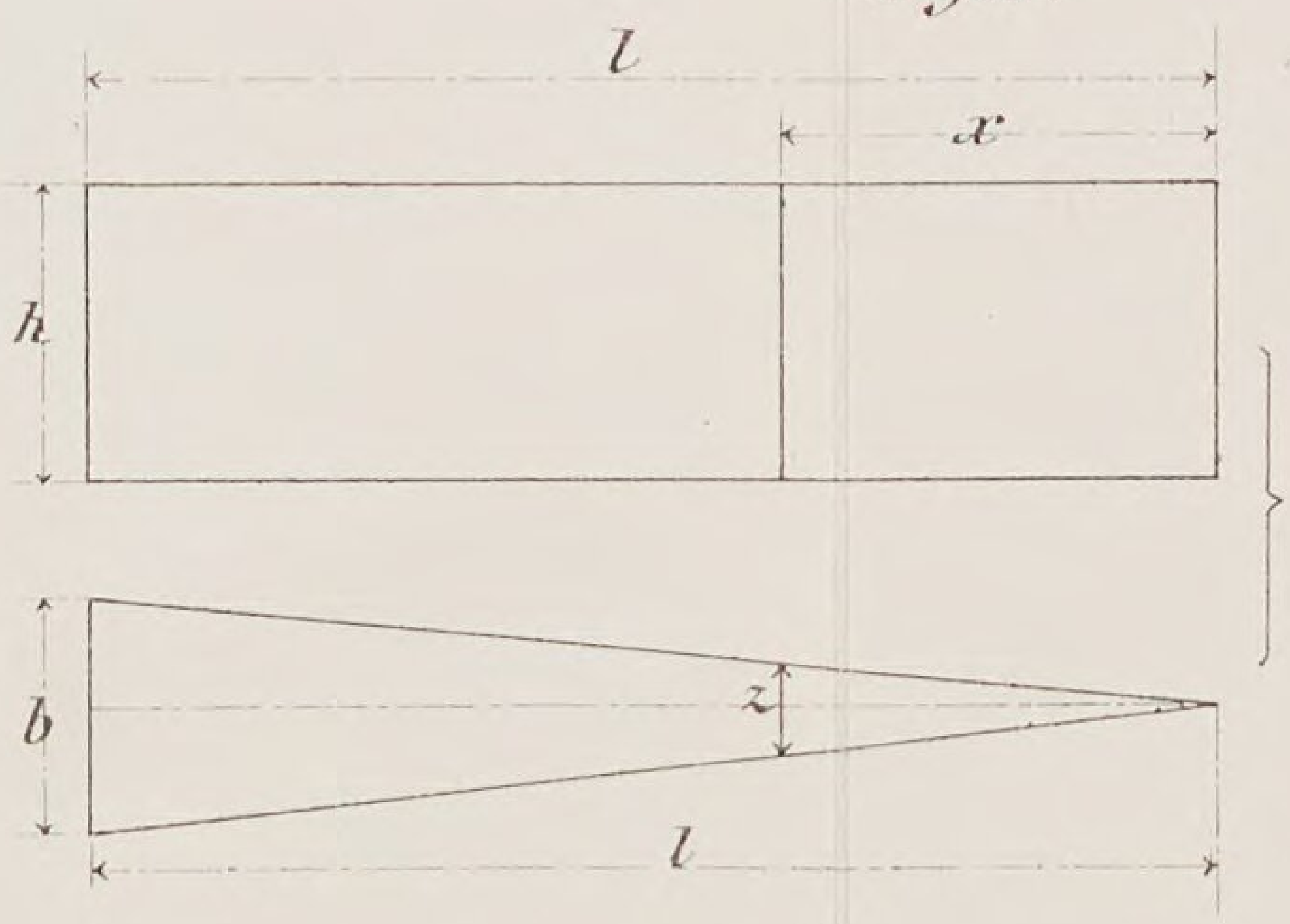


Fig. 6.



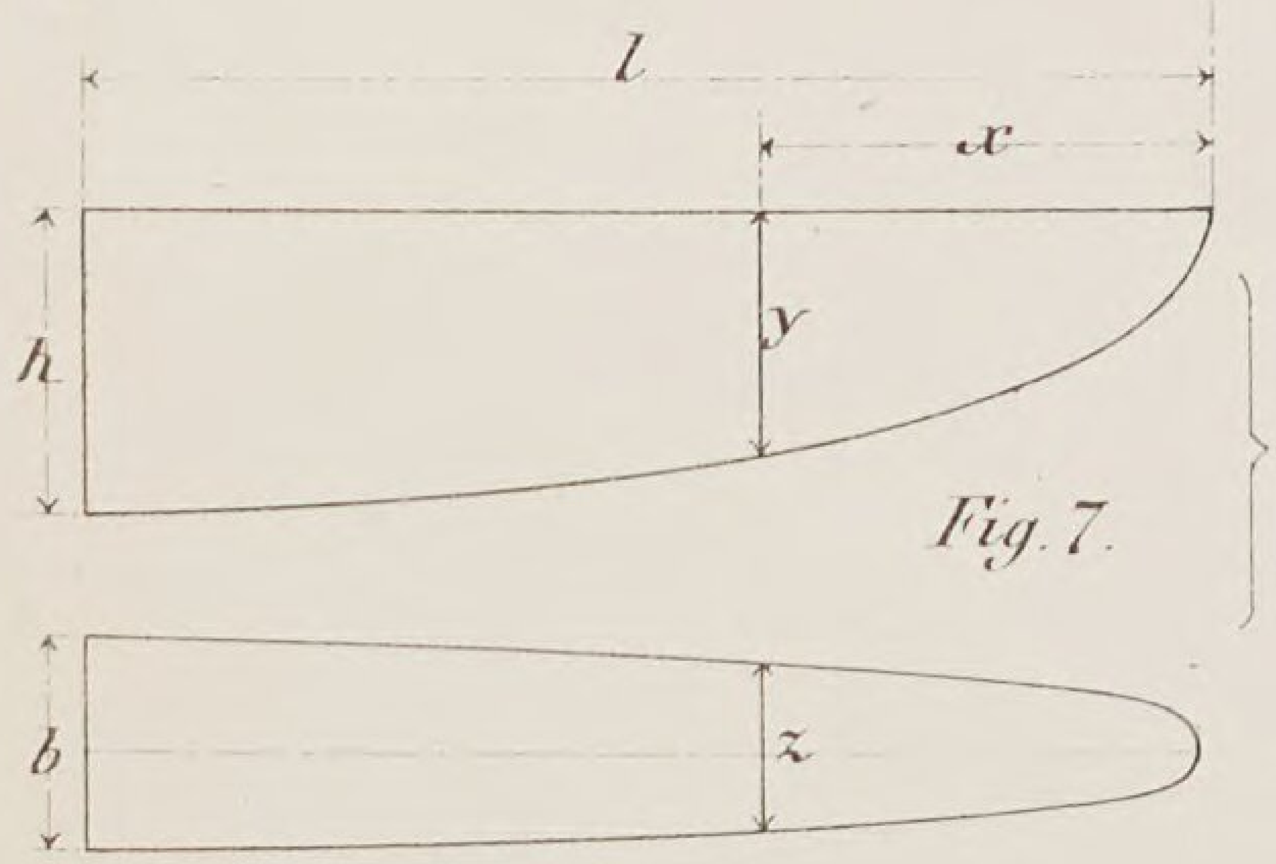
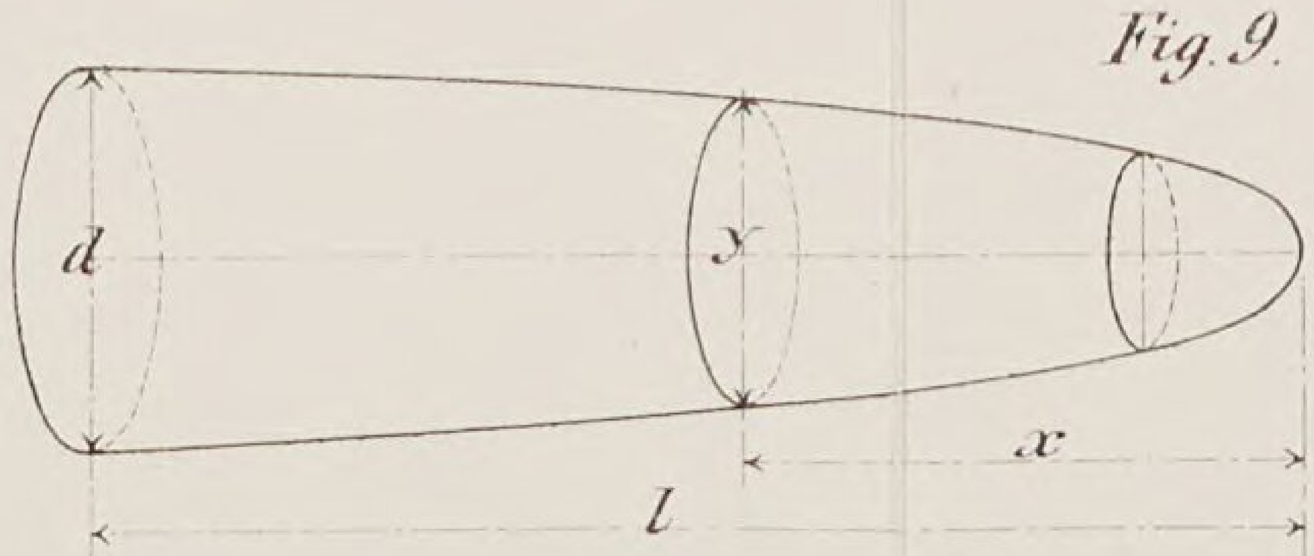


Fig. 7.

Fig. 9.



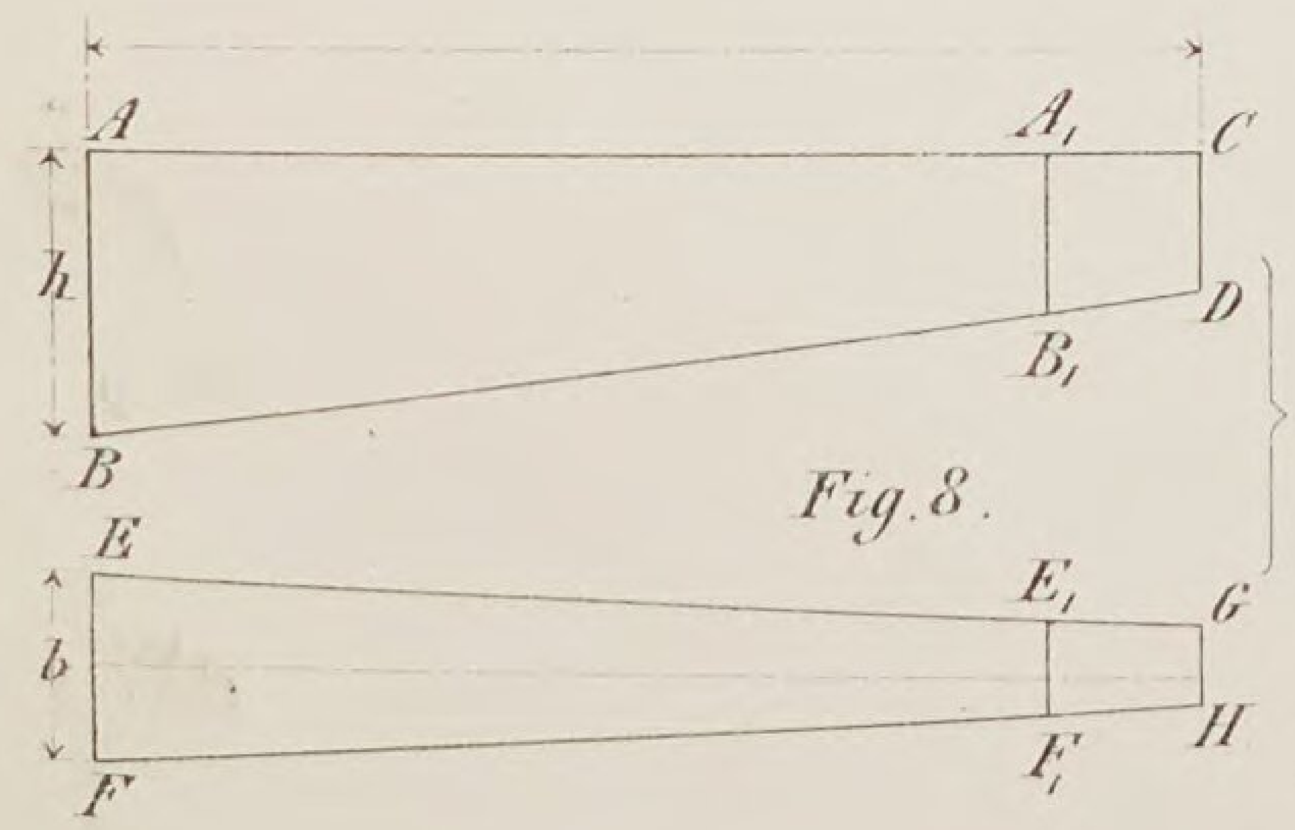
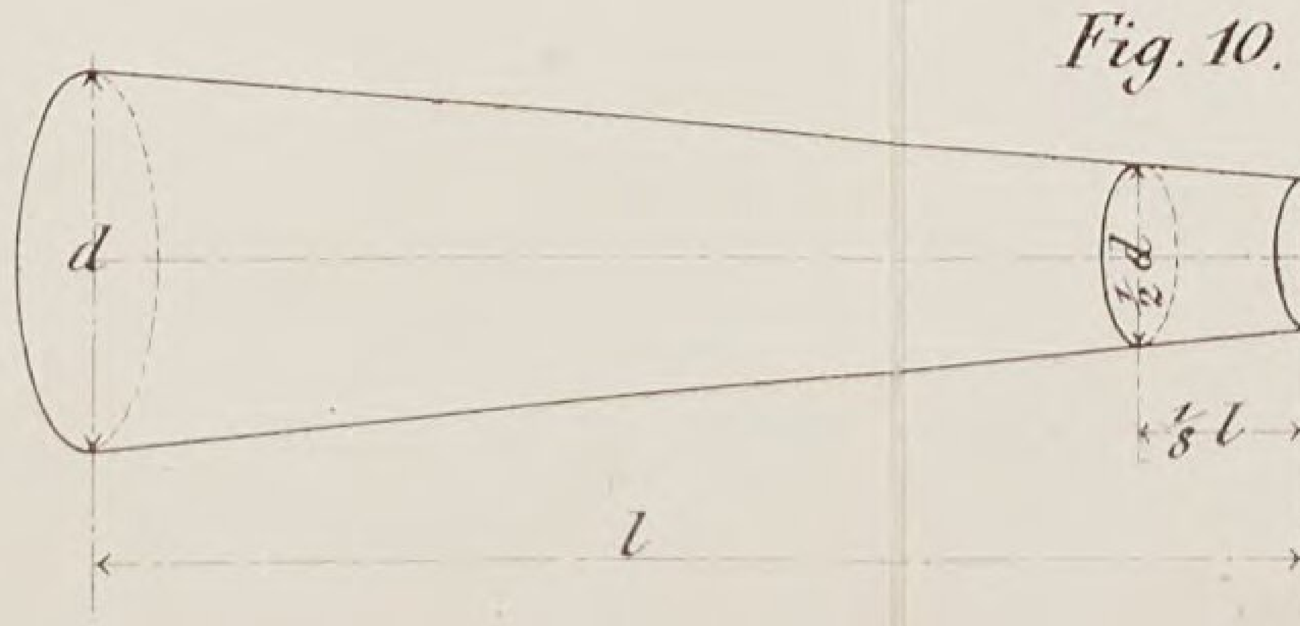


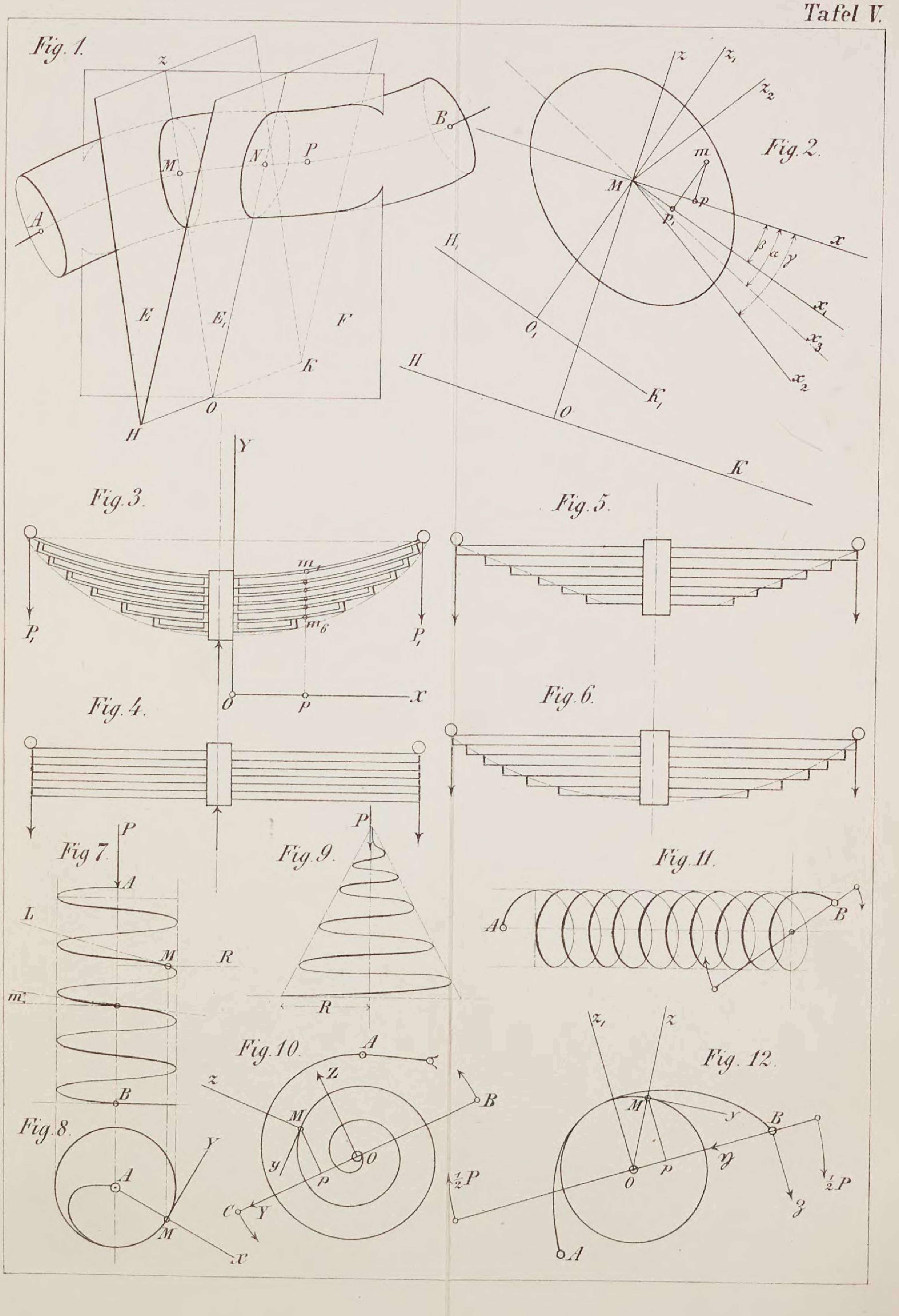
Fig. 8.

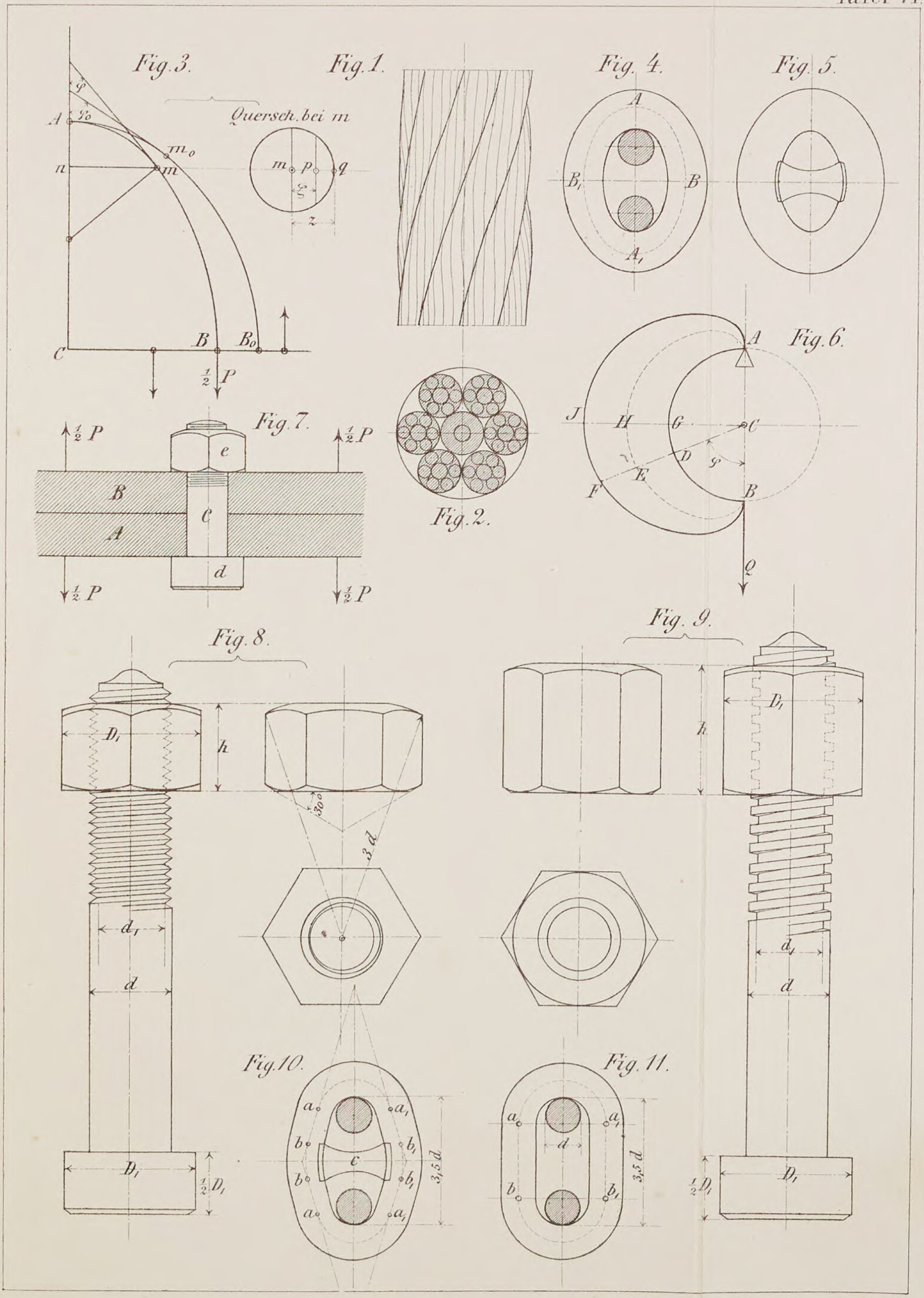
Fig. 10.



Lith. v. L. Geisendörfer, Carlsruhe.

Tafel V.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.


Fig. 3.
Quersch. bei m
Fig. 1.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 2.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
A
B
C
D
E
F
G
H
J
Q
½ P
3,5 d
3 d
30°
D₁
d₁
d
h
½ D₁

Tafel VII.

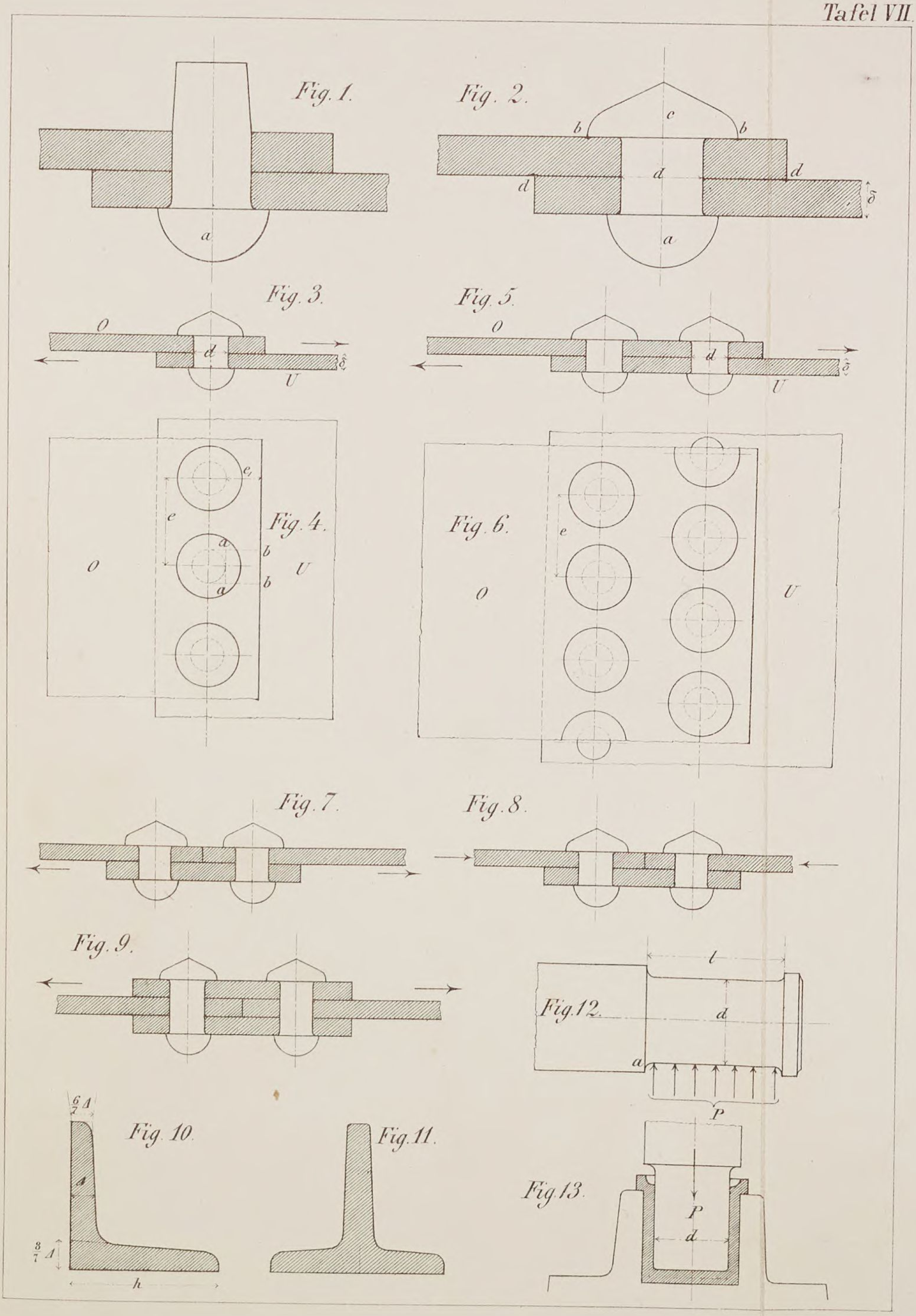

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.

Fig. 1.

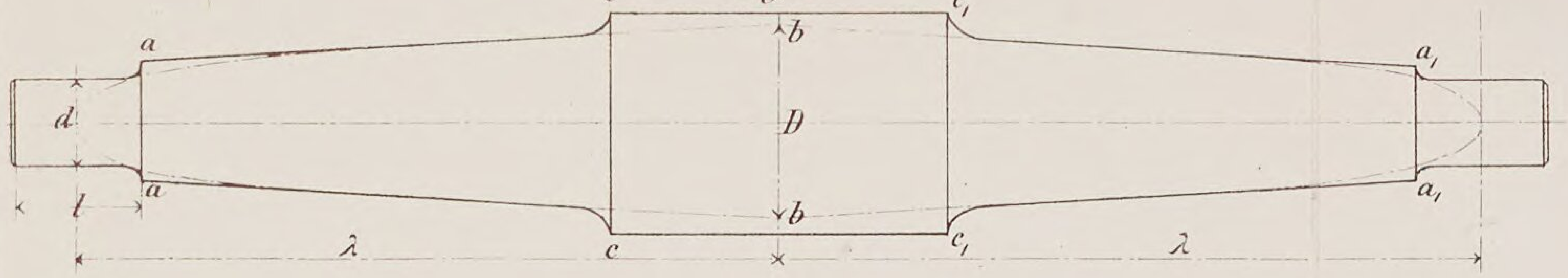


Fig. 2.

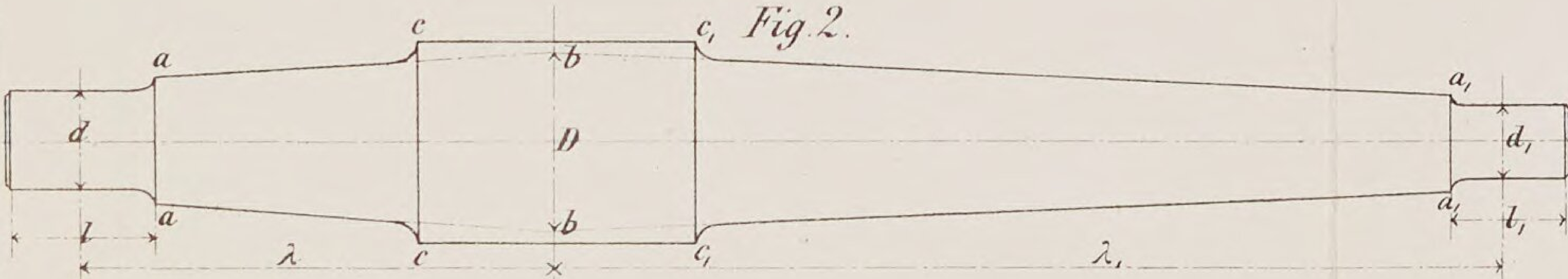


Fig. 3.

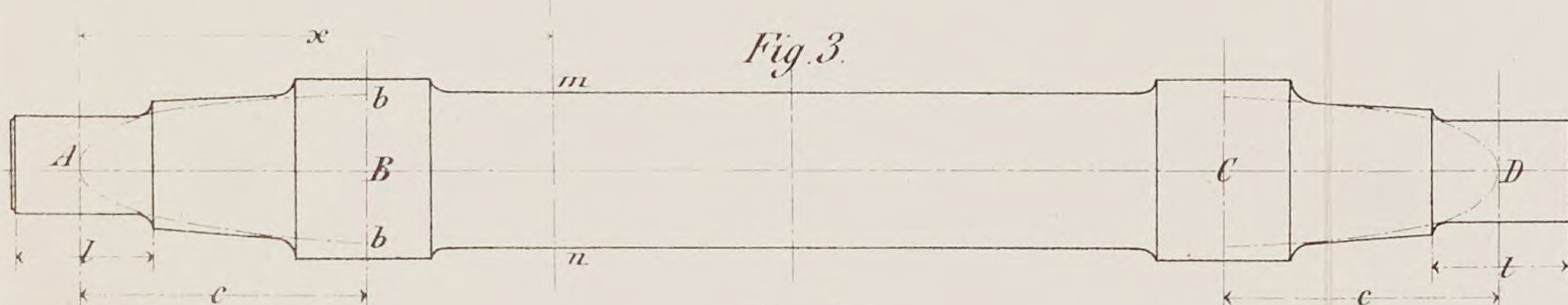


Fig. 4.

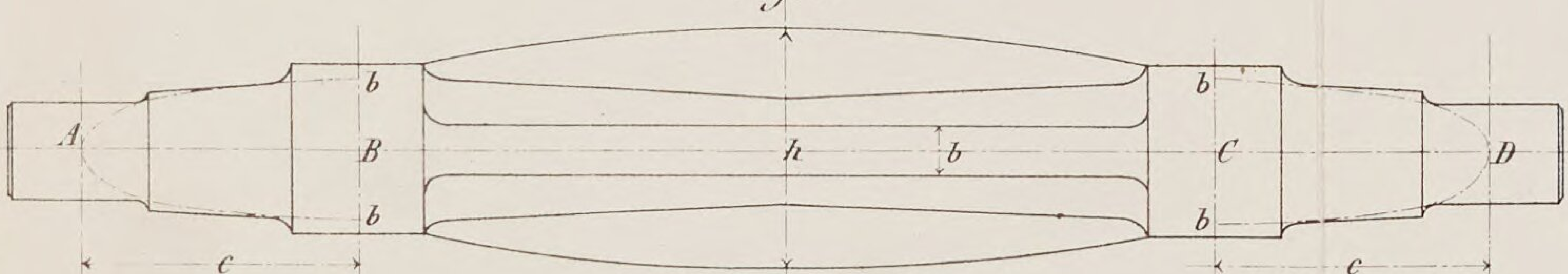


Fig. 5.

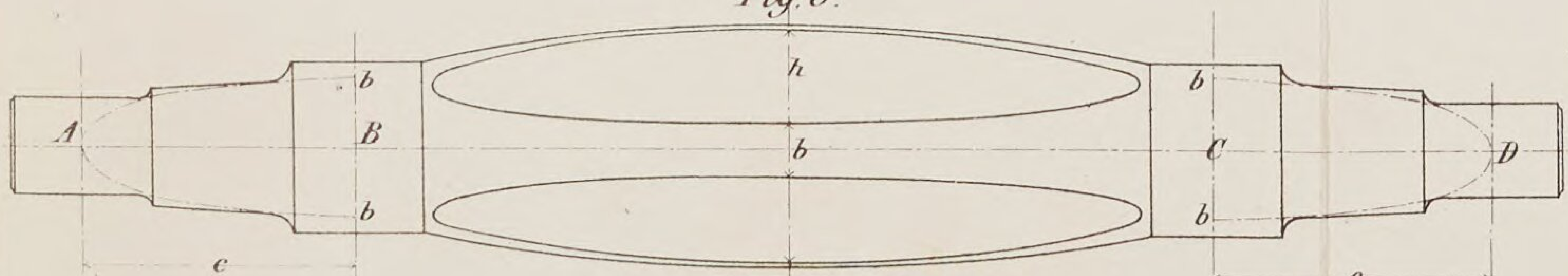


Fig. 6.

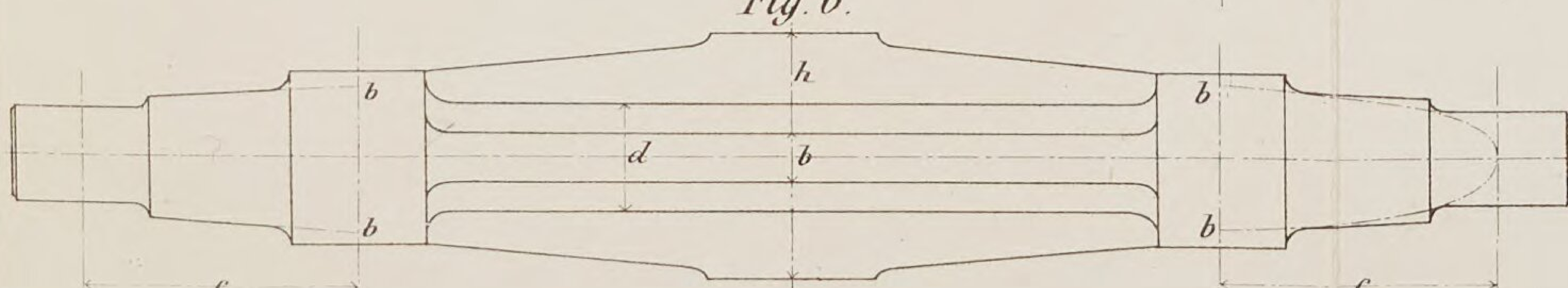
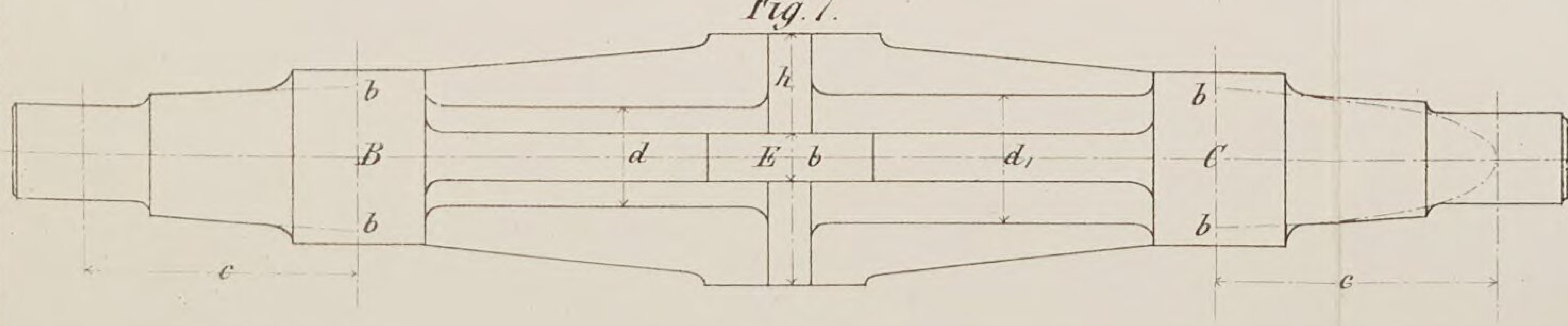
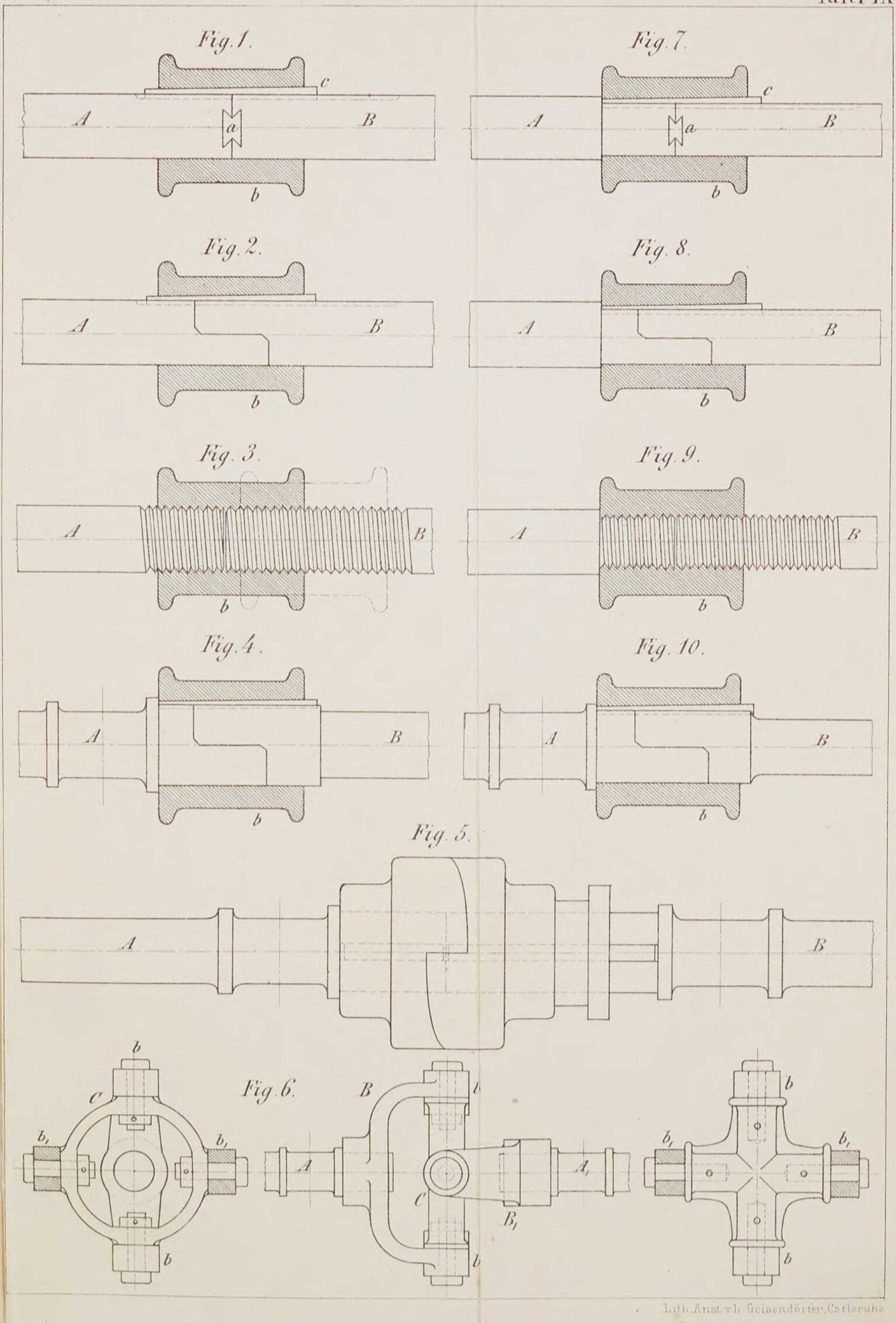


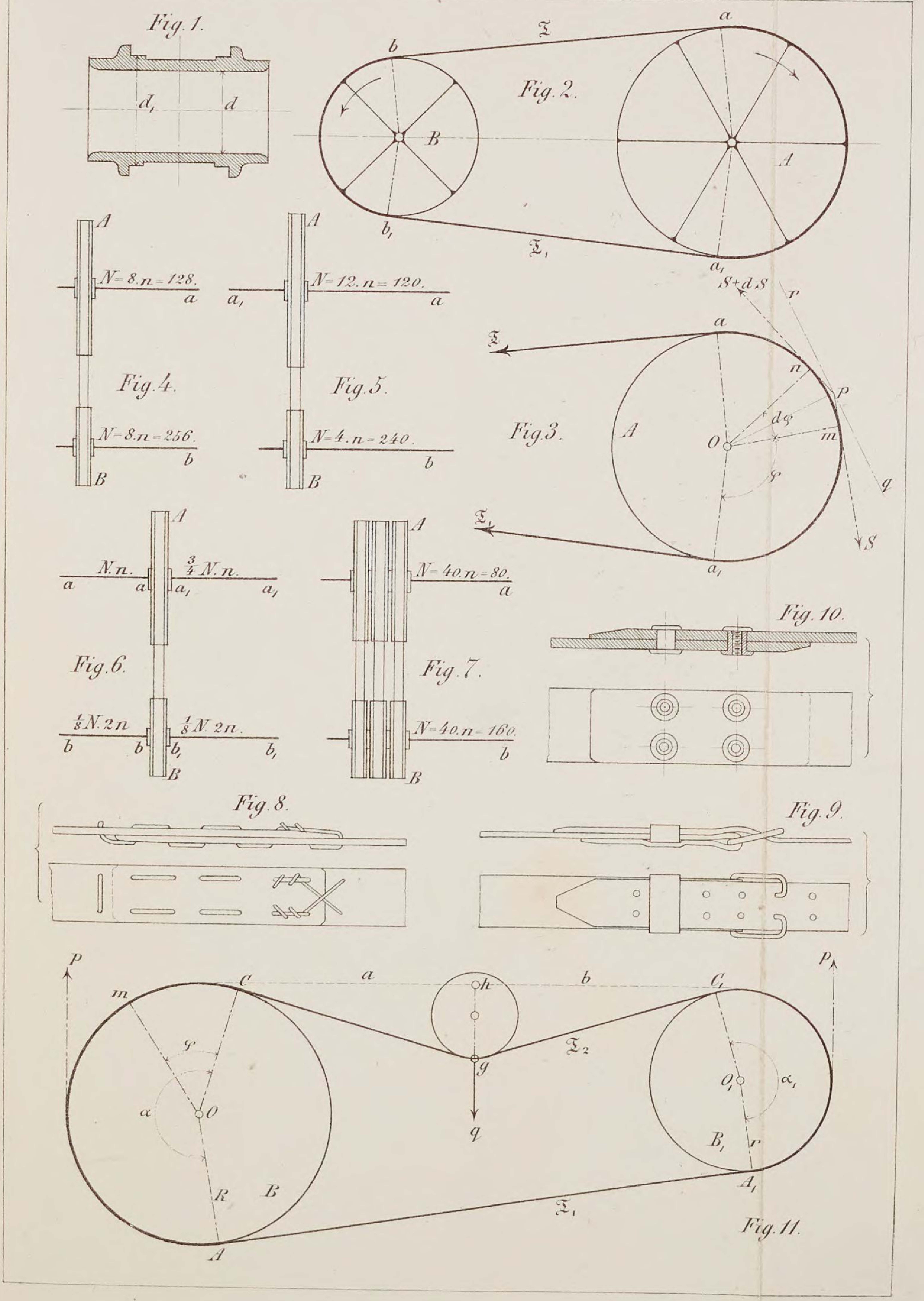
Fig. 7.



Carlsruhe, Lith. Anst. v. L. Geisendörfer



Lith. Anst. v. L. Geisendörfer, Carlsruhe


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
N = 8. n = 128.
N = 8. n = 256.
N = 12. n = 120.
N = 4. n = 240.
N. n.
3/4 N. n.
1/8 N. 2n
1/8 N. 2n.
N = 40. n = 80.
N = 40. n = 160.
S + d S

Tafel XI.

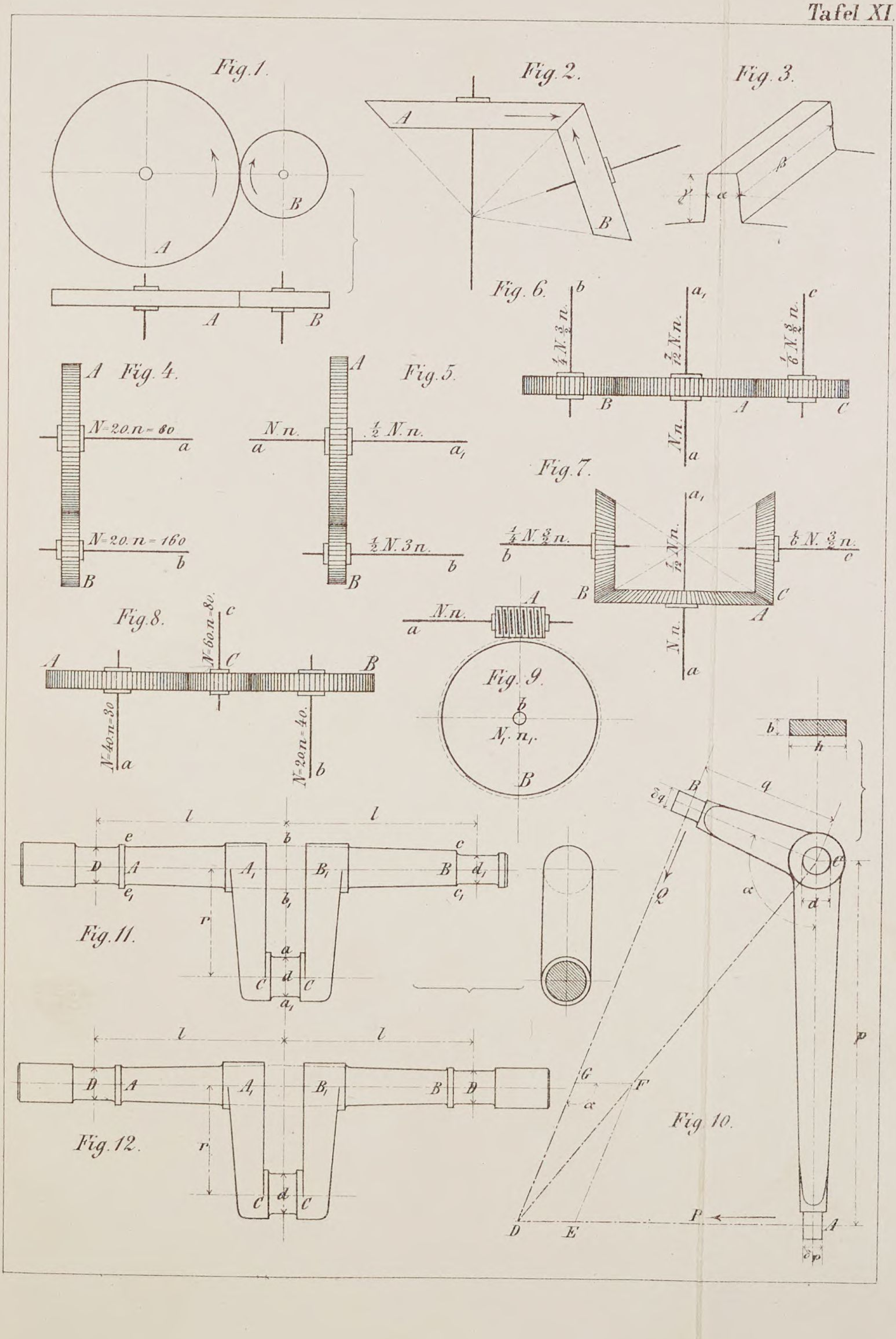
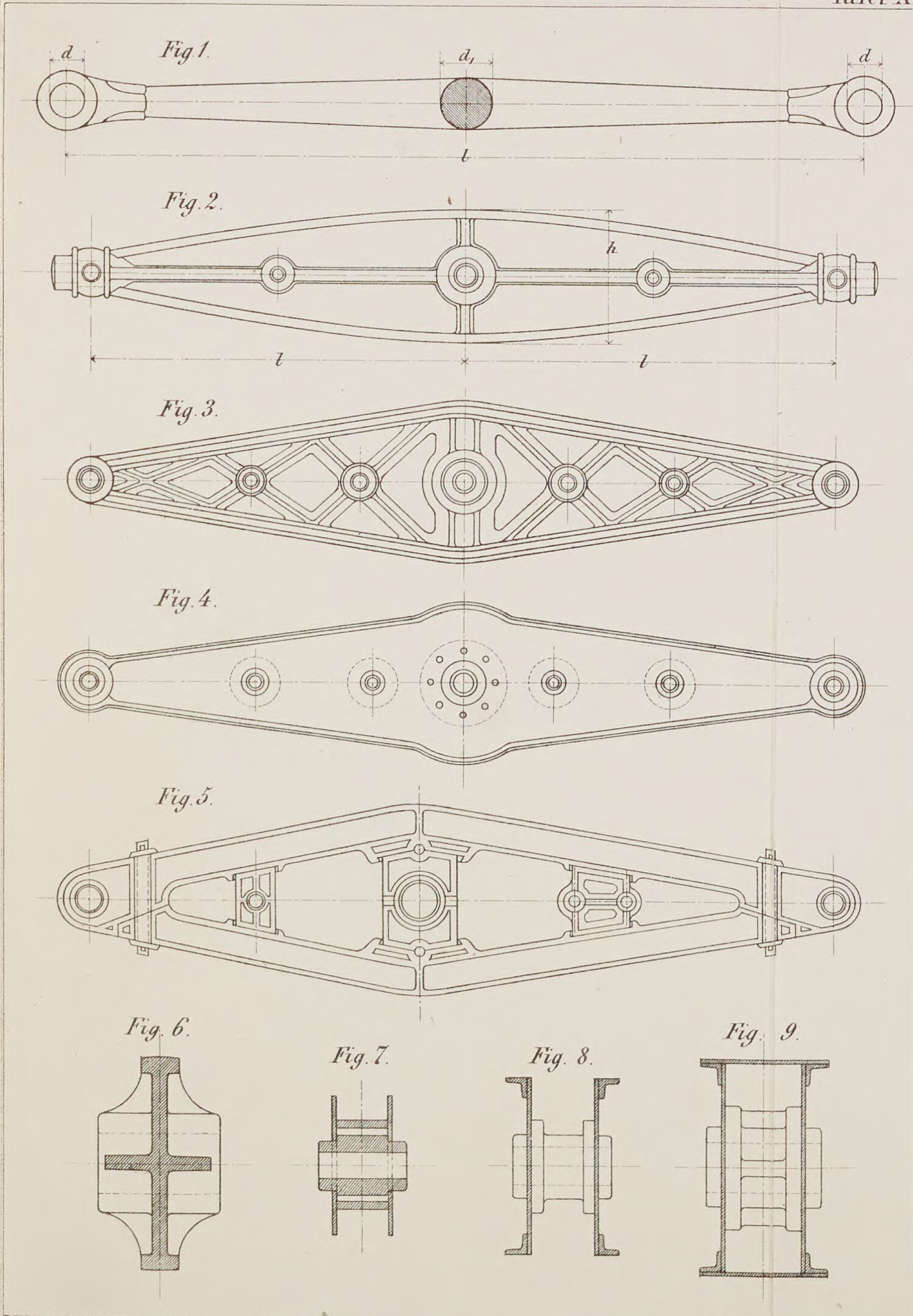


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
N=20. n=80
N=20. n=160
N. n.
½ N. n.
½ N. 3 n.
N=40 n=30
N=60. n=80.
N=20 n=40.
N₁. n₁.



Lith. Anst. v. L. Geisendörfer, Carlsruhe.

Tafel XIII.

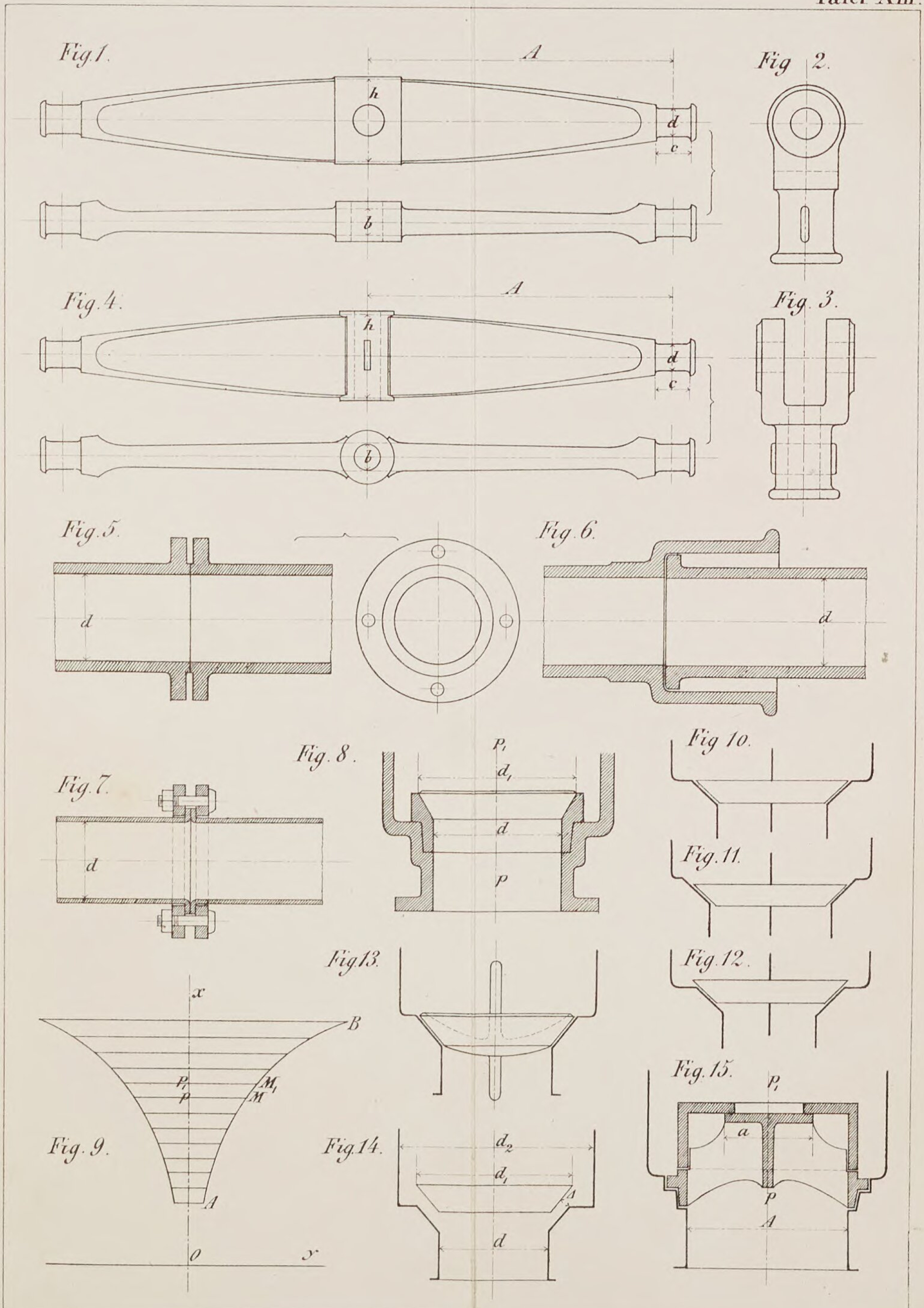


Fig. 1.
A
h
d
c
b
Fig 2.
Fig. 4.
Fig. 3.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
P_1
d_1
d
P
Fig 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig 13.
Fig. 9.
x
B
P_1
P
M_1
M
A
o
y
Fig 14.
d_2
d_1
Fig. 15.
a

Tafel XIV

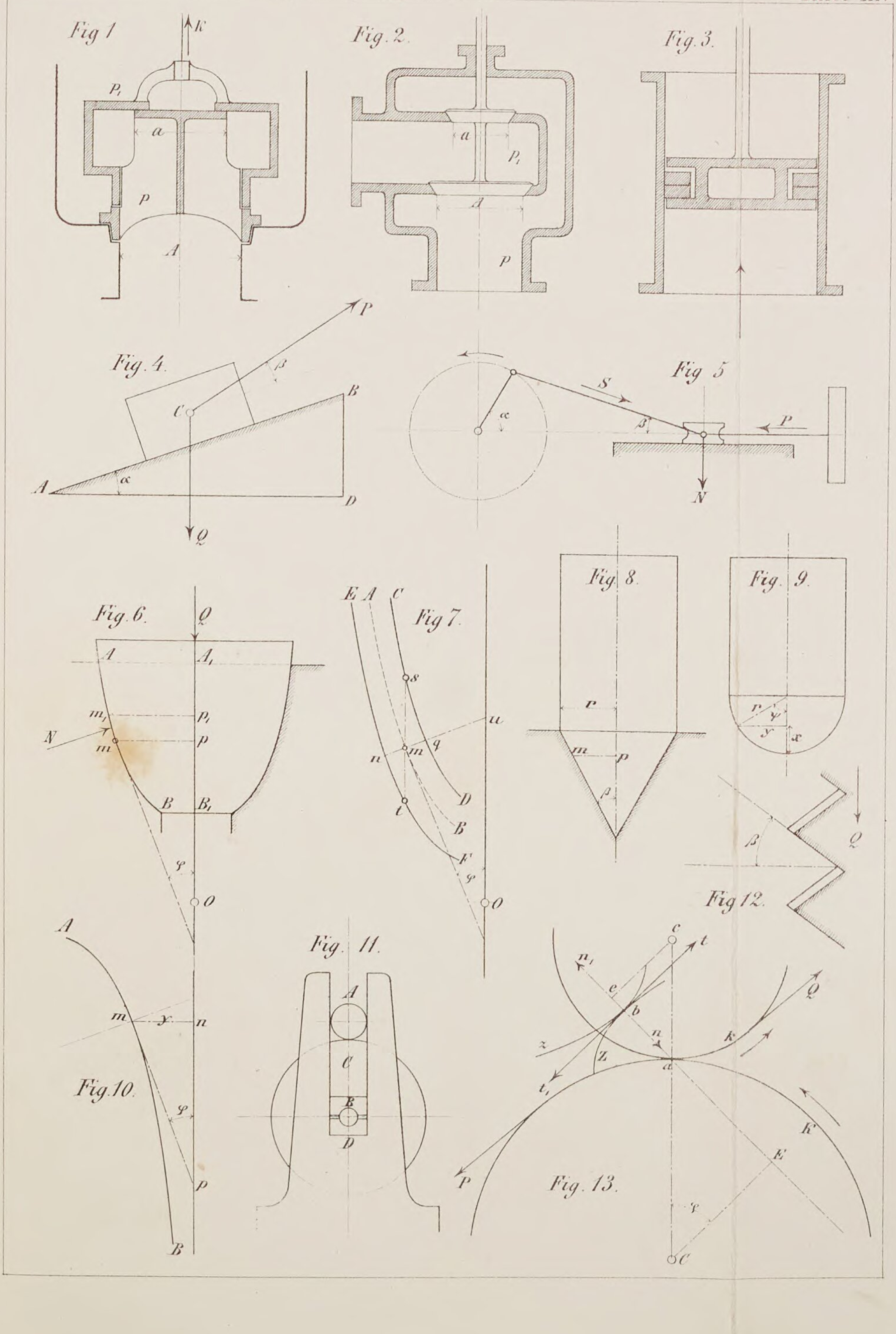
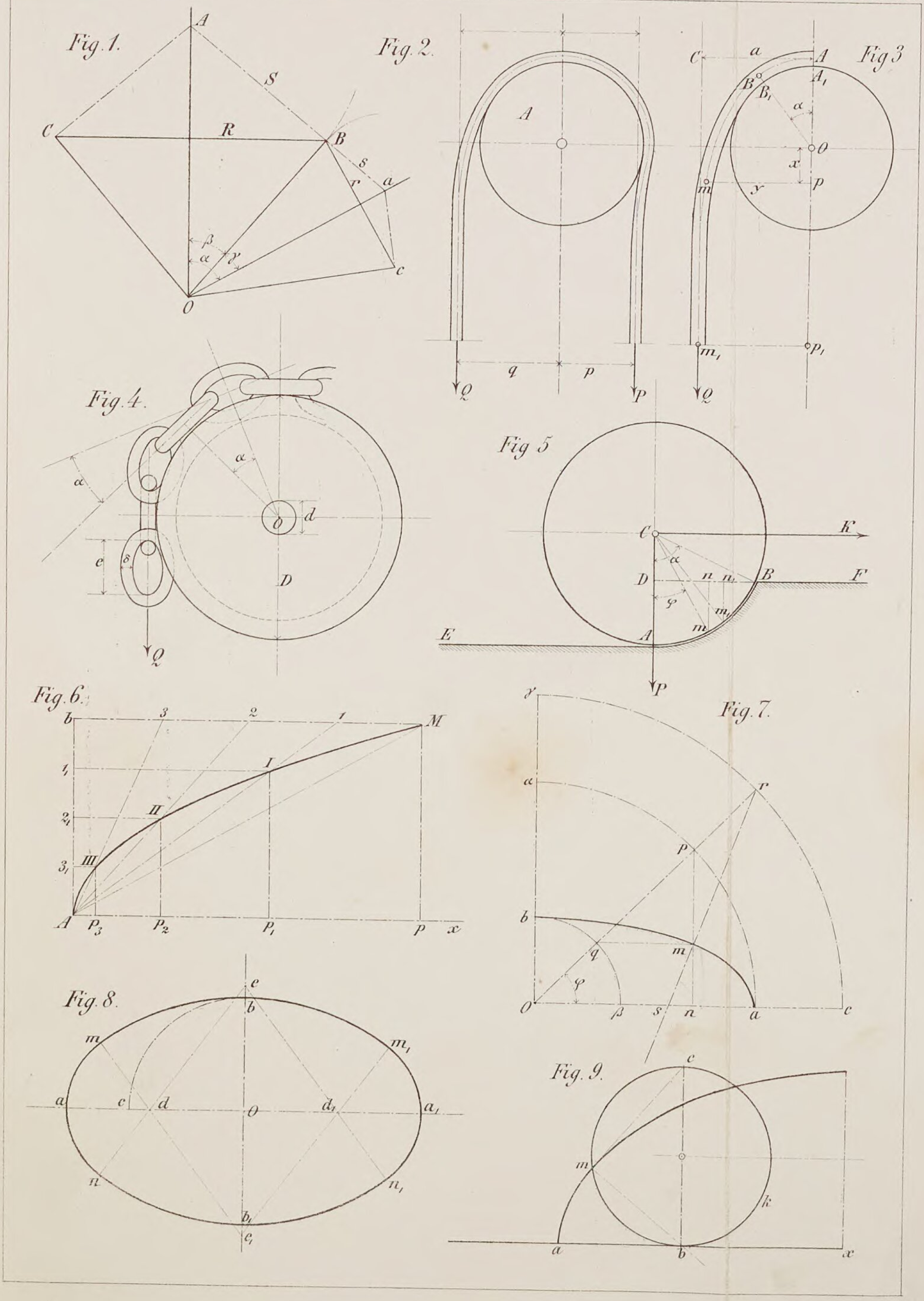


Fig 1
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig 5
Fig. 6.
Fig 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig 12.
Fig. 13.

Tafel XV.


Fig. 1.
A
S
C
R
B
s
r
a
β
α
γ
c
O
Fig. 2.
A
q
p
Q
P
Fig 3
C
a
A
A,
B
B,
α
O
x
p
m
y
m,
p,
Q
Fig. 4.
α
α
d
O
e
δ
D
Q
Fig 5
C
K
α
D
n
n,
B
F
φ
m,
m
E
A
P
Fig. 6.
b
3
2
1
M
1,
I
2,
II
3,
III
A
P3
P2
P1
P
x
Fig. 7.
y
α
r
p
b
m
q
φ
O
β
s
n
a
c
Fig. 8.
e
b
m
m,
a
c
d
O
d,
a,
n
n,
b,
c,
Fig. 9.
c
m
k
a
b
x

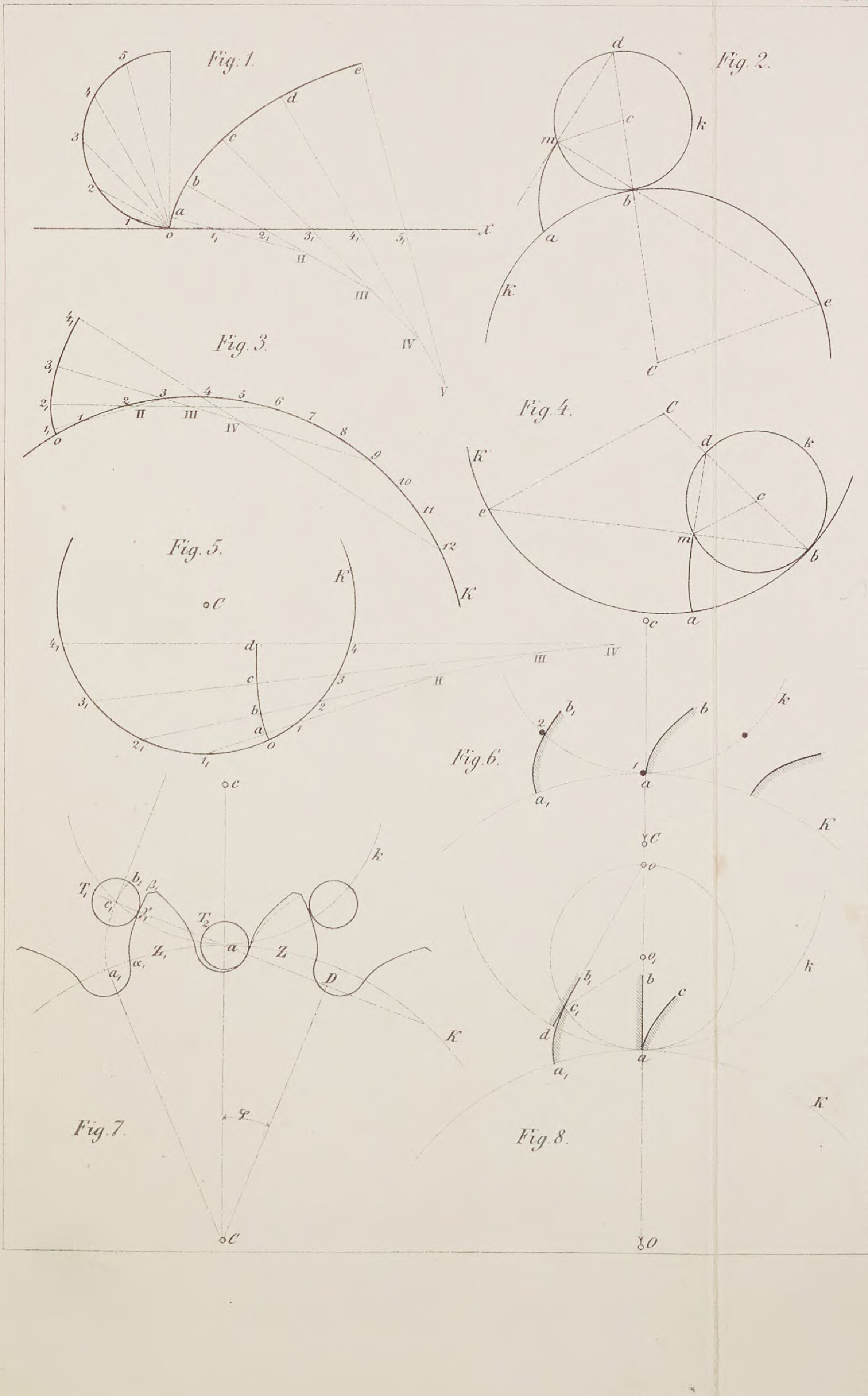

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

Fig. 1.

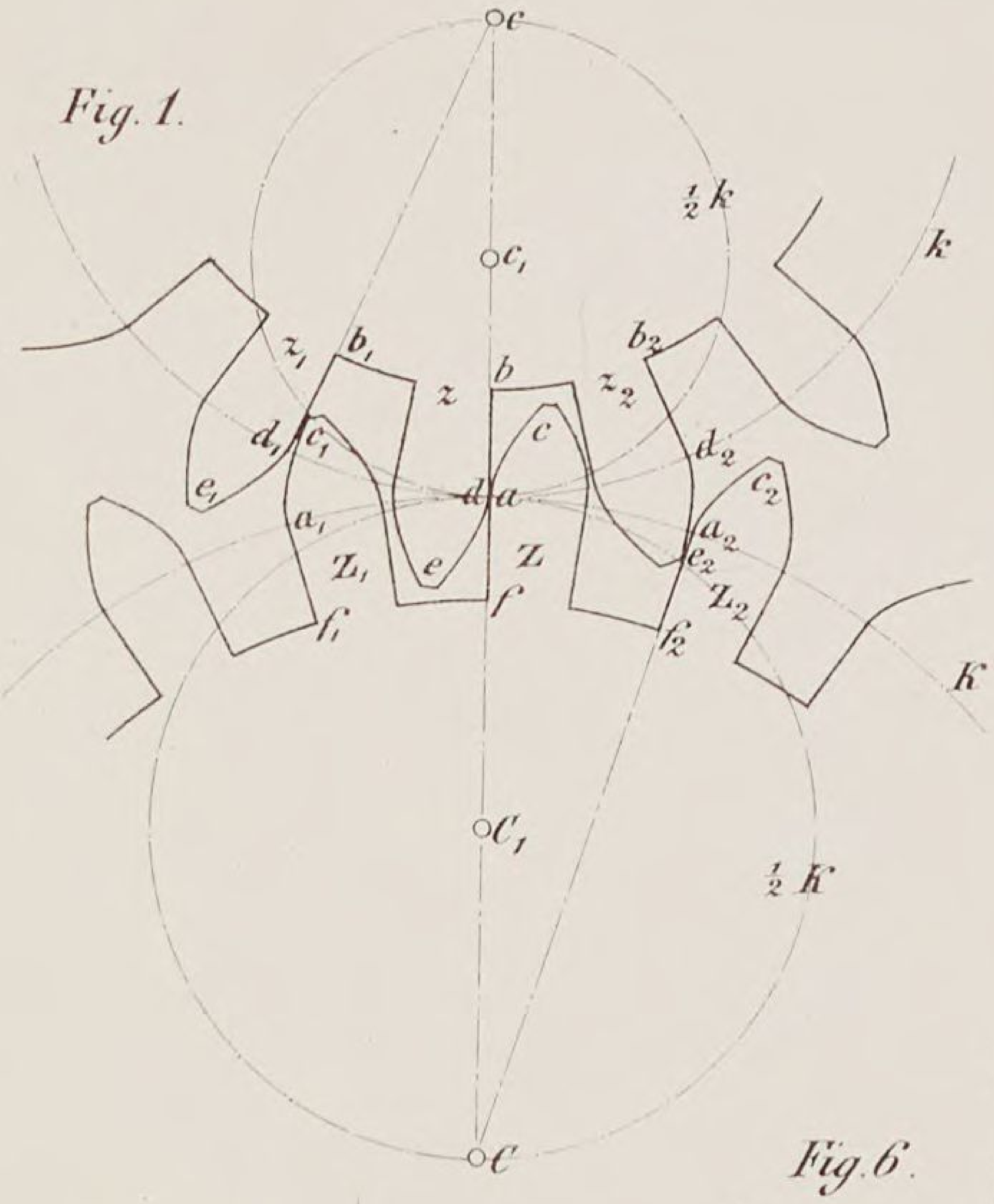


Fig. 3.

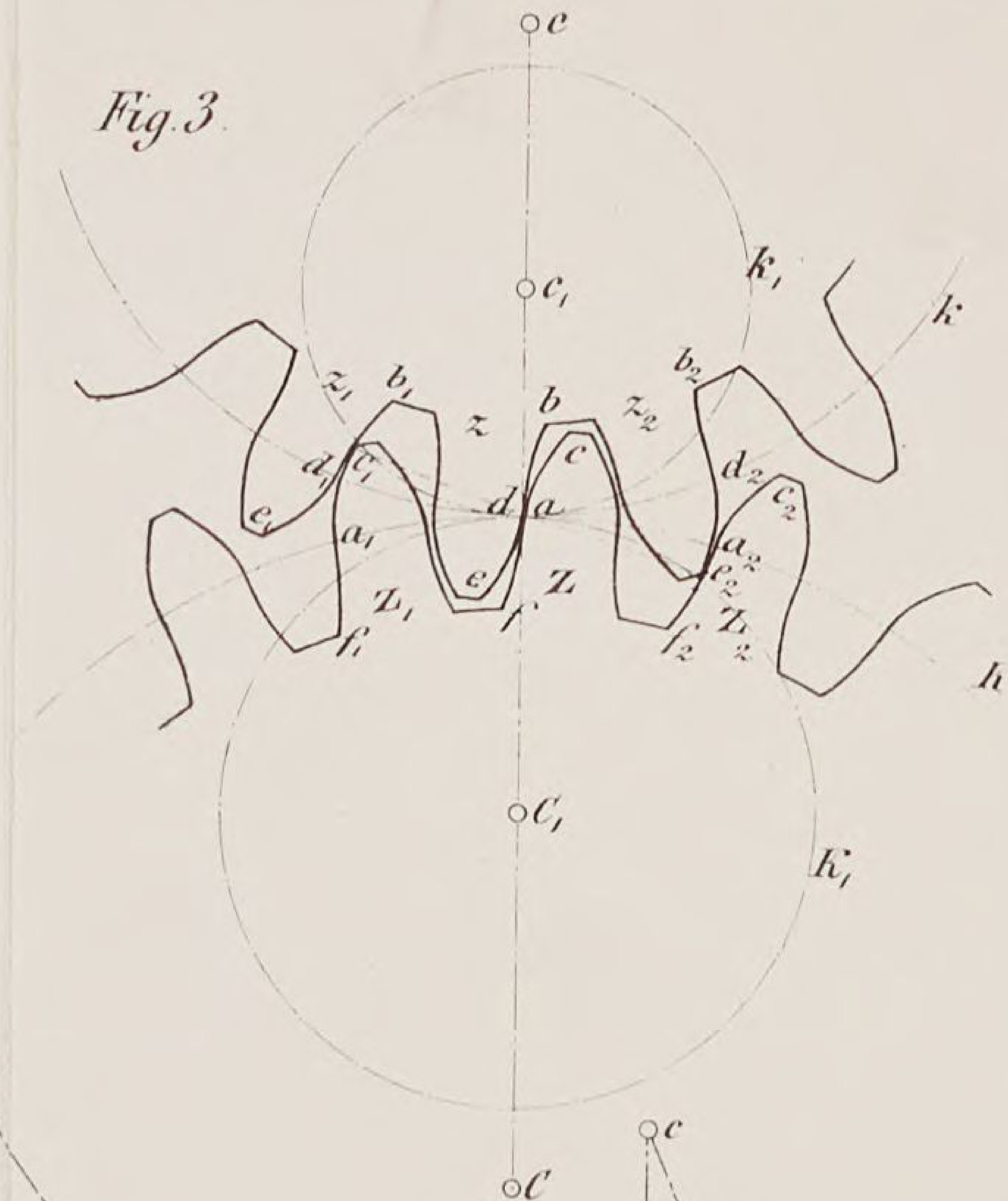


Fig. 2.

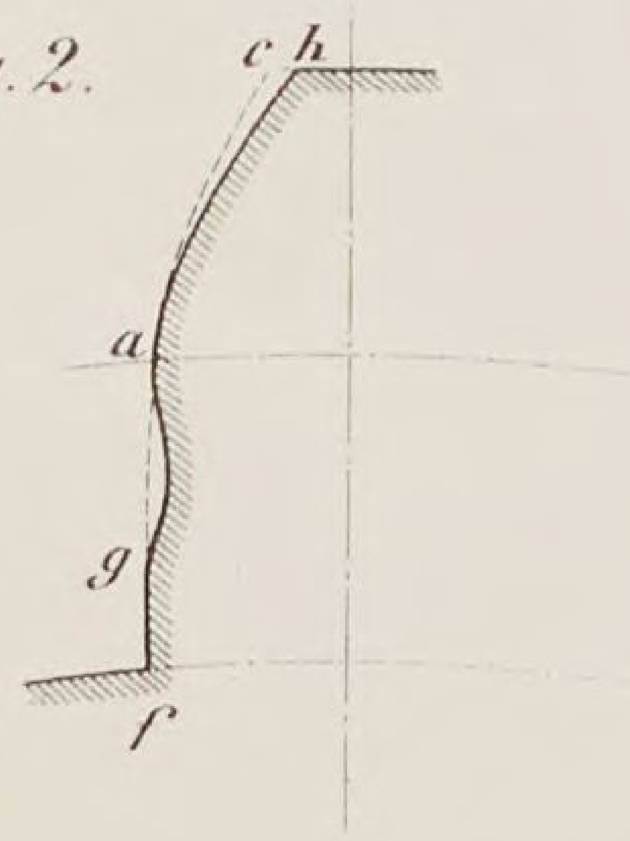


Fig. 6.

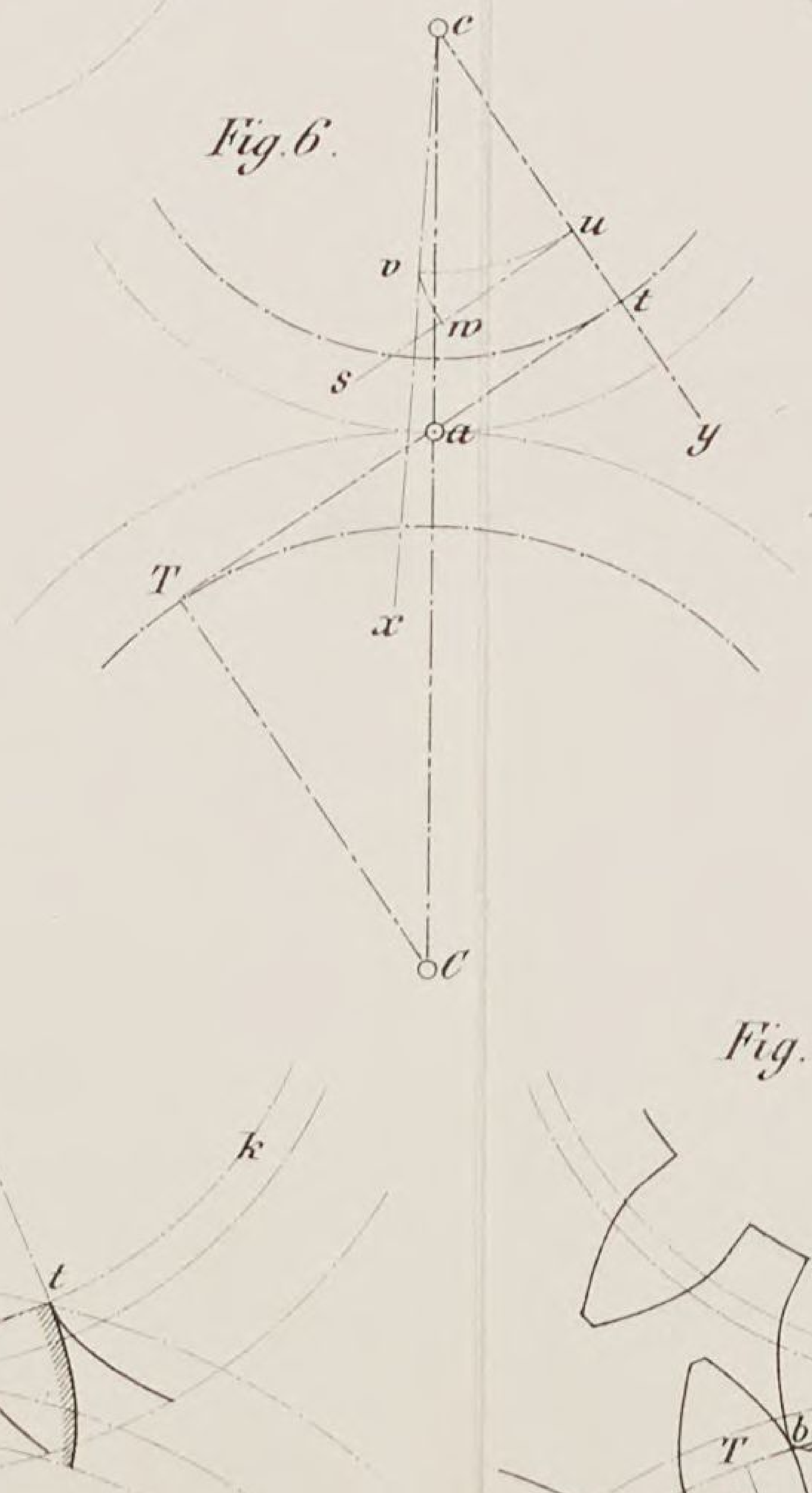


Fig. 7.

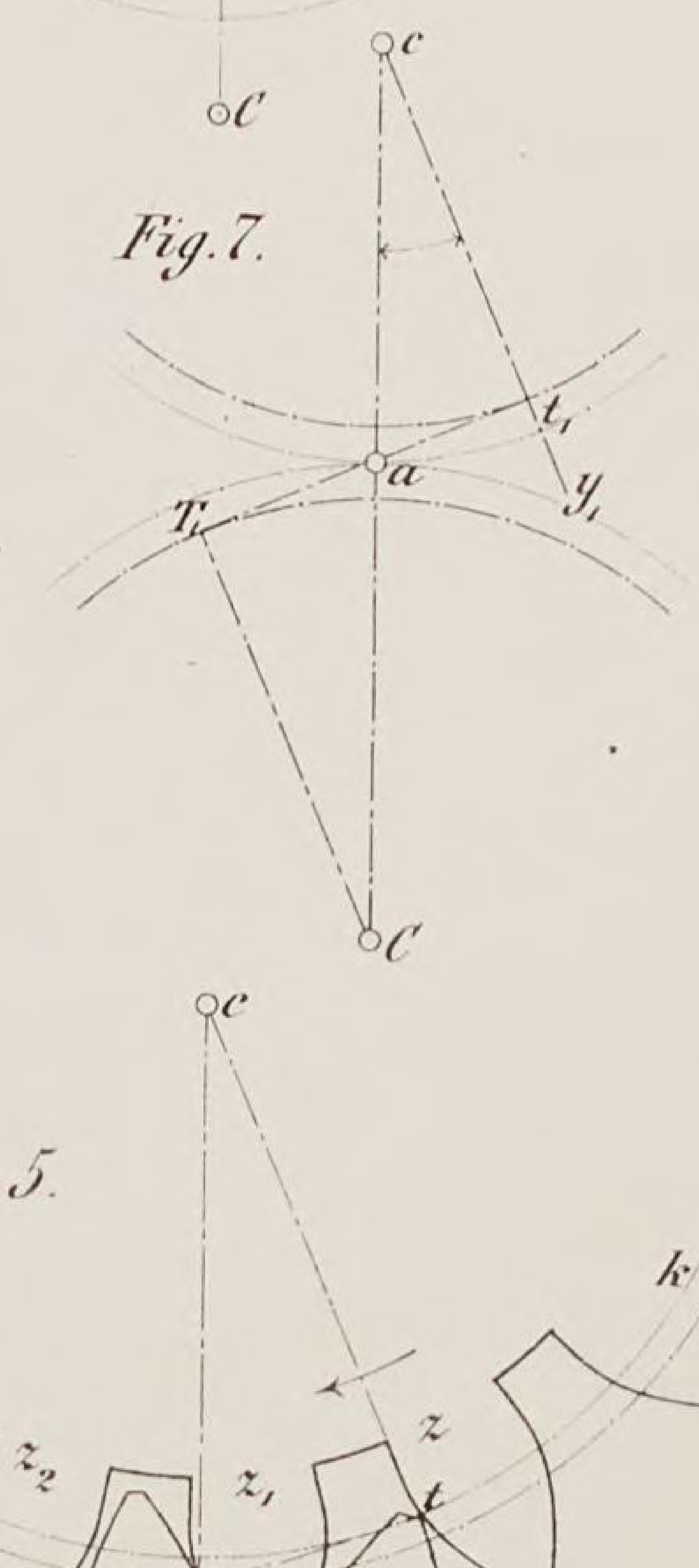


Fig. 4.

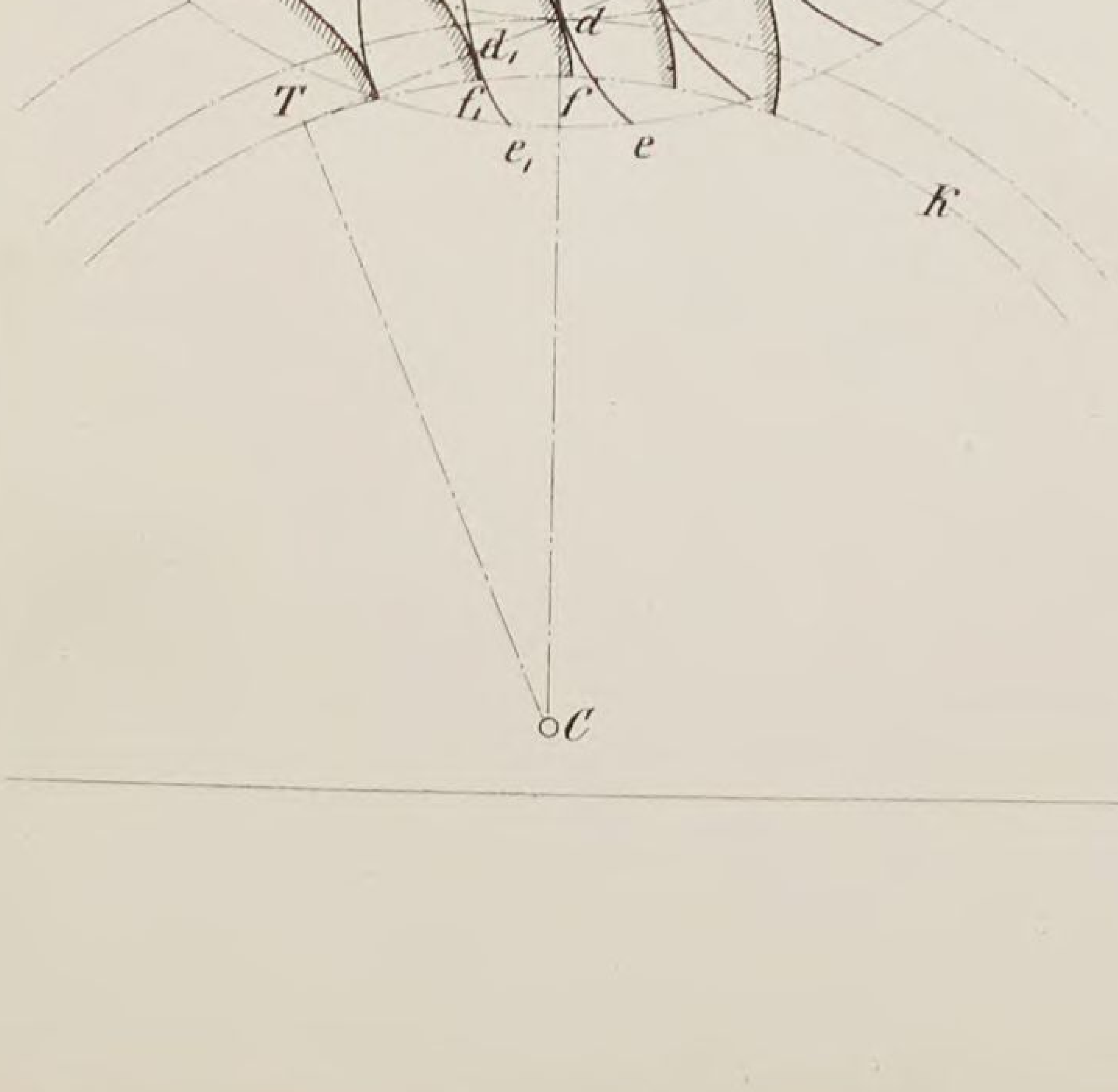
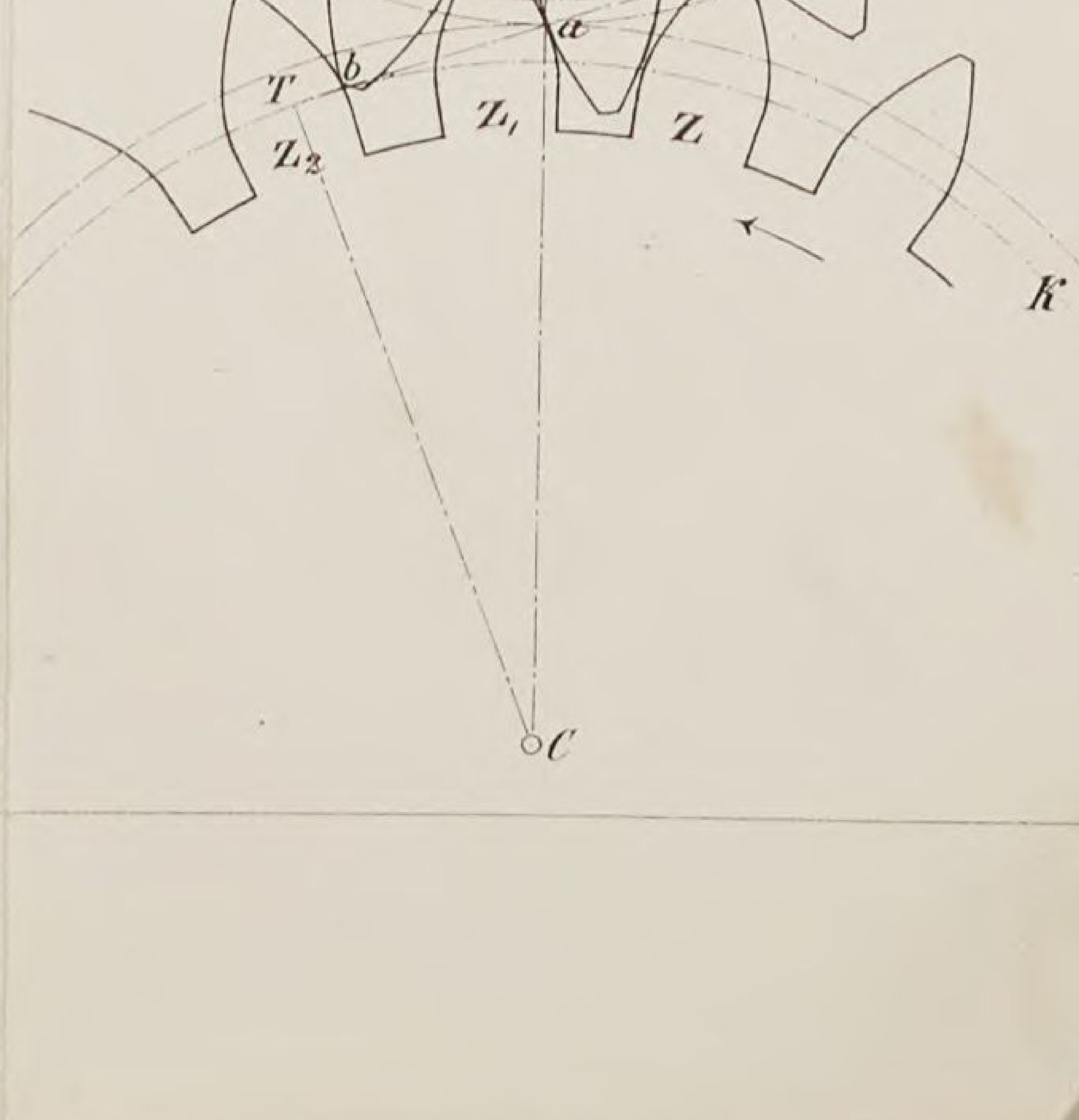
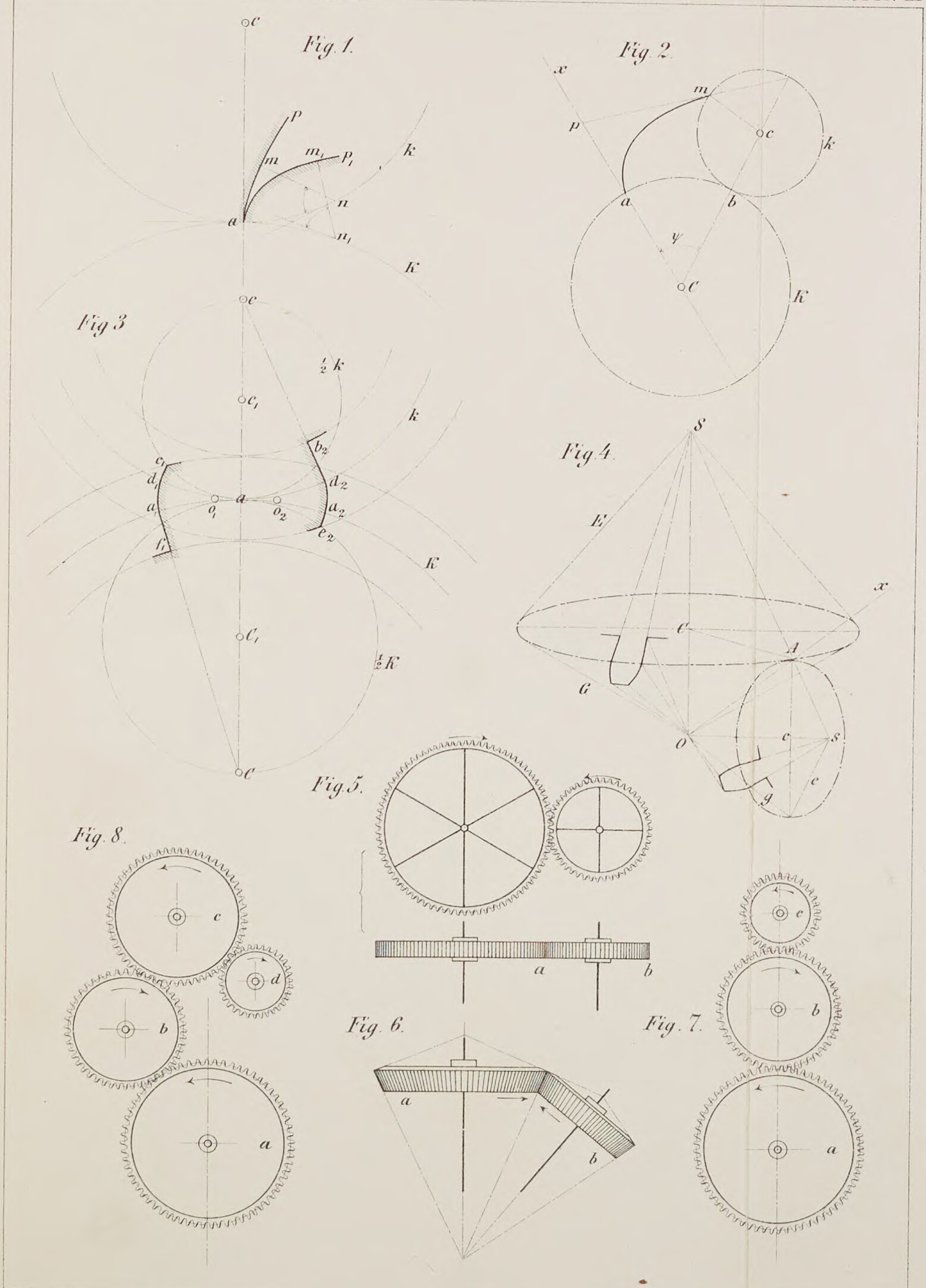


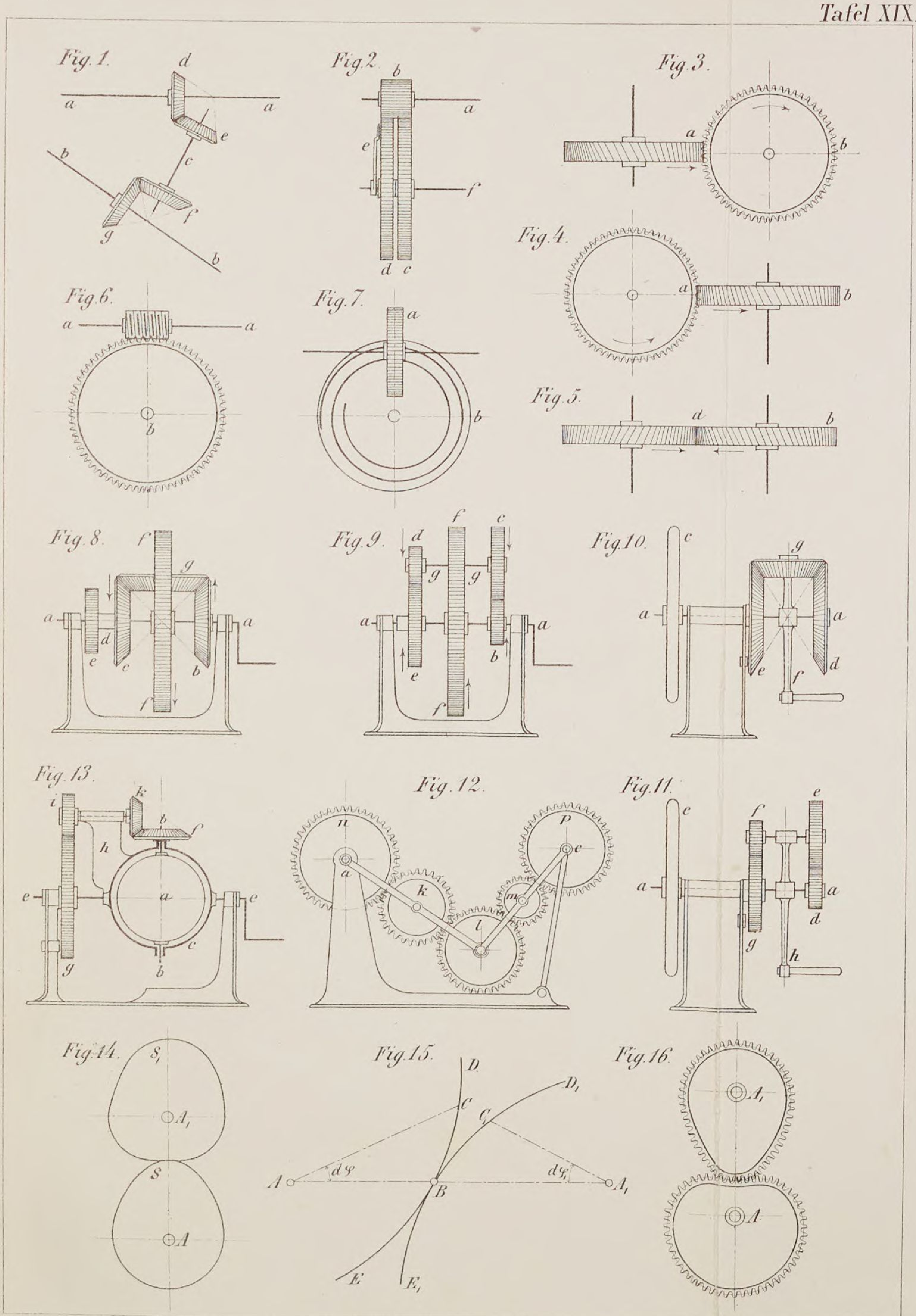
Fig. 5.

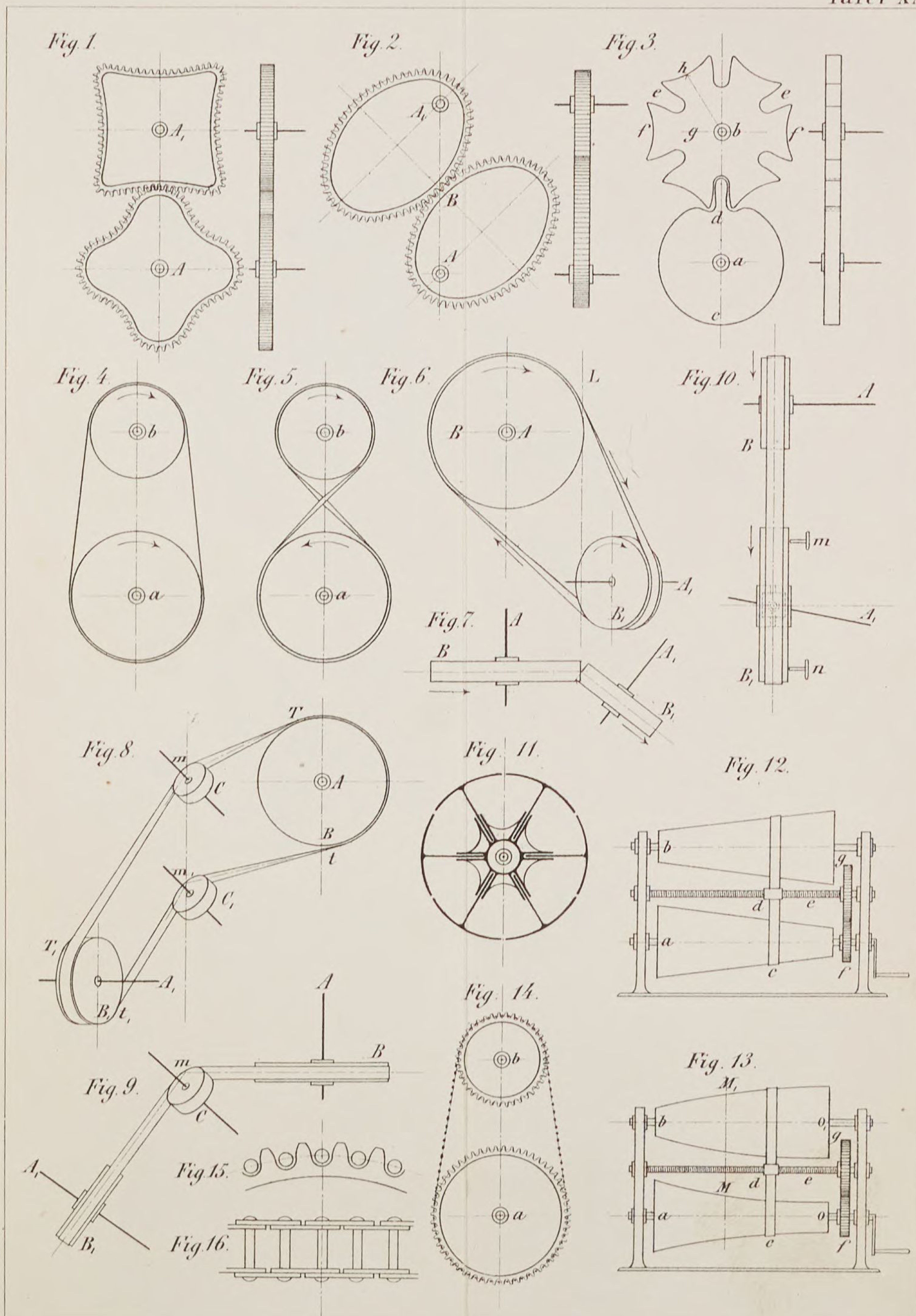


Tafel XVIII

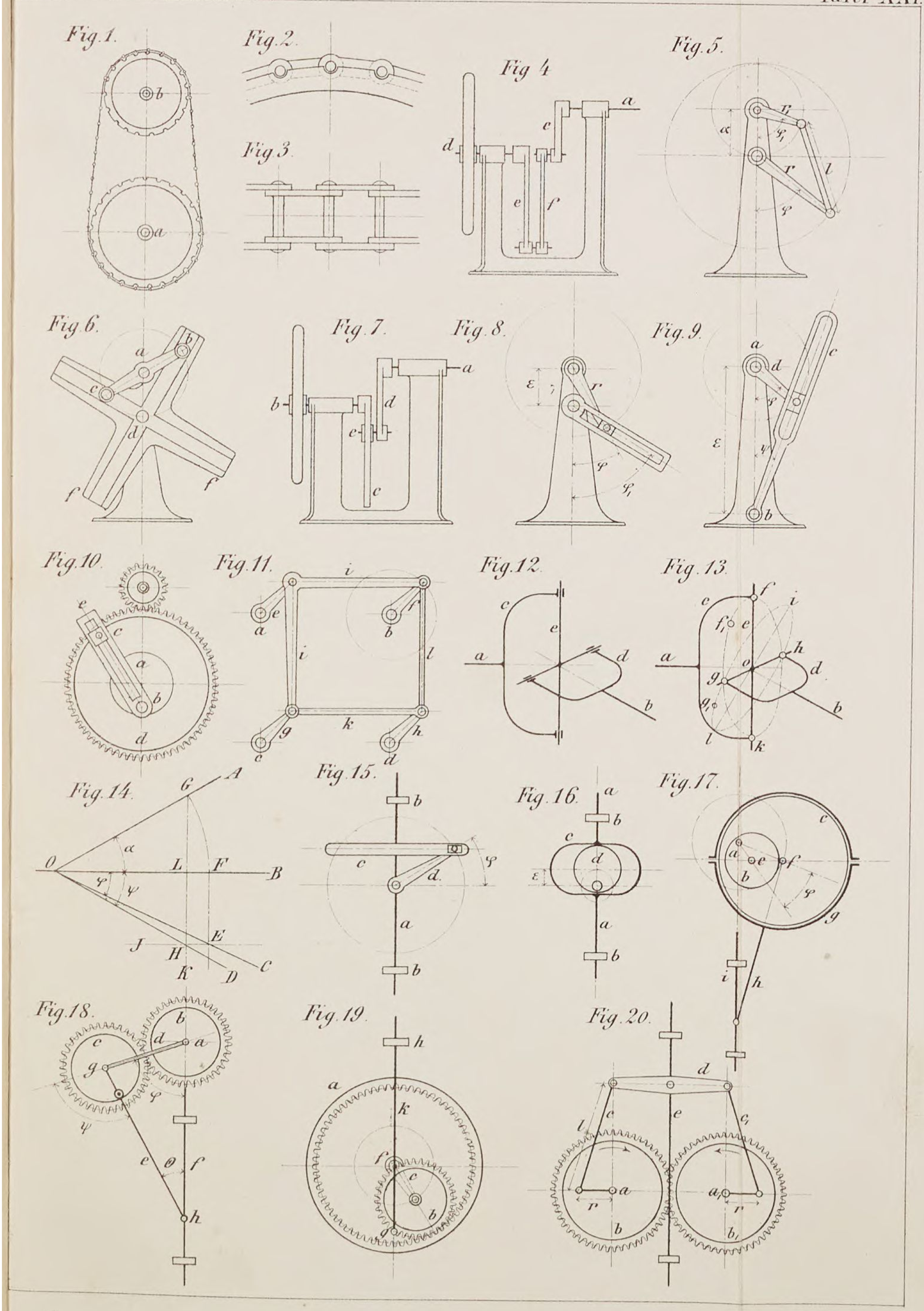

Fig. 1.
c
p
m
m₁
p₁
k
n
a
n₁
K
Fig. 2.
x
m
p
c
k
a
b
ψ
C
K
Fig 3
c
½ k
c₁
k
b₂
c₁
d₁
d₂
a₁
a
o₁
o₂
a₂
e₂
f₁
K
C₁
½ K
C
Fig. 4.
S
E
x
C
A
G
O
c
s
e
g
Fig. 5.
a
b
Fig. 6.
a
b
Fig. 7.
c
b
a
Fig. 8.
c
d
b
a

Tafel XIX.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.



Lith. v. L. Geisendörfer, Carlsruhe.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.

Tafel XXII.

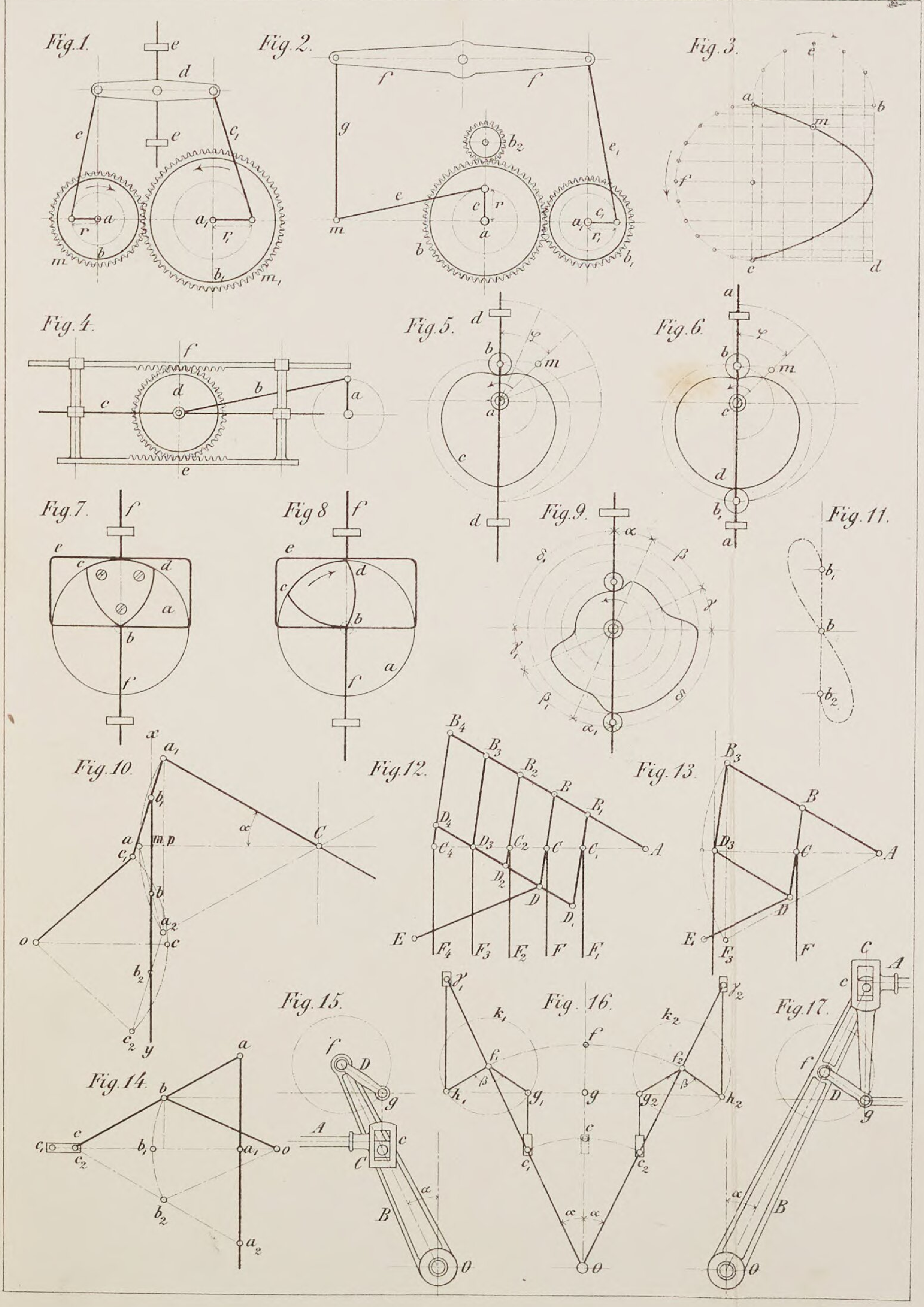

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig 8
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.

Fig. 1.

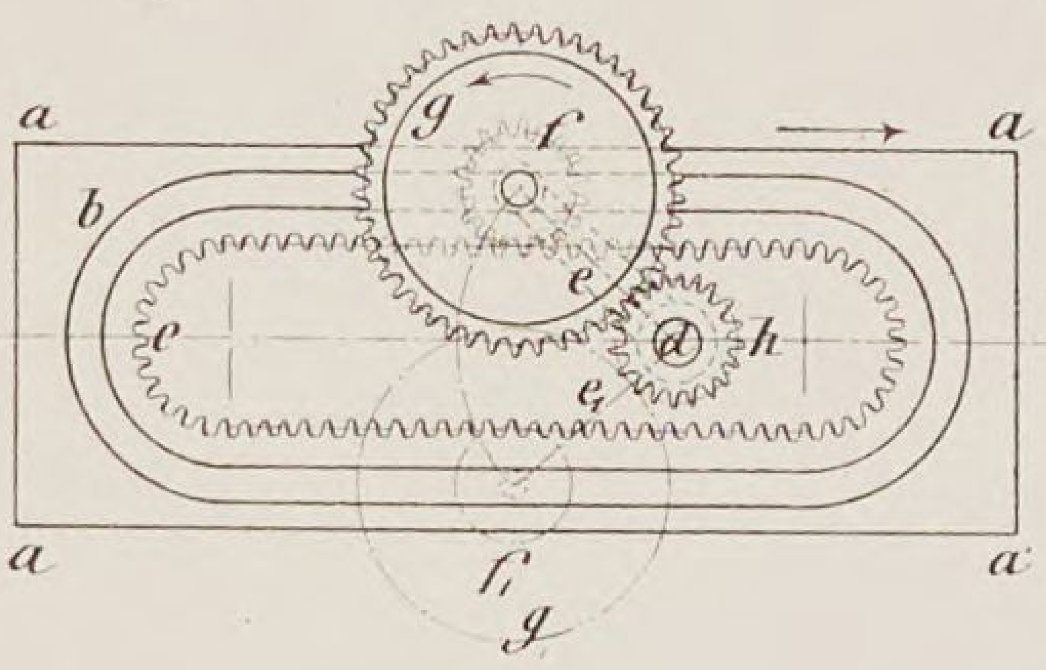


Fig. 2.

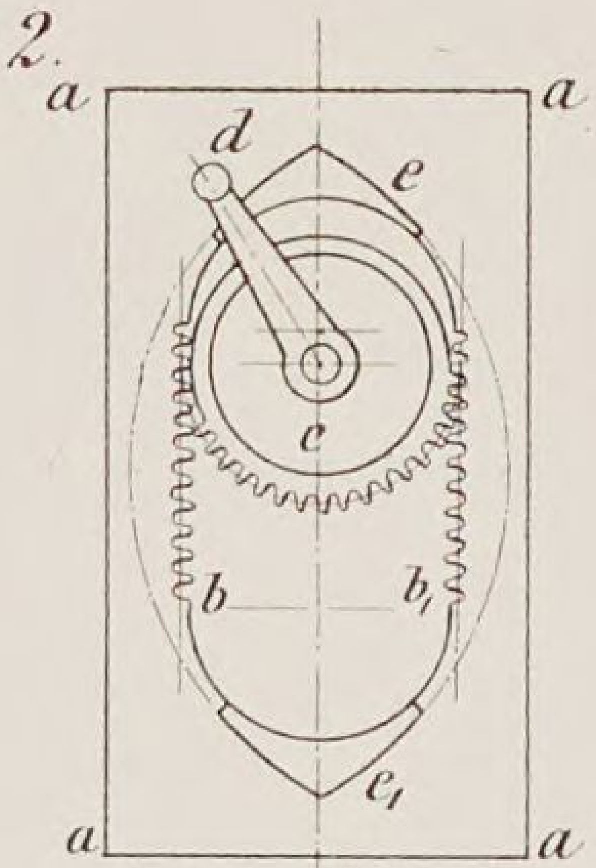


Fig. 3.

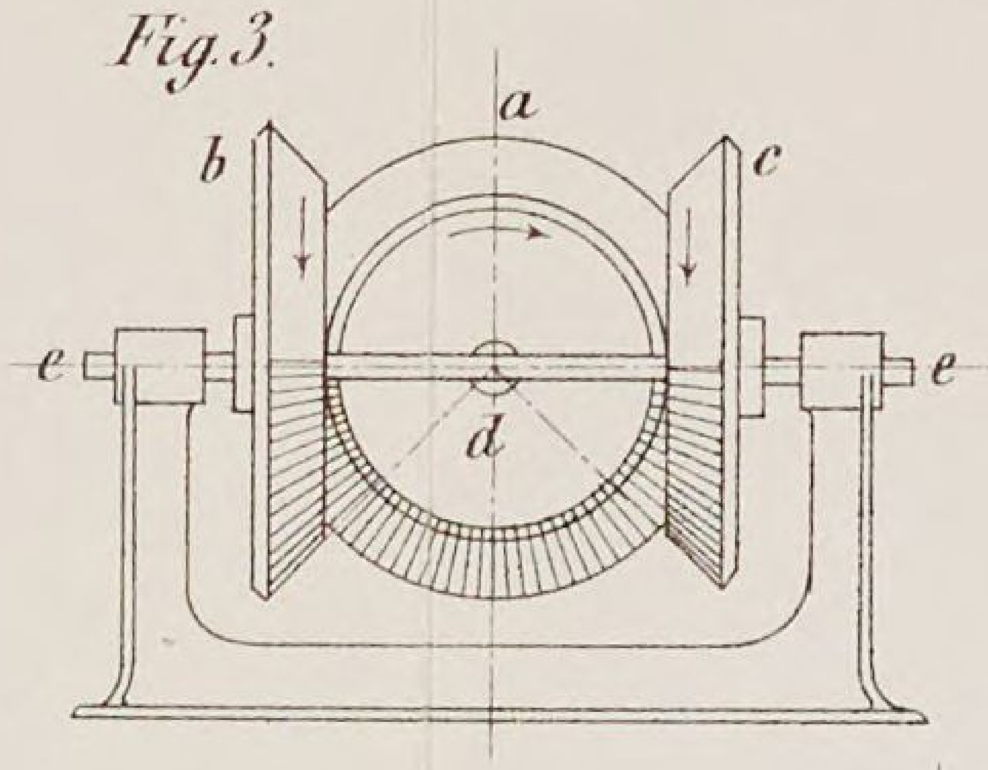


Fig. 4.

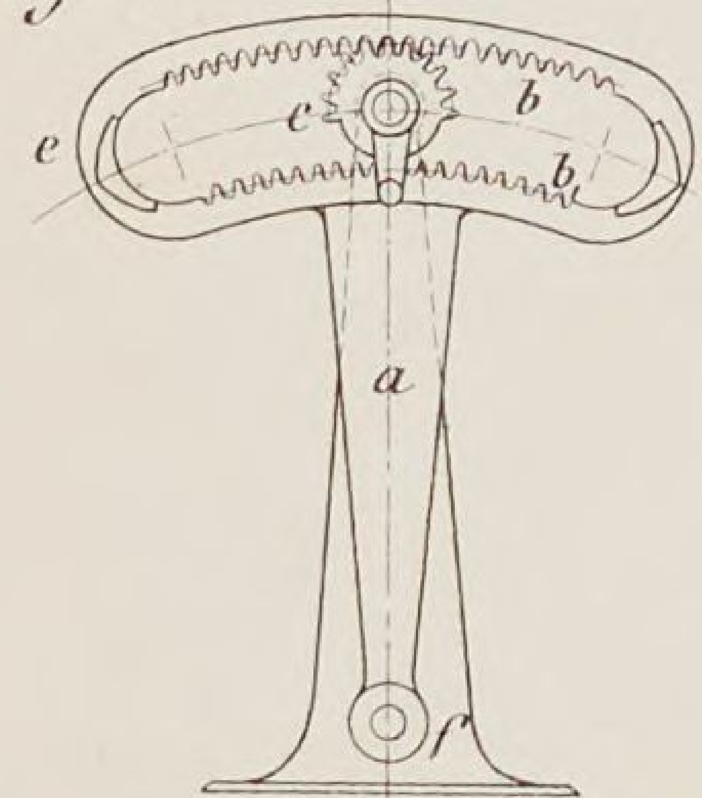


Fig. 5.

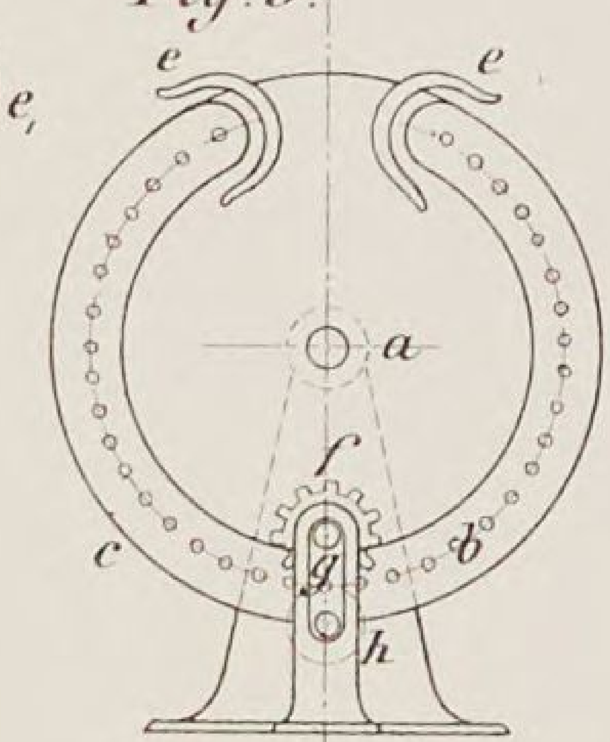


Fig. 6.

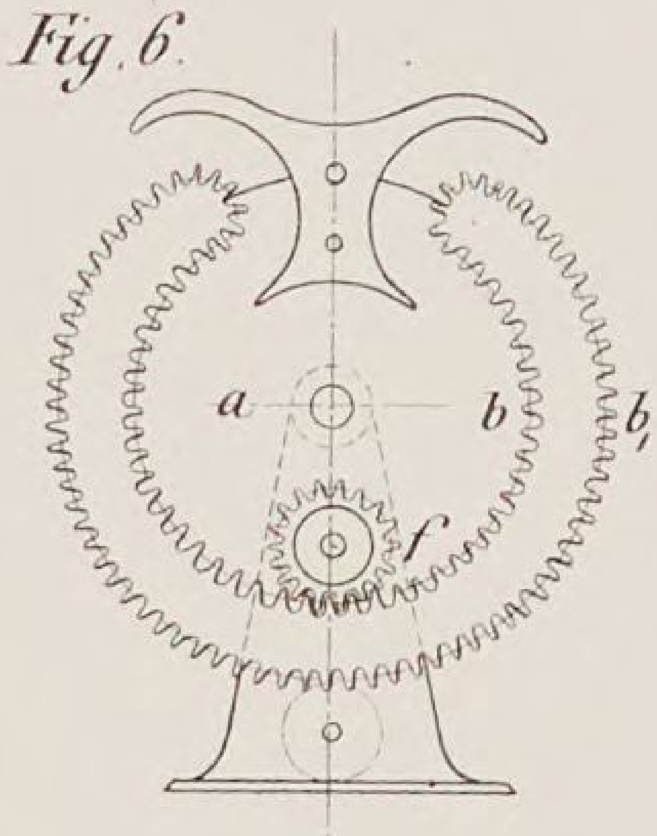


Fig. 7.

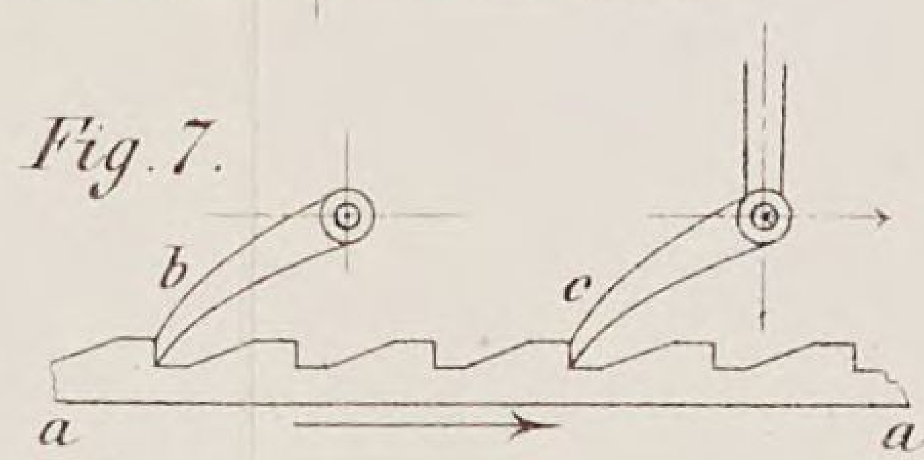


Fig. 8.

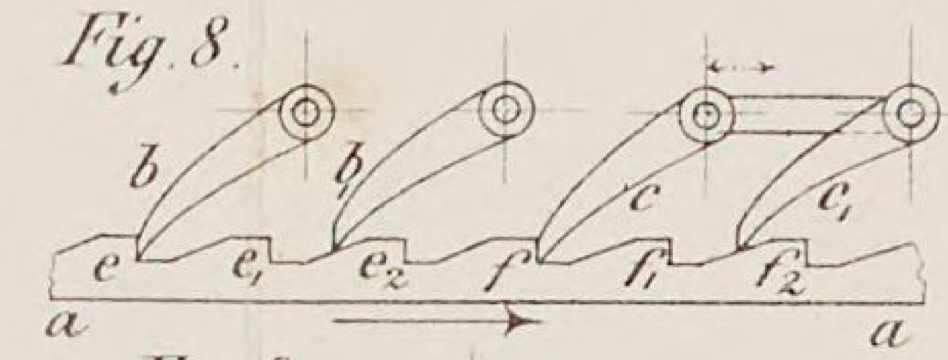


Fig. 9.

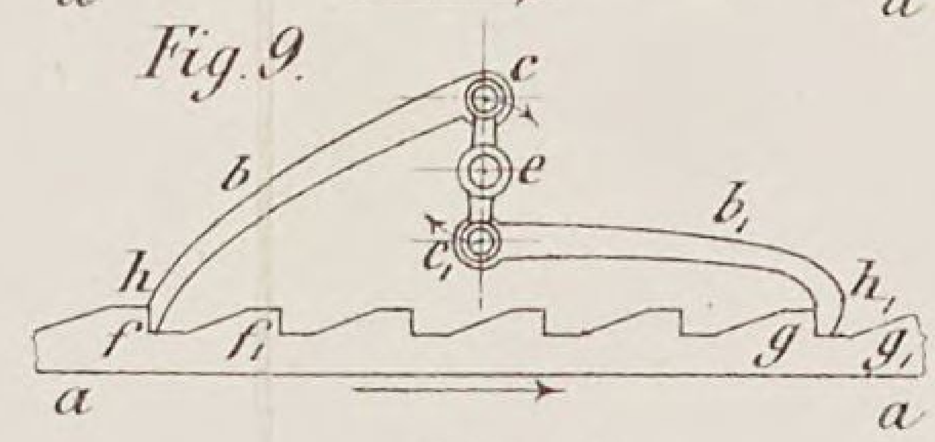


Fig. 10.

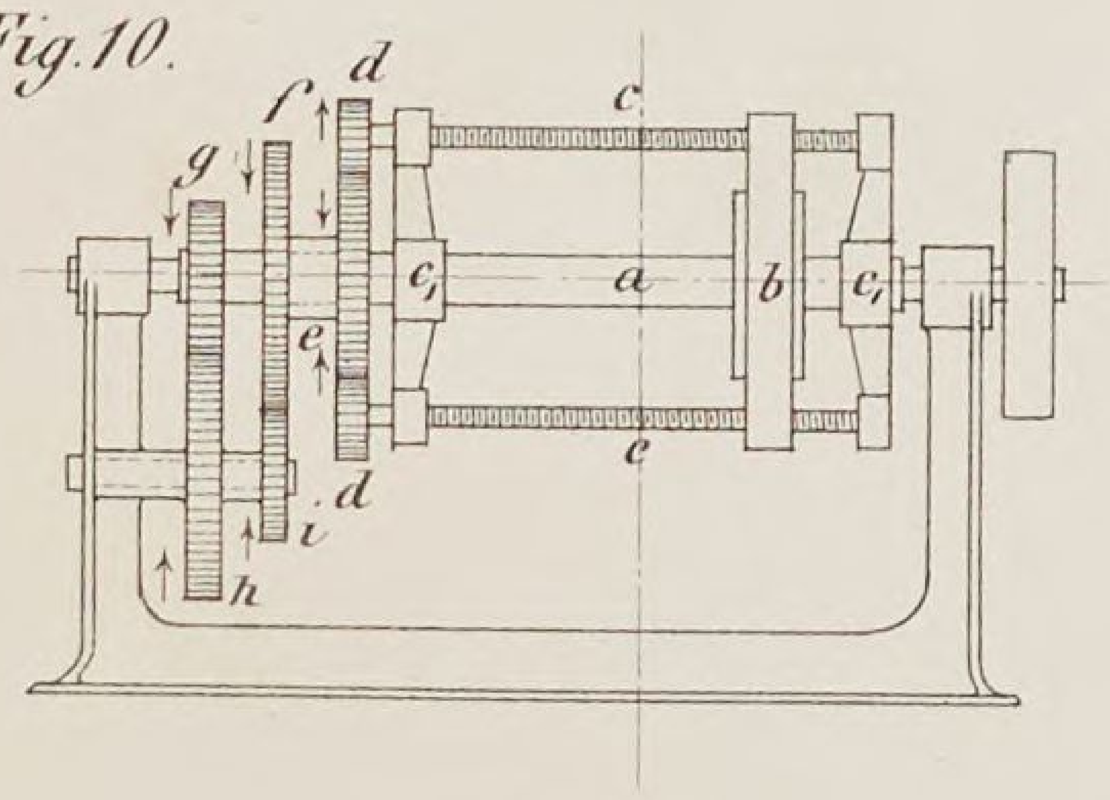


Fig. 11.

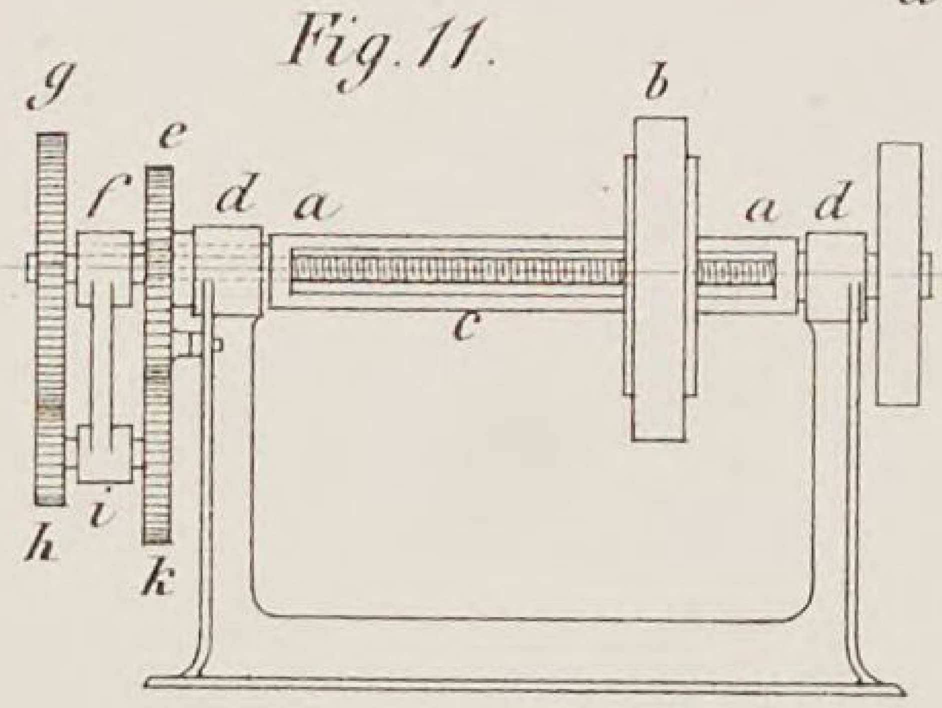


Fig. 12.

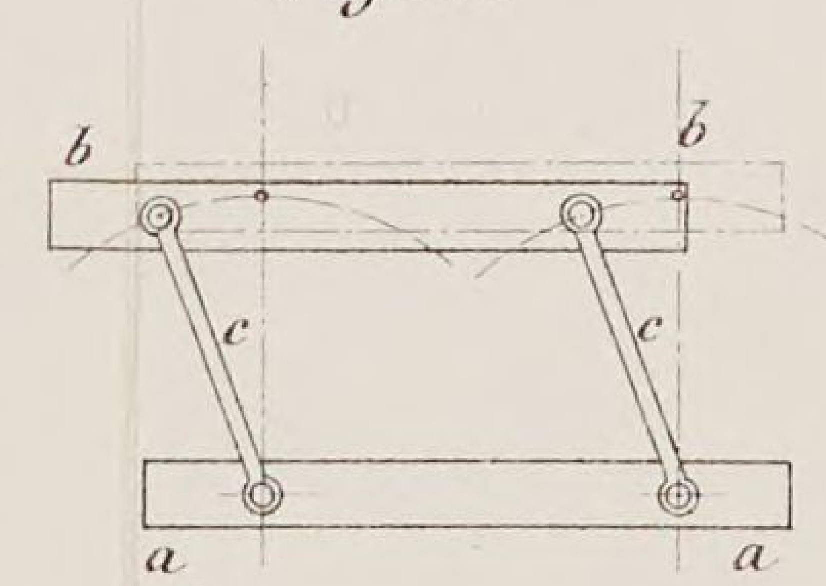


Fig. 14.

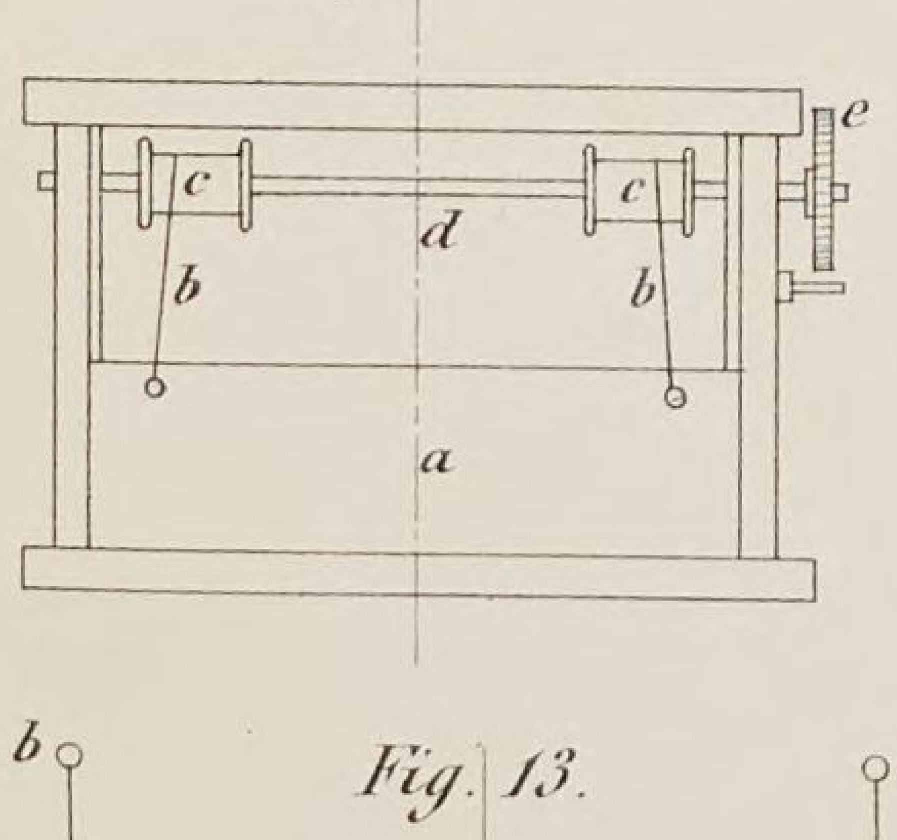


Fig. 15.

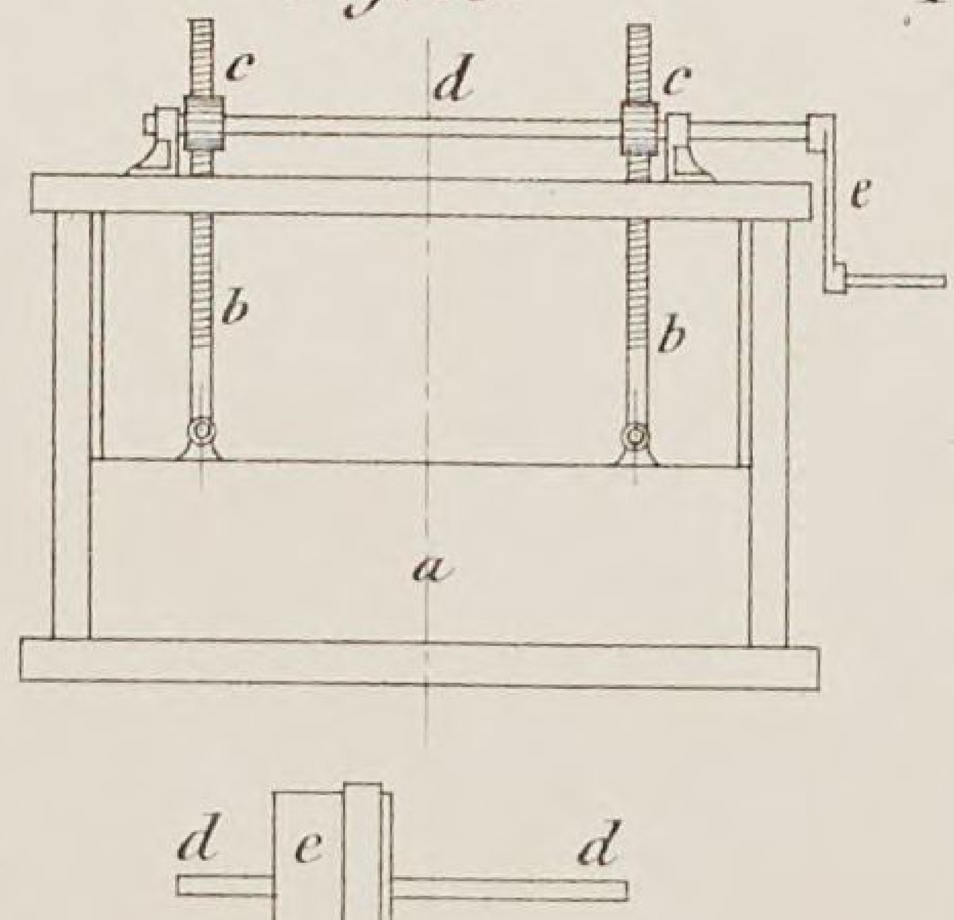


Fig. 16.

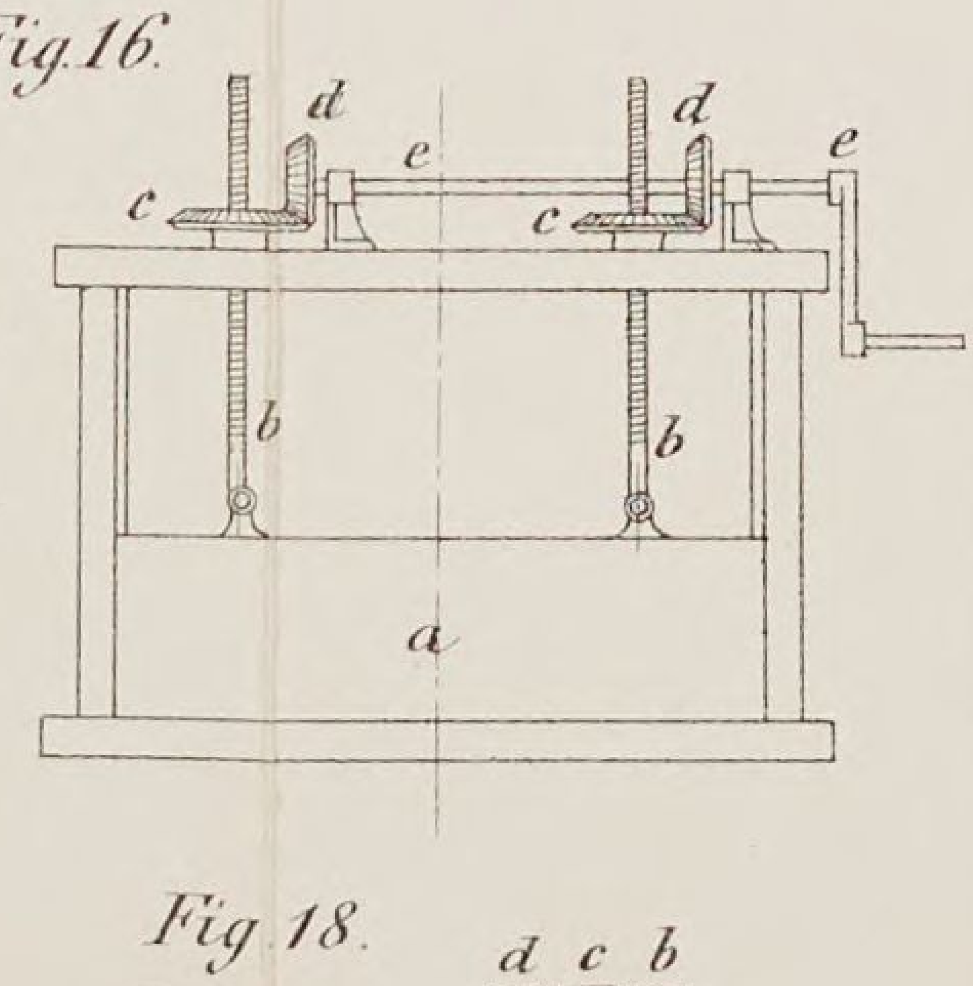


Fig. 13.

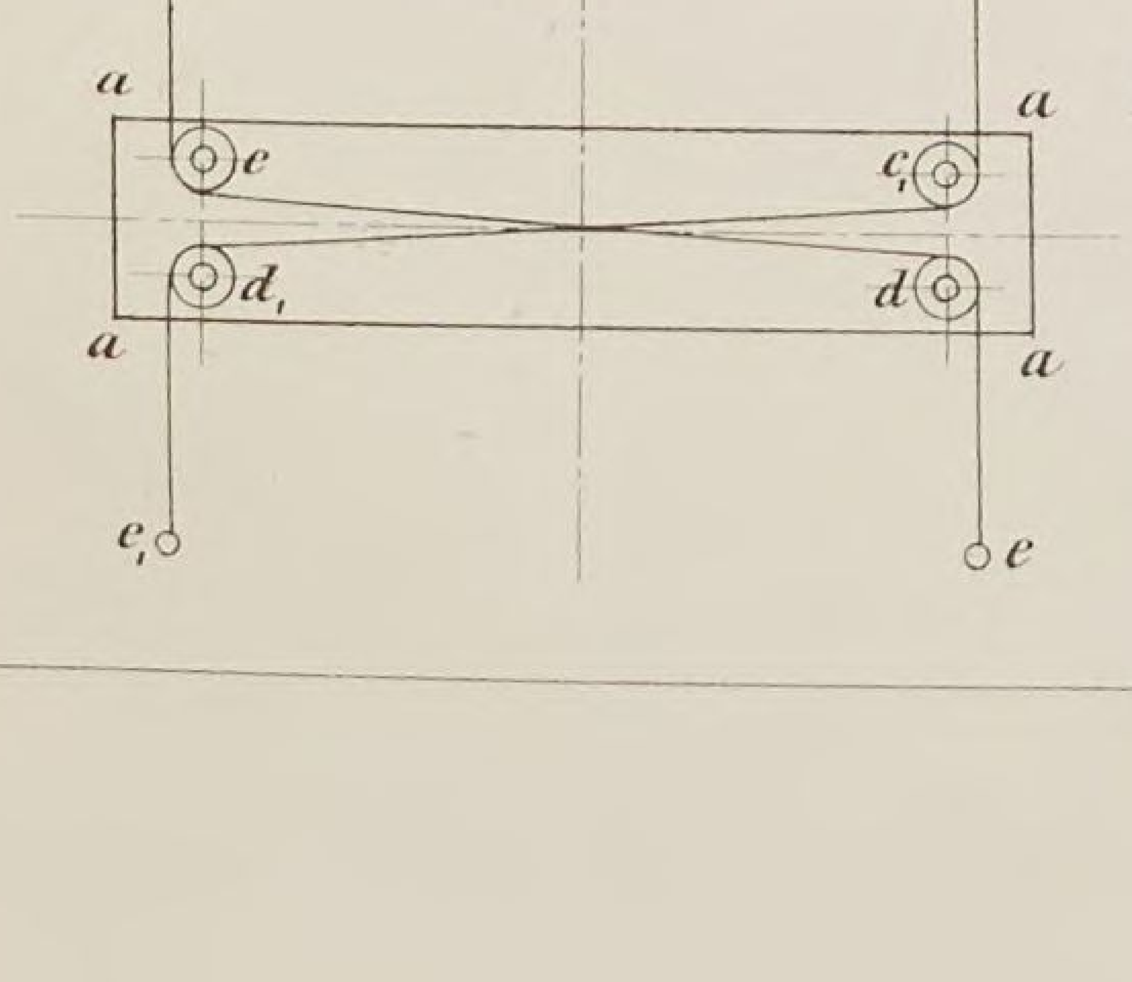


Fig. 17.

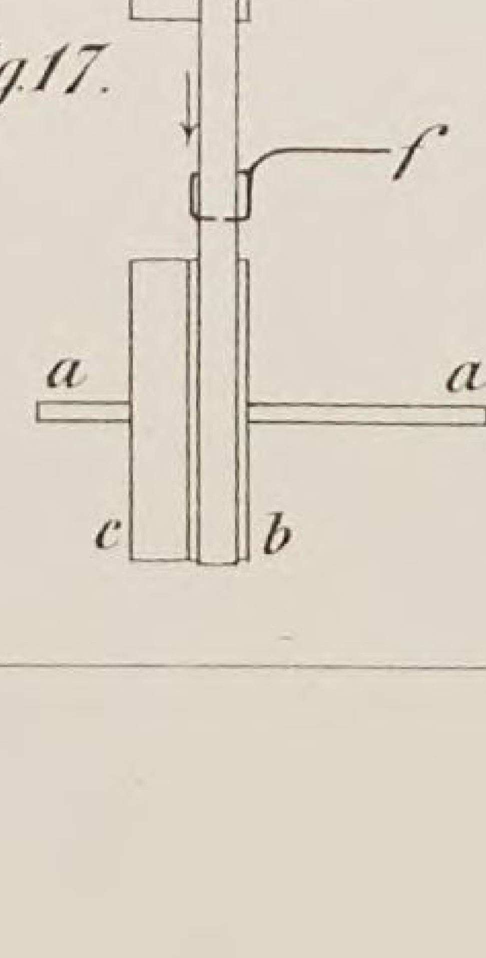
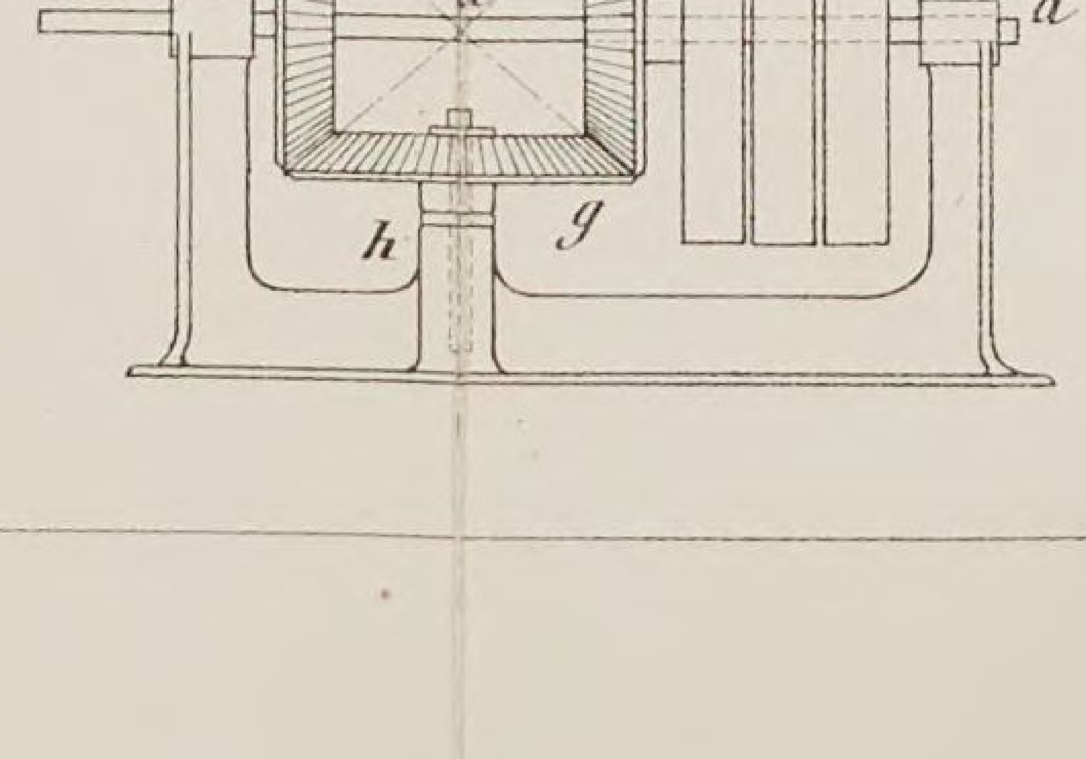
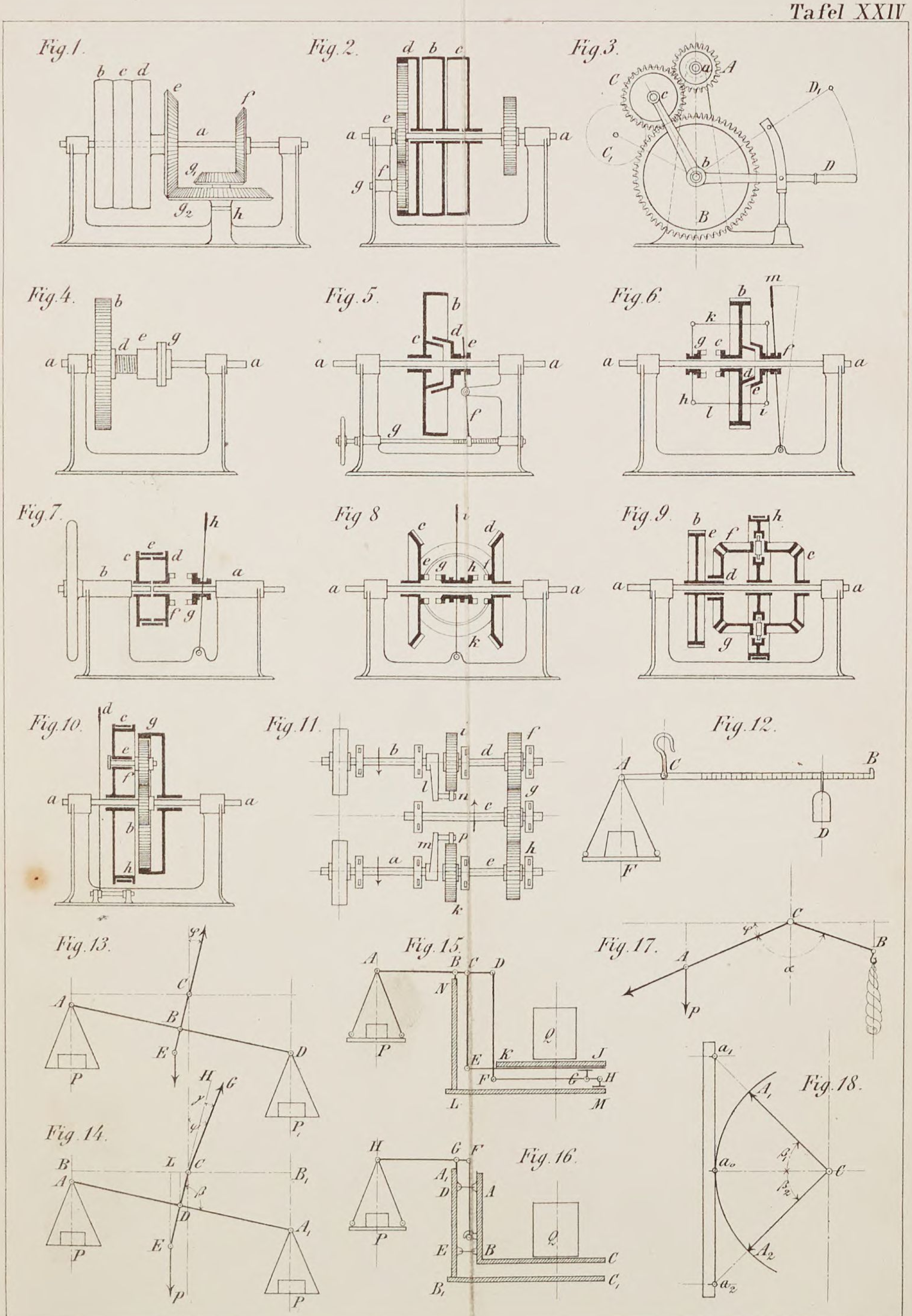
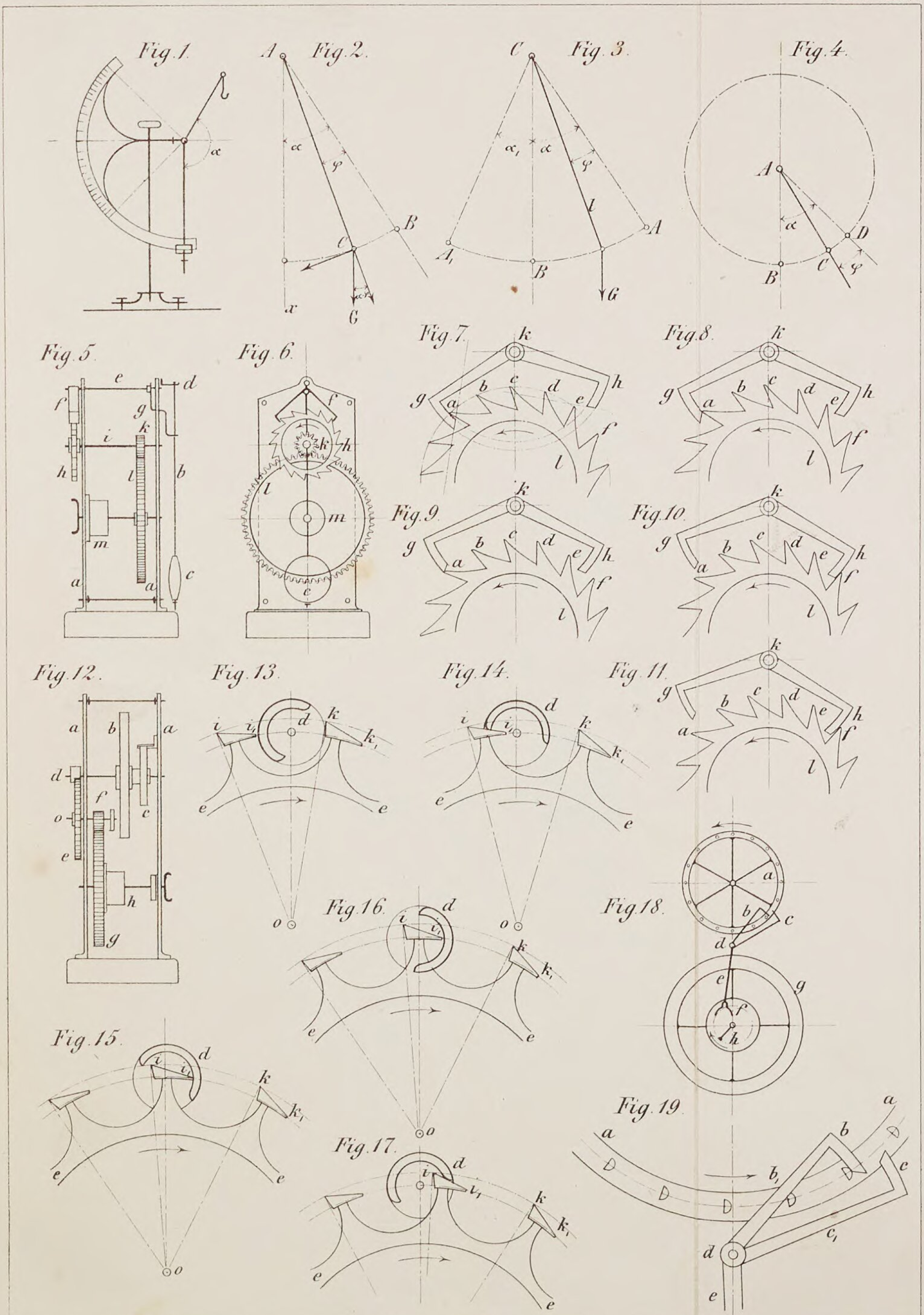


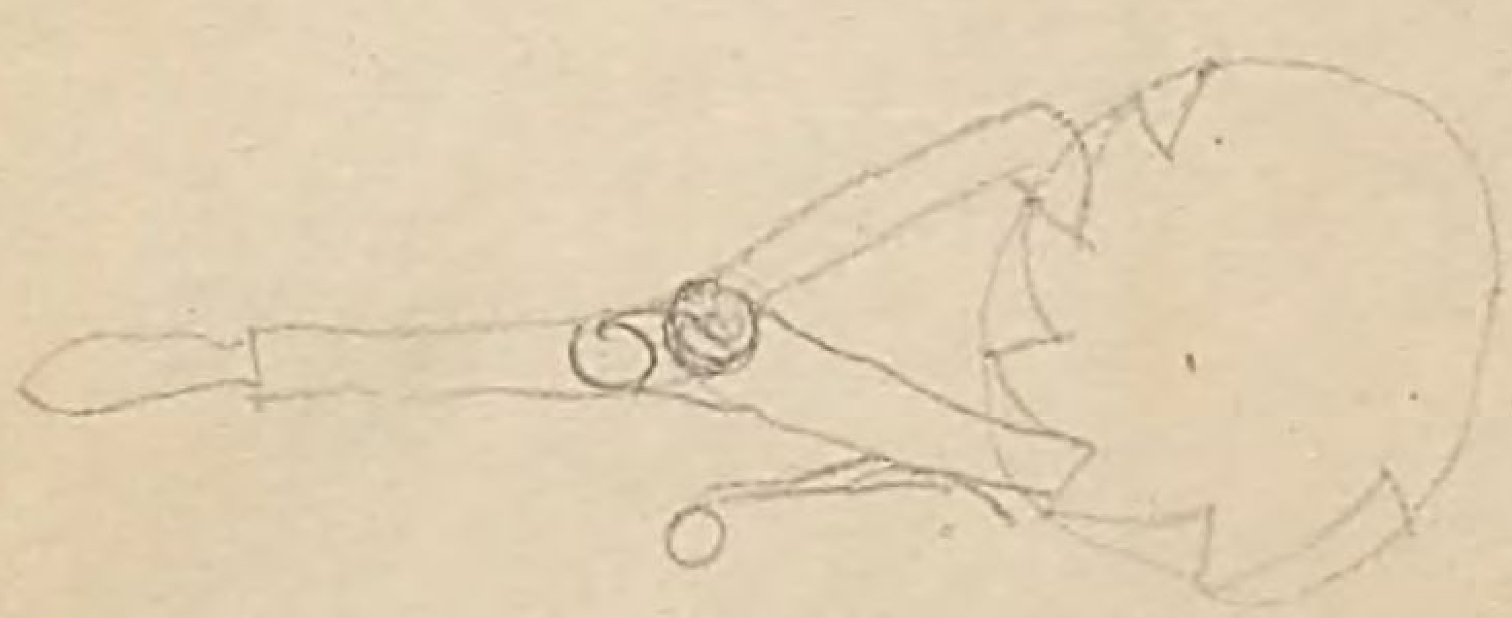
Fig. 18.

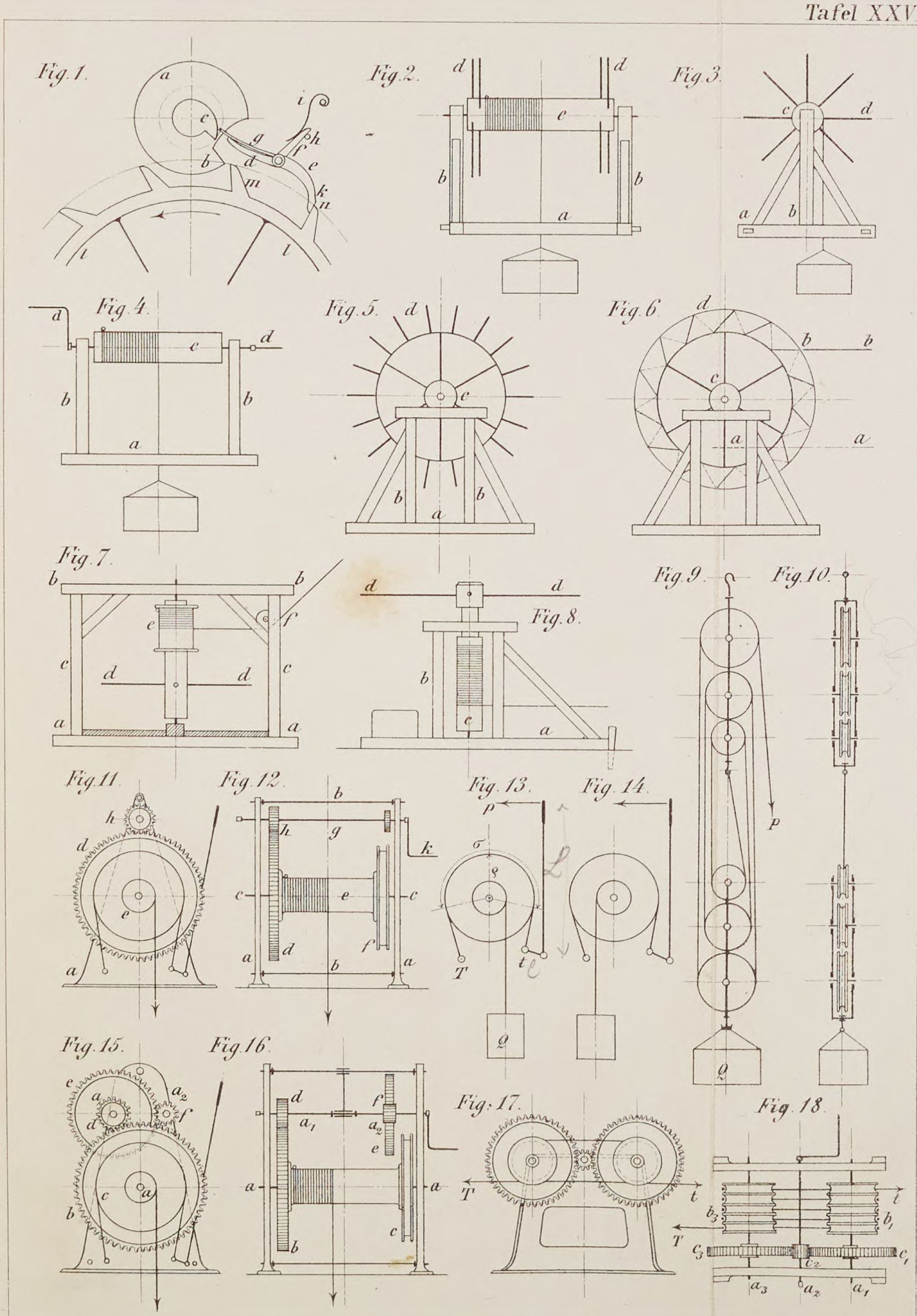




Lith. Anst. v. L. Geisendörfer, Carlsruhe


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.





Lith. v L. Geisendörfer, Carlsruhe

Tafel XXVII.

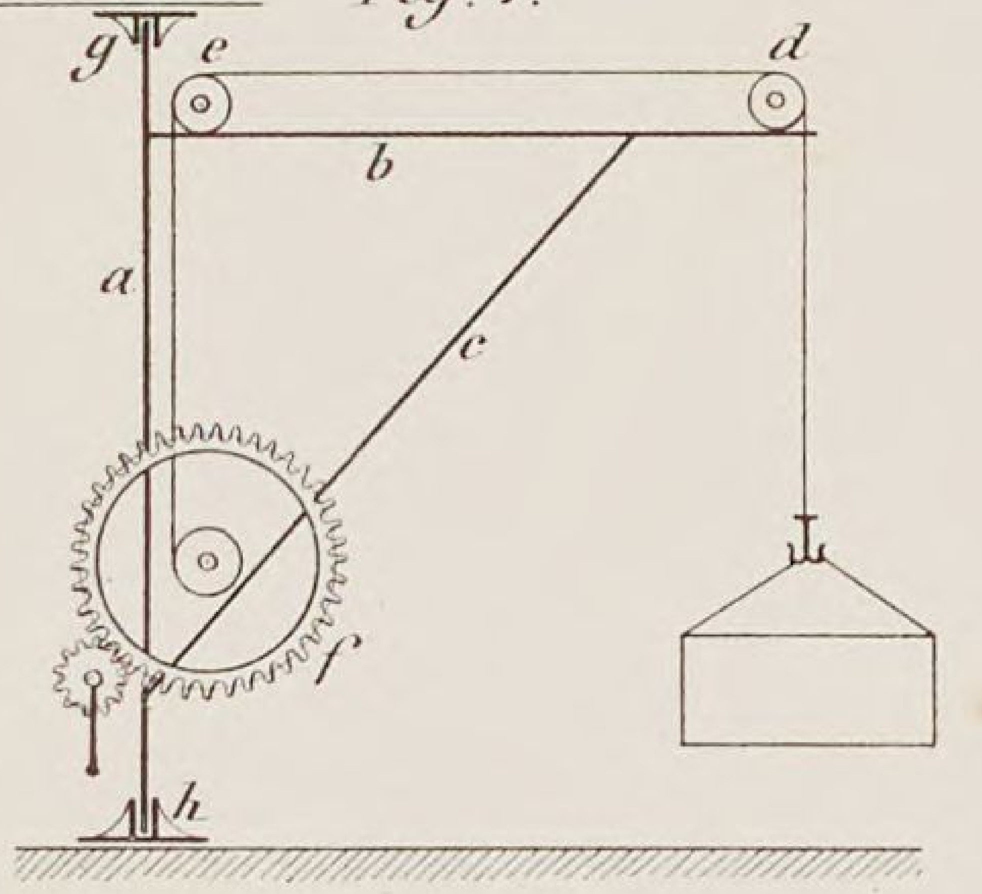


Fig. 1.

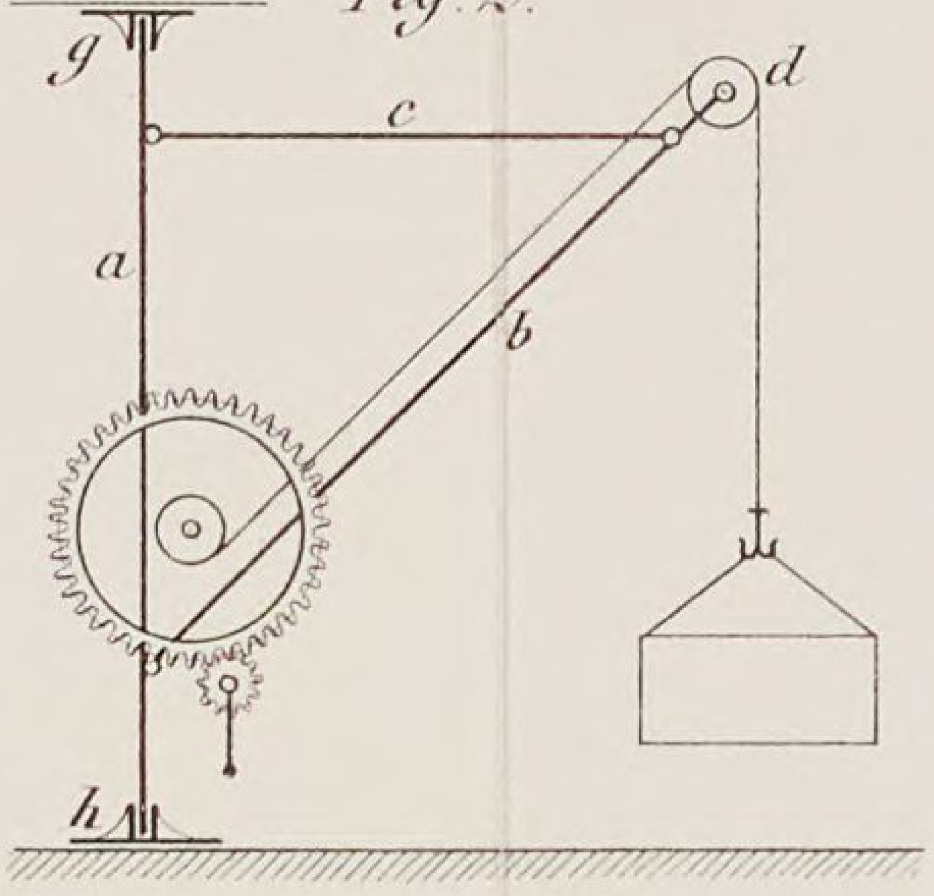
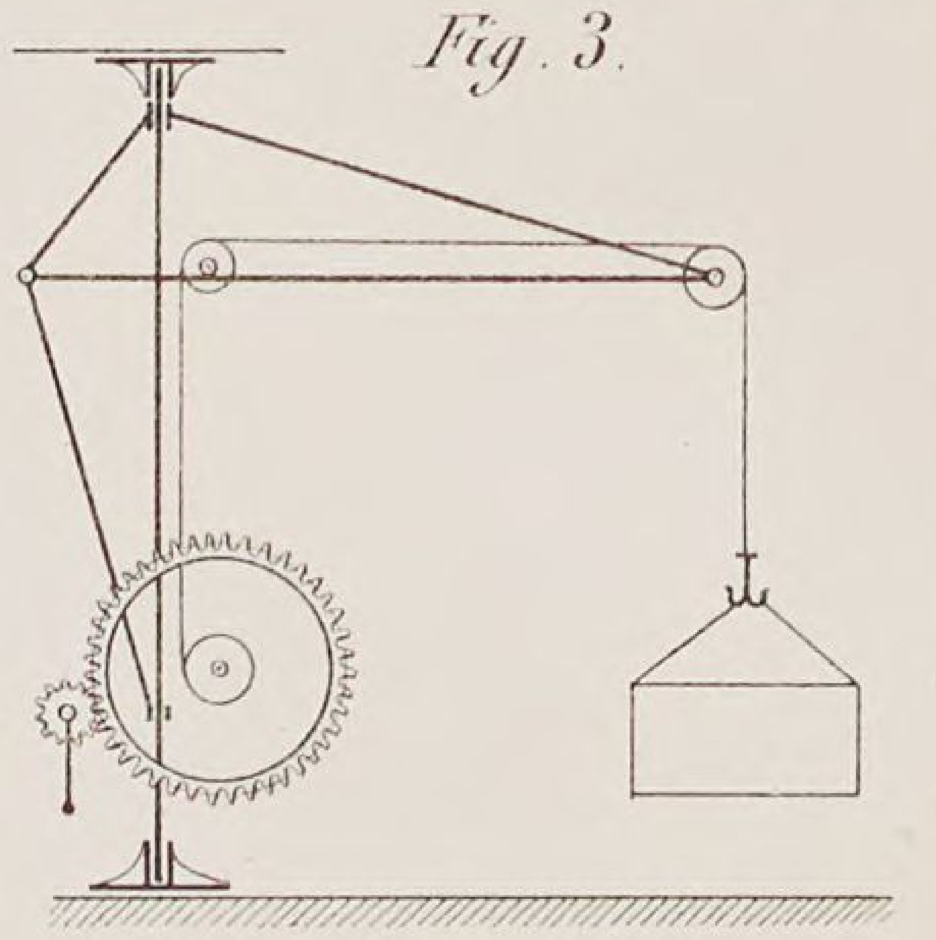
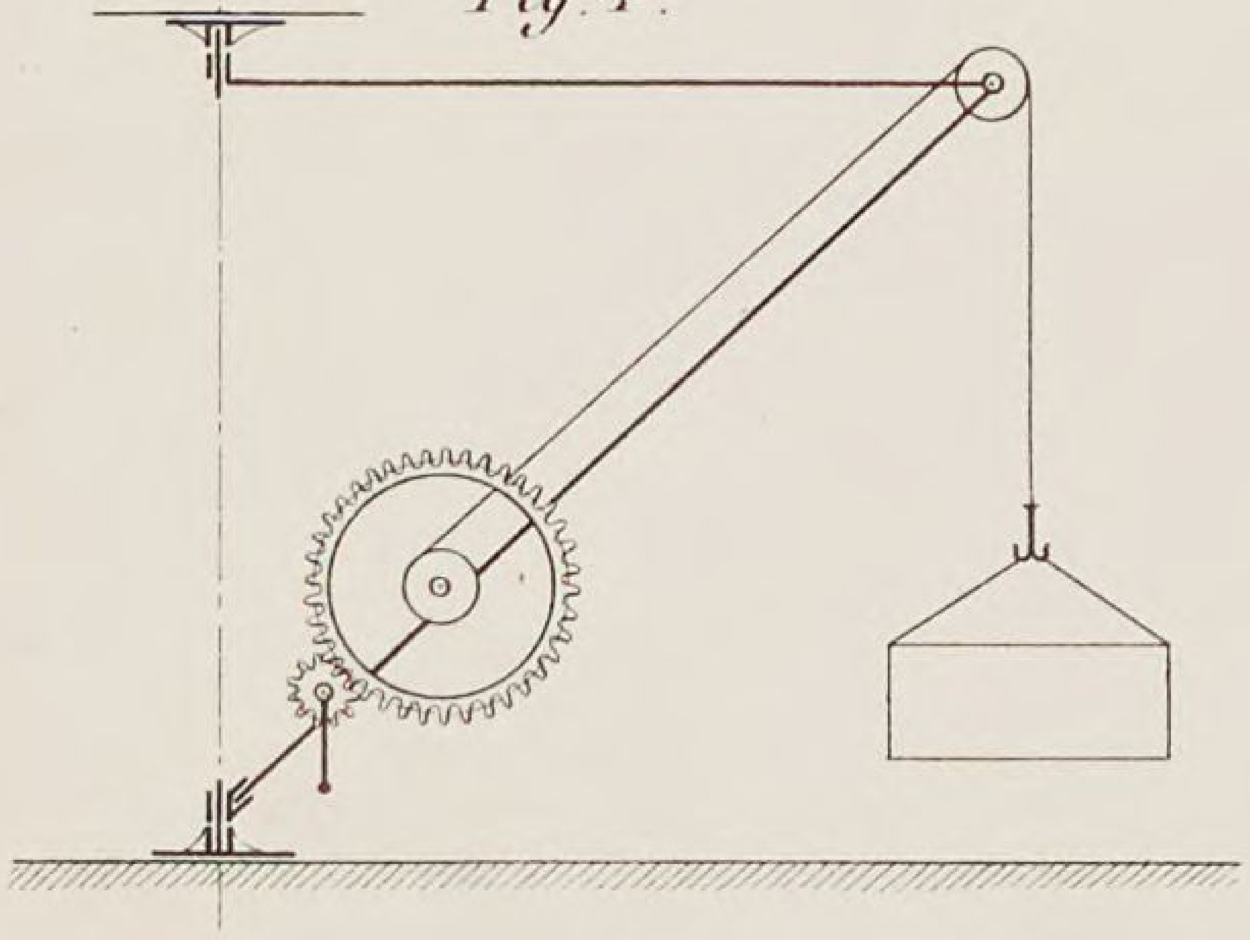
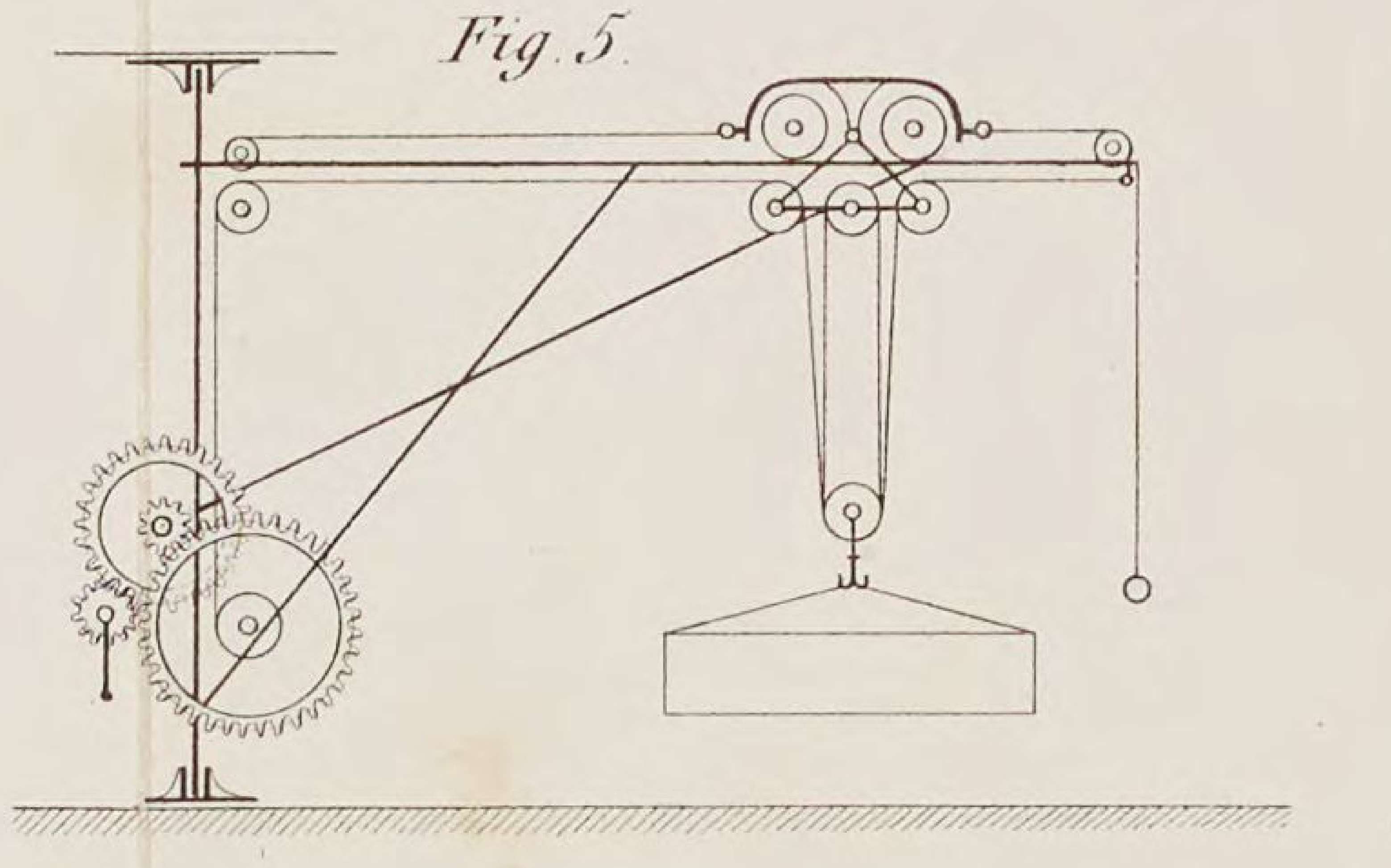


Fig. 2.


Fig. 3.


Fig. 4.


Fig. 5.

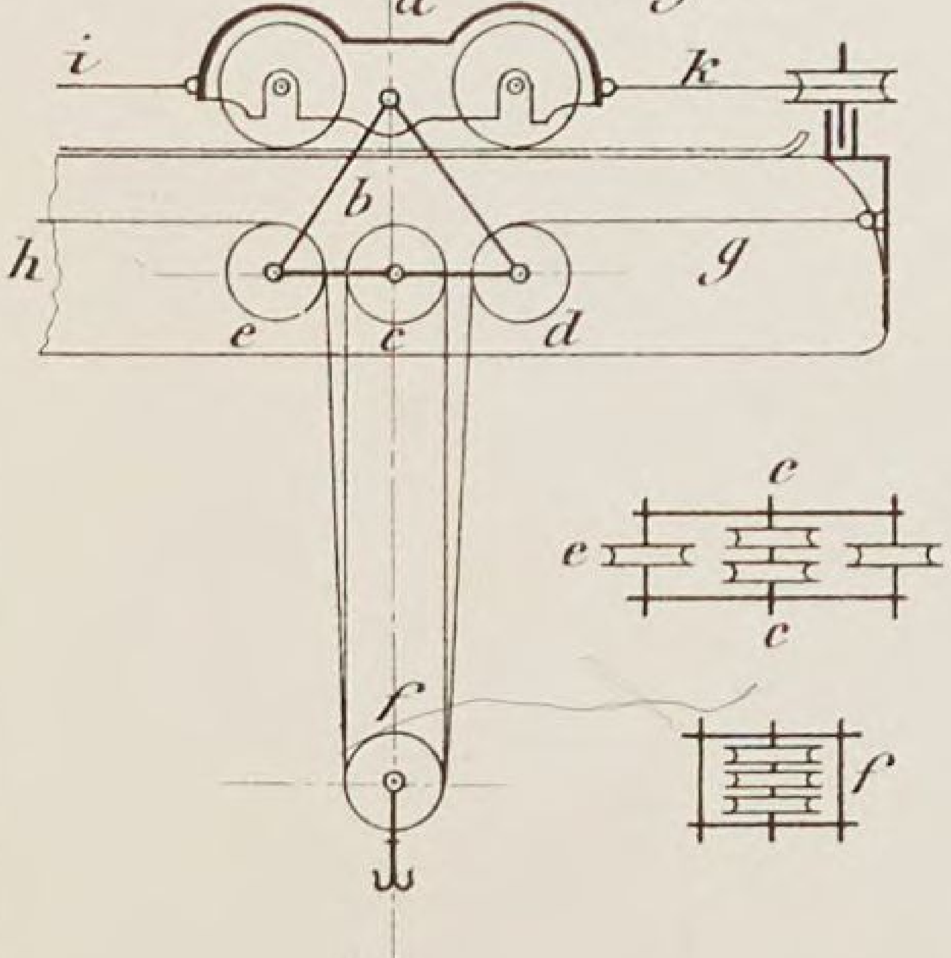
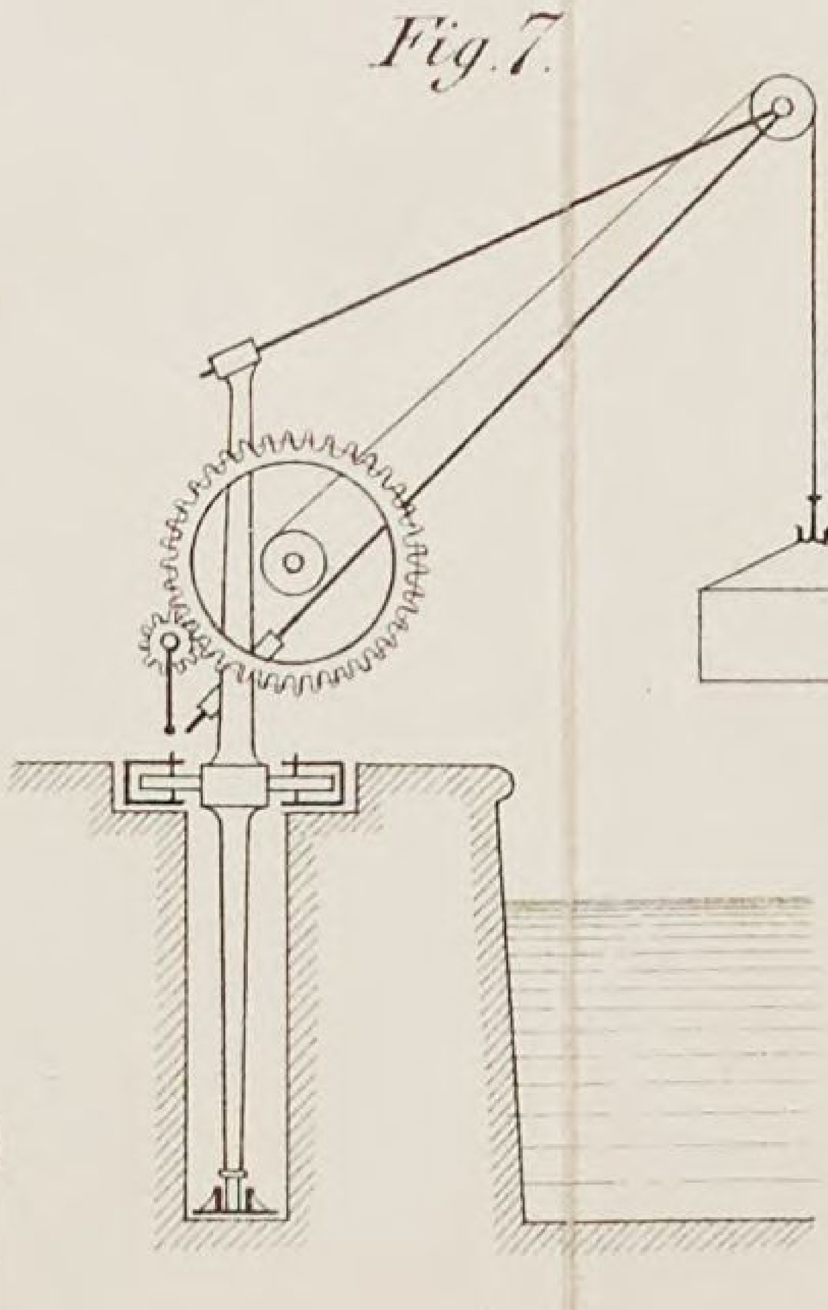


Fig. 6.


Fig. 7.

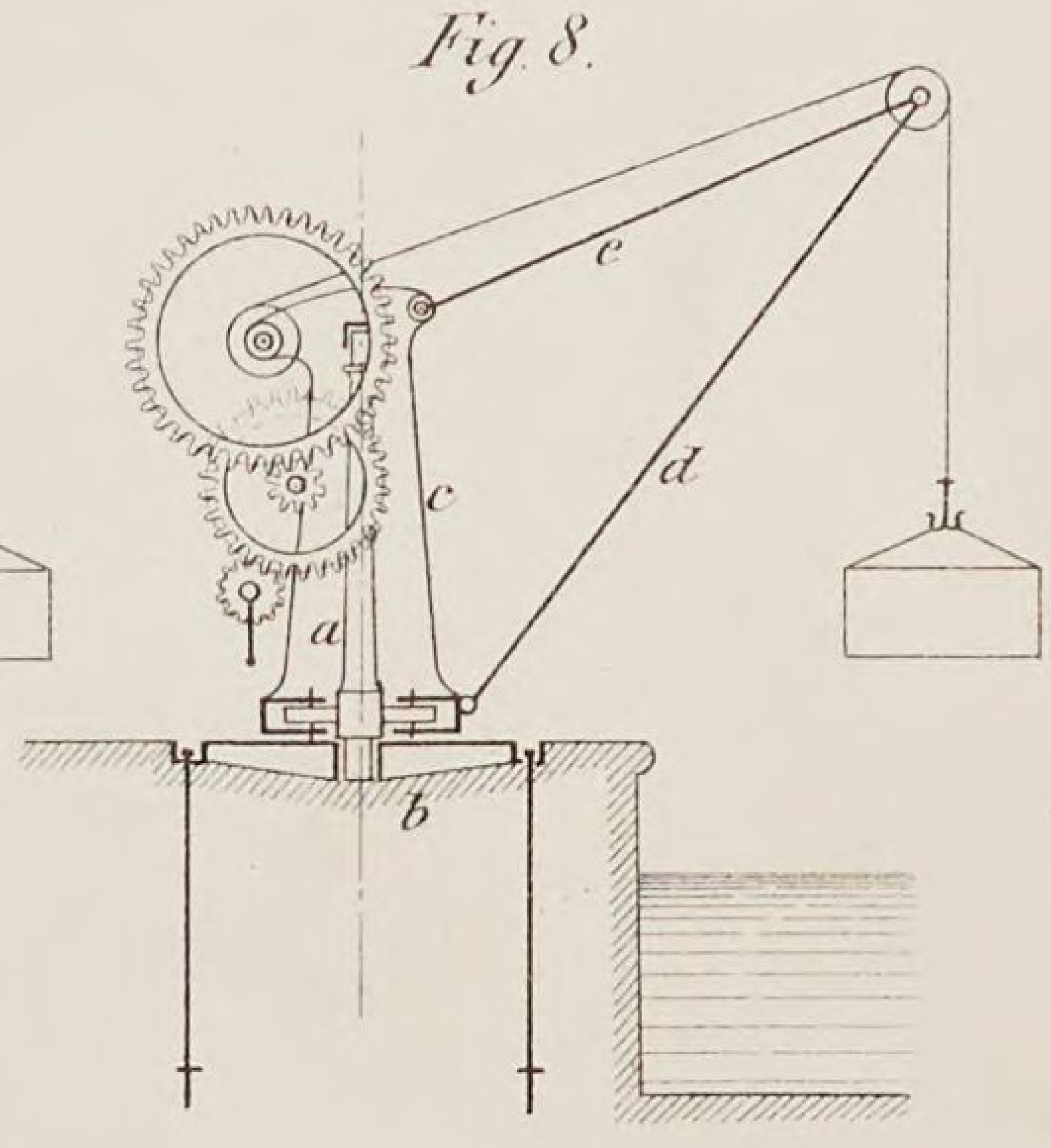


Fig. 8.

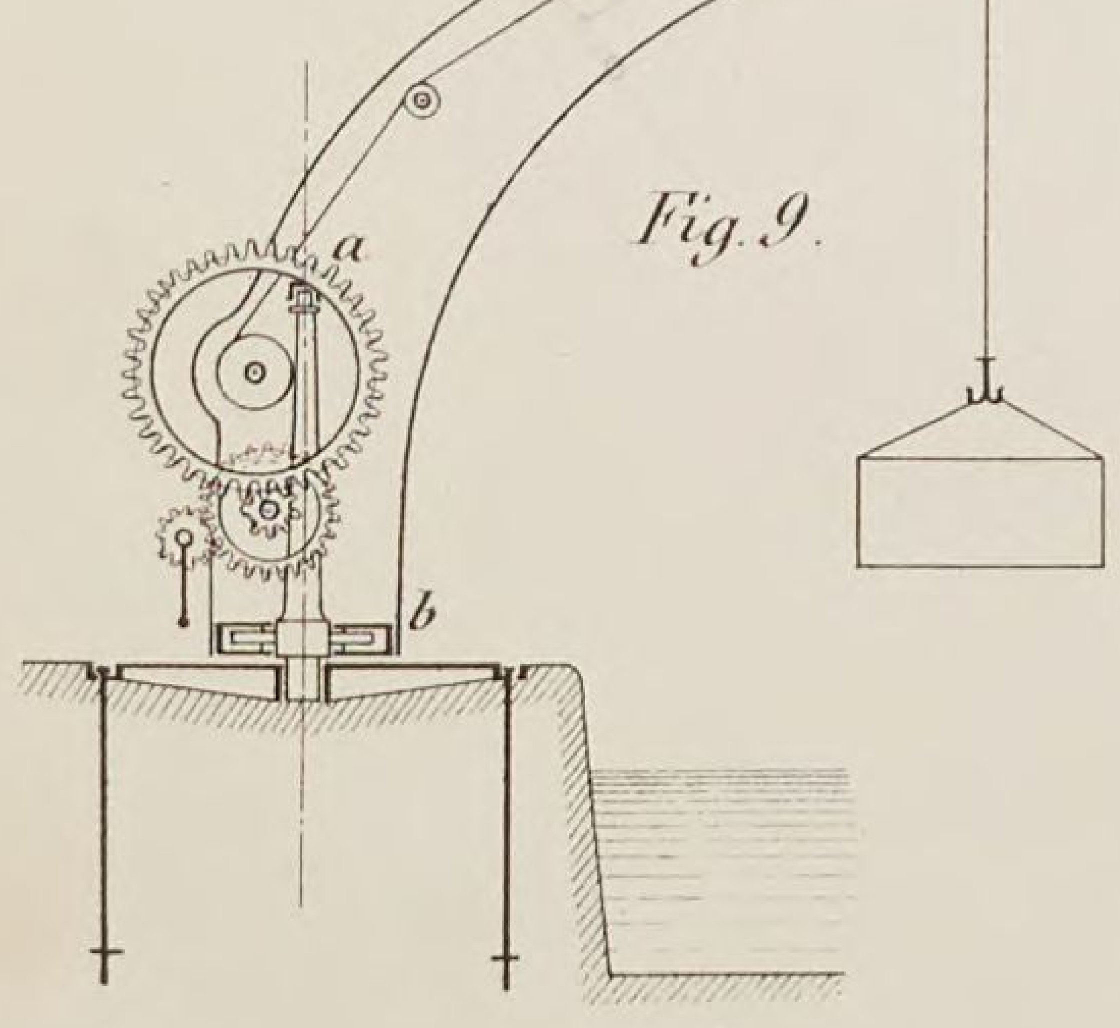


Fig. 9.

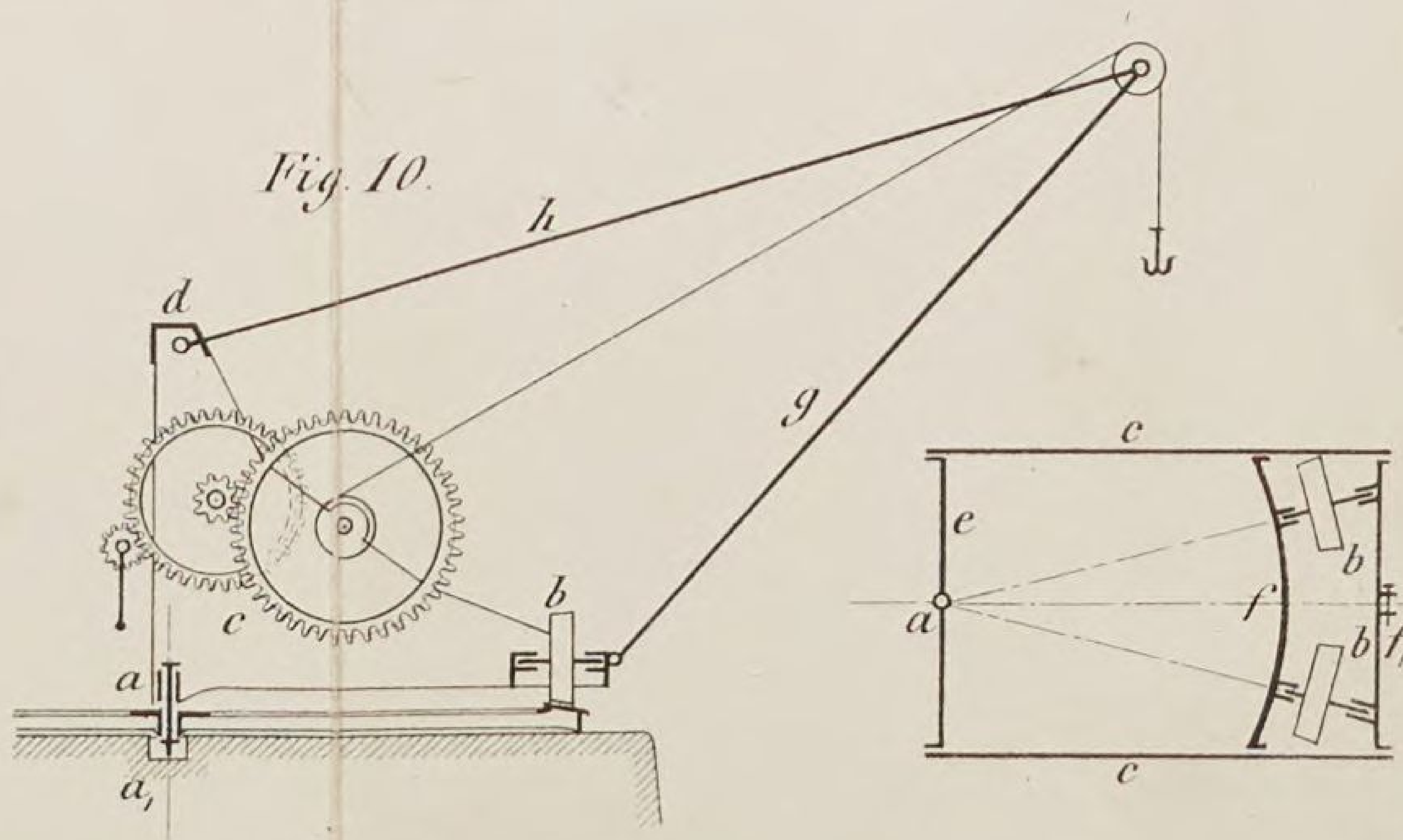


Fig. 10.

Fig. 1.

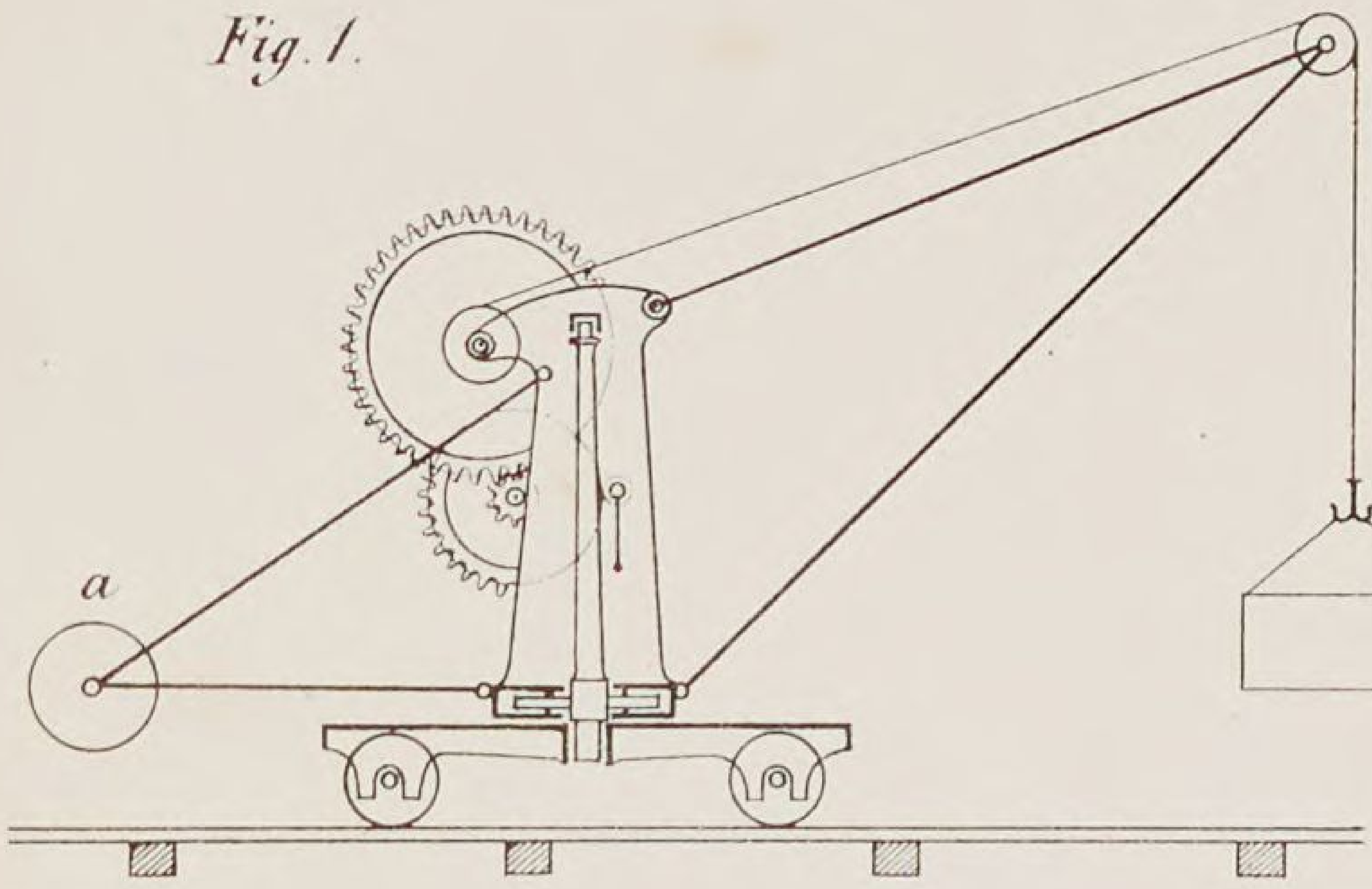


Fig. 2.

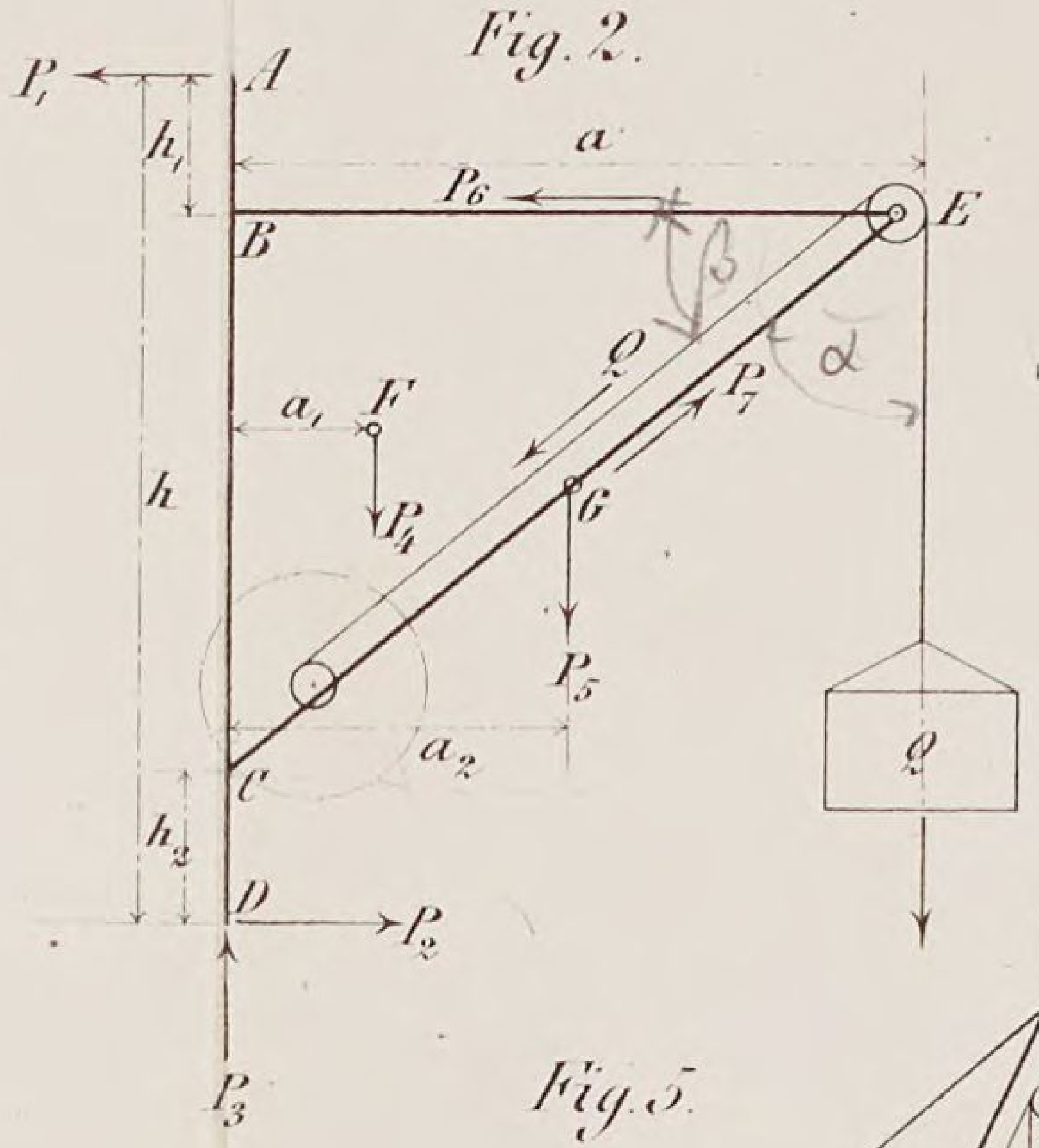


Fig. 3.

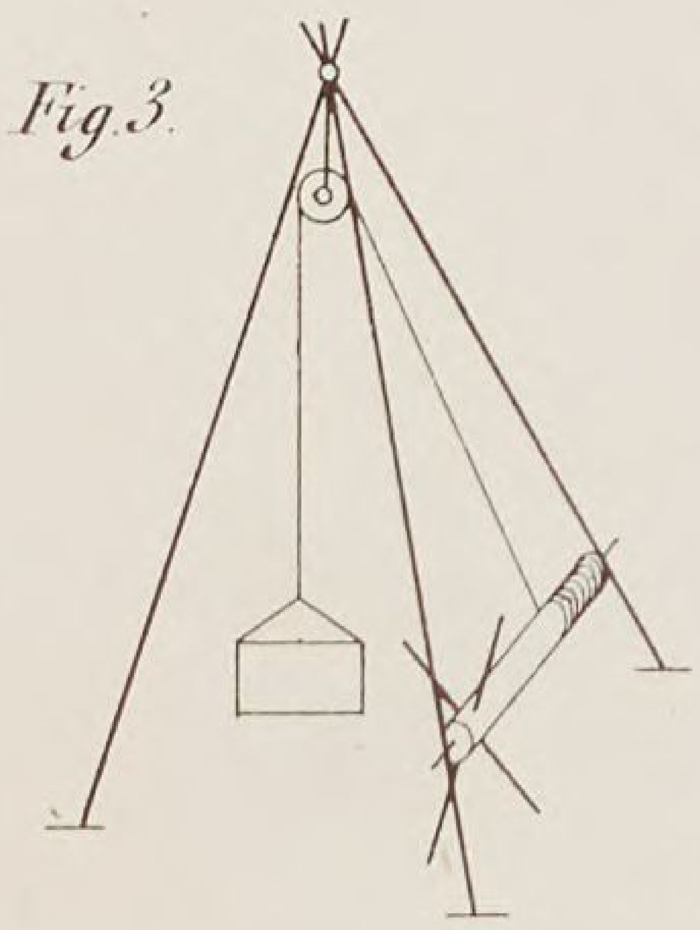


Fig. 4.

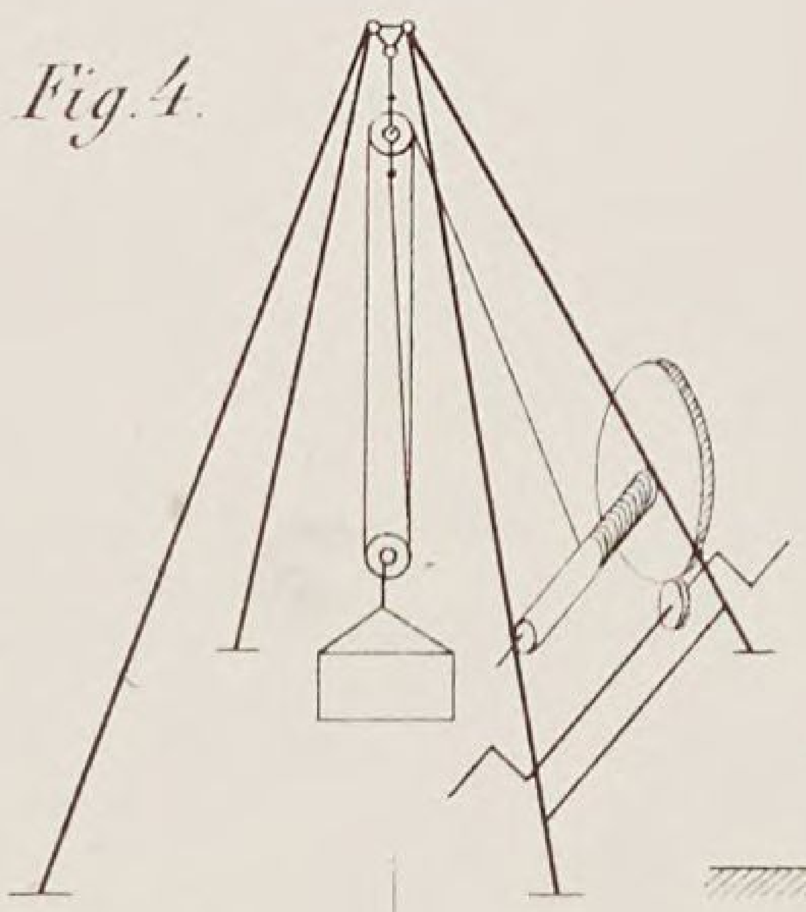


Fig. 5.

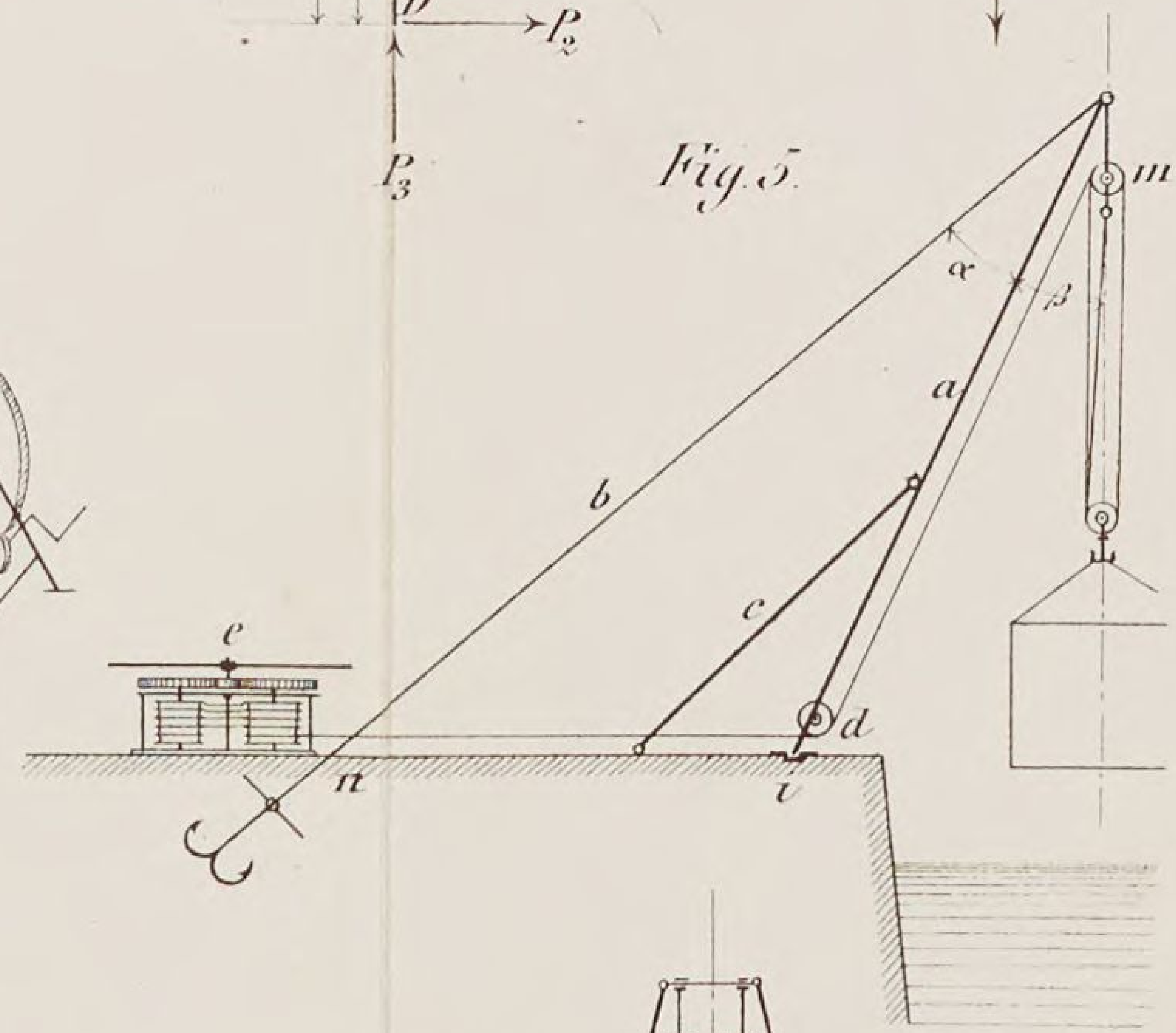


Fig. 7.

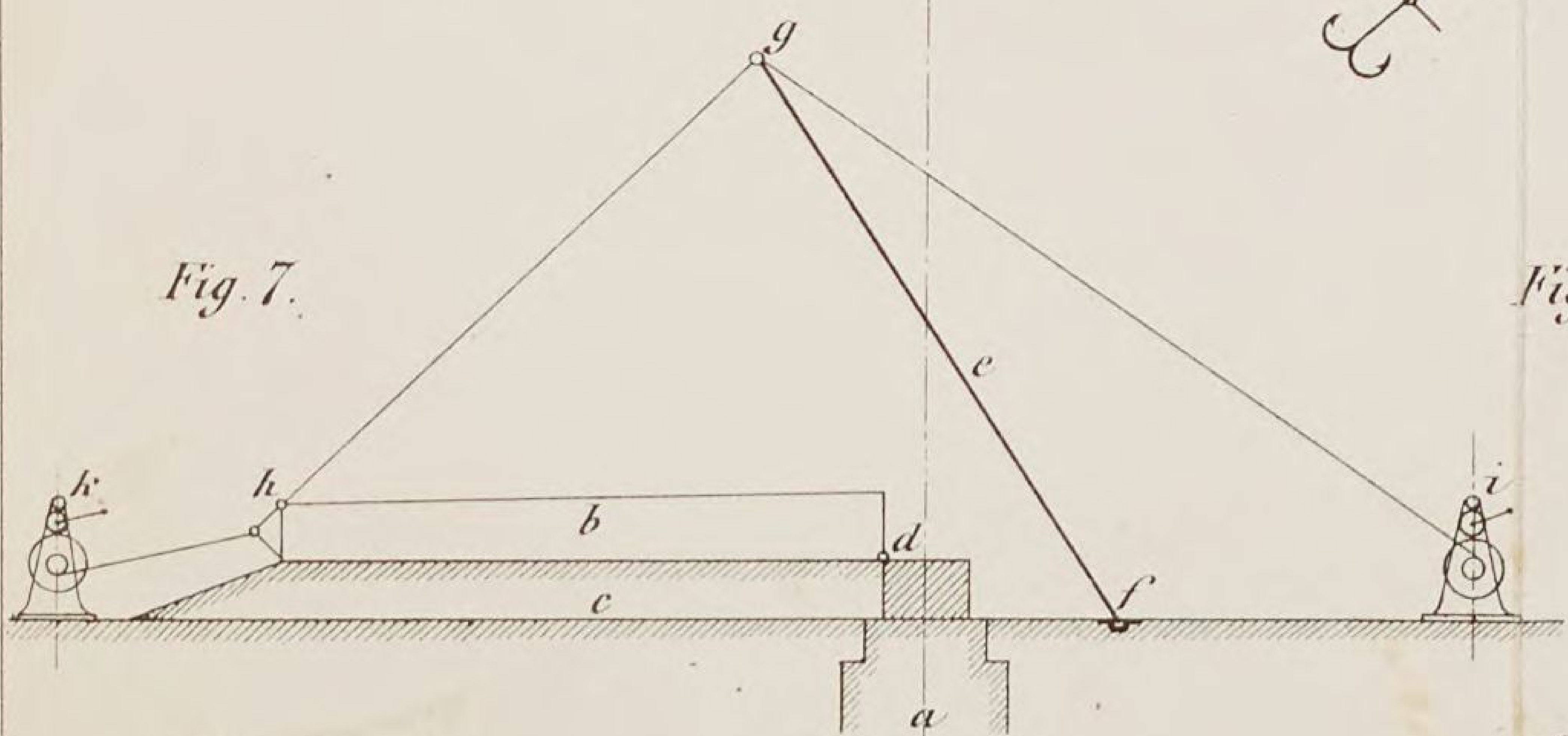


Fig. 6.

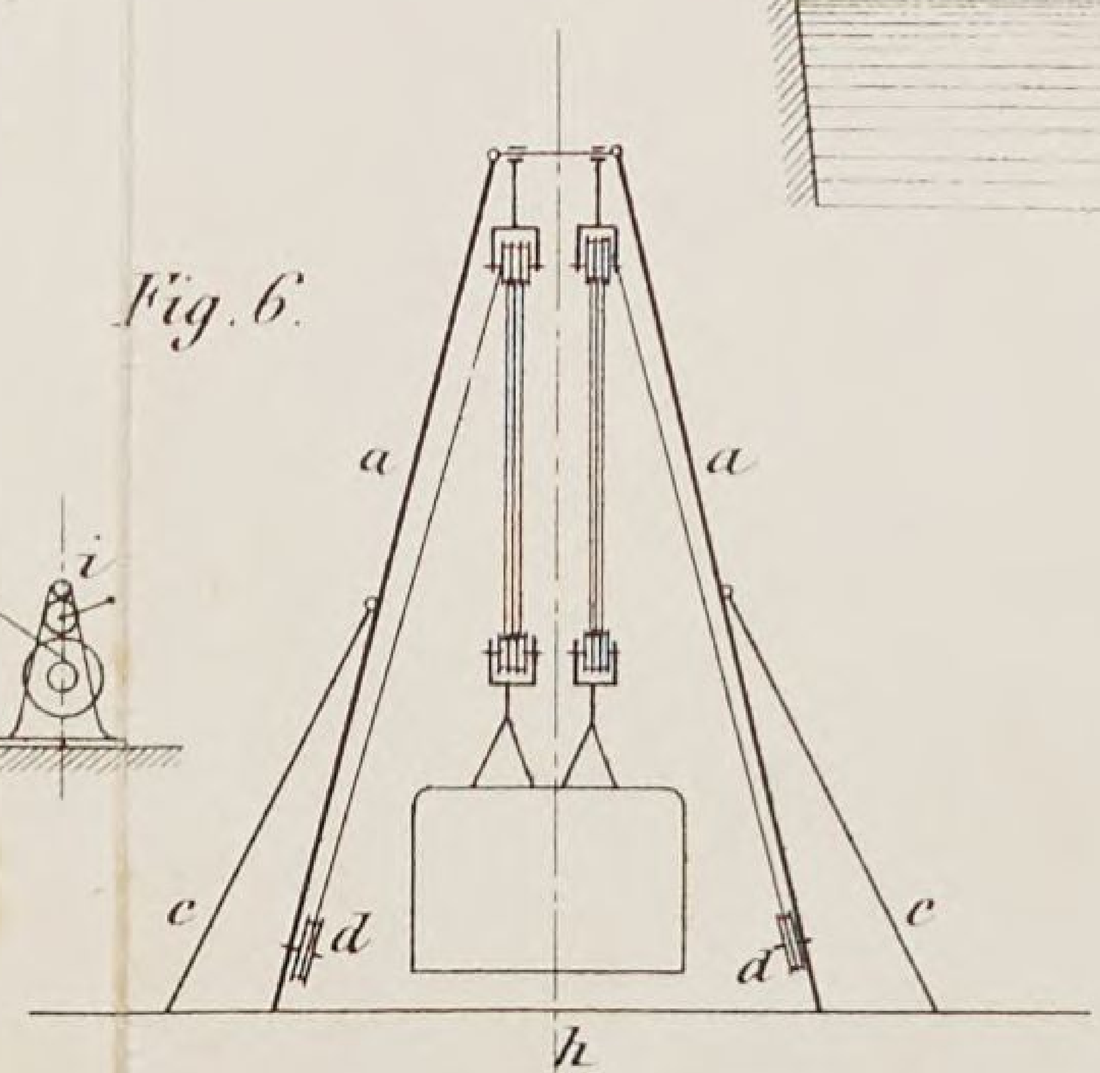


Fig. 8.

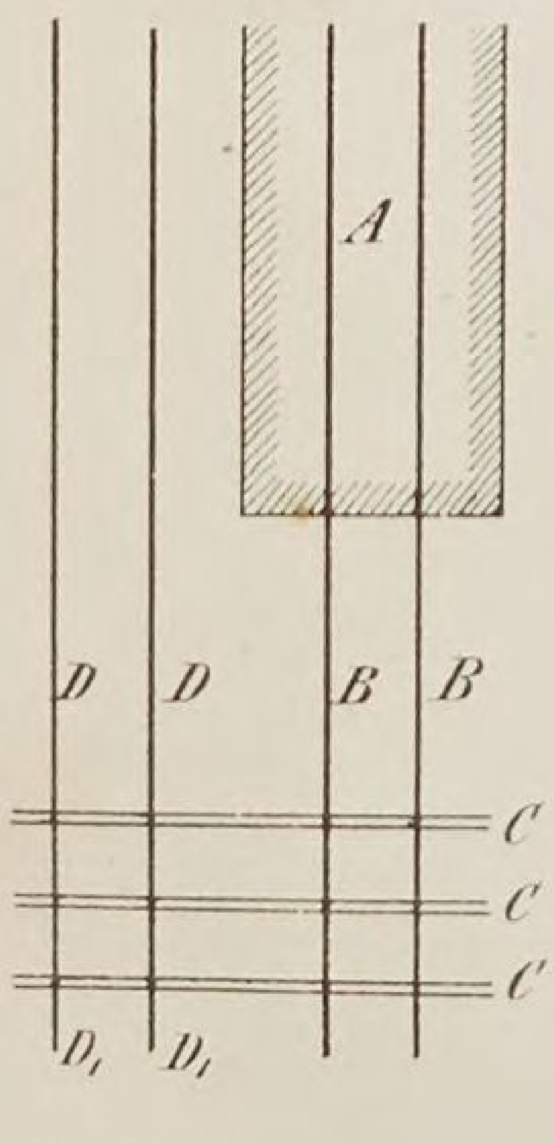


Fig. 10.

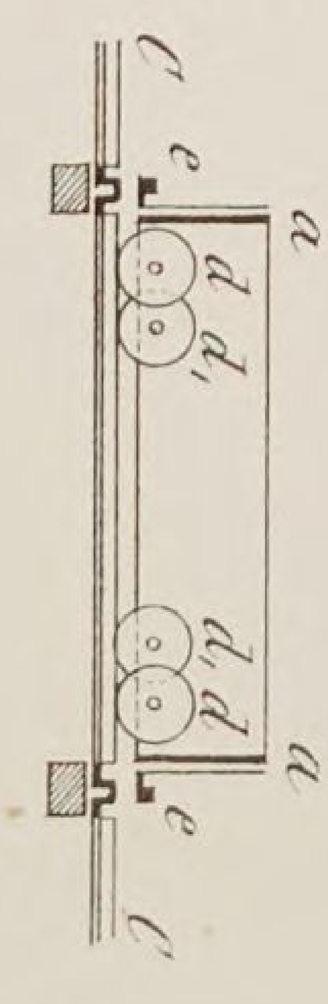


Fig. 9.

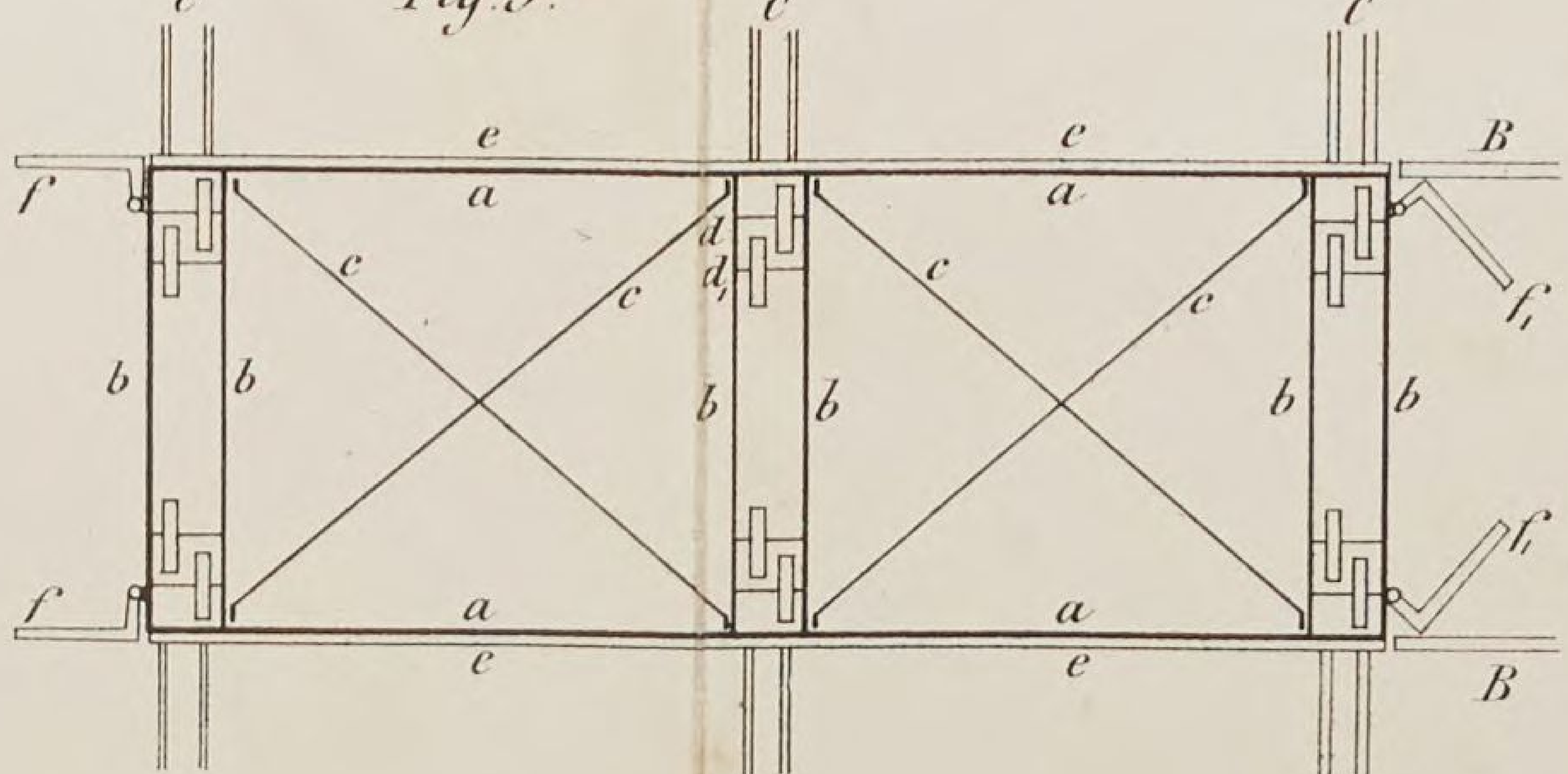


Fig. 1.

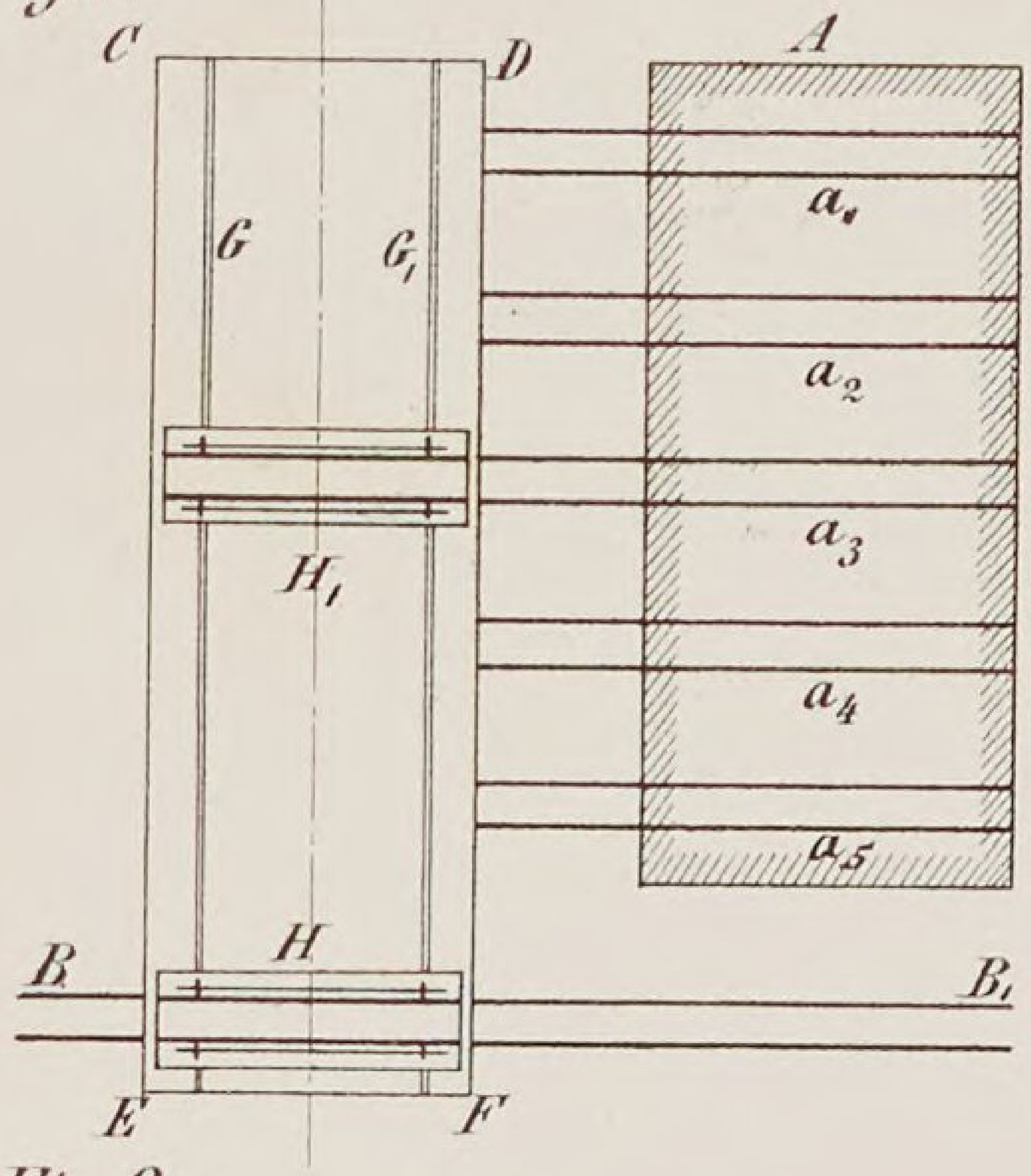


Fig. 2.

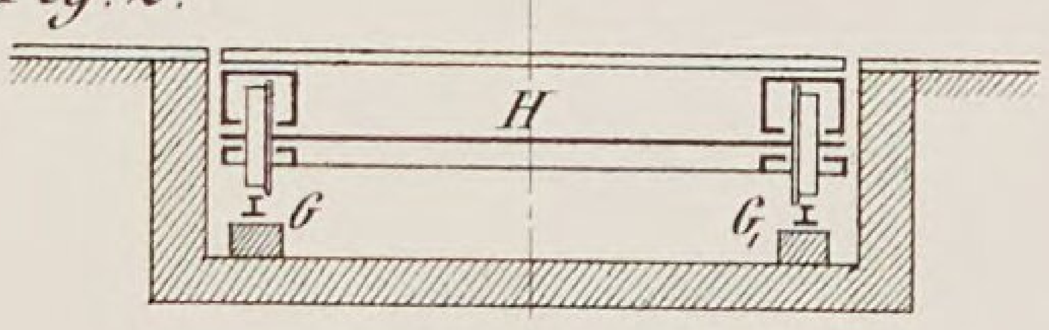


Fig 3

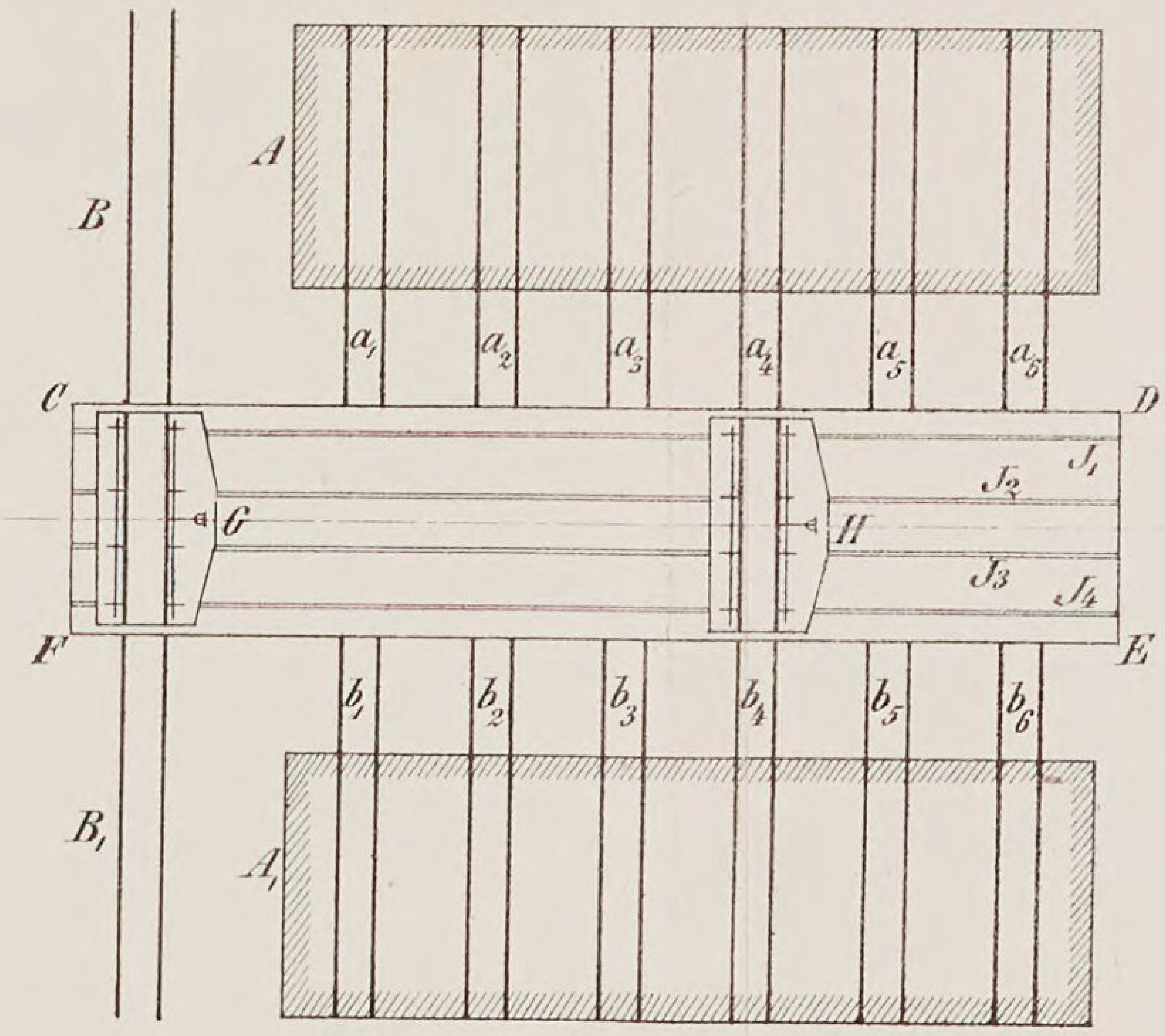


Fig. 4.

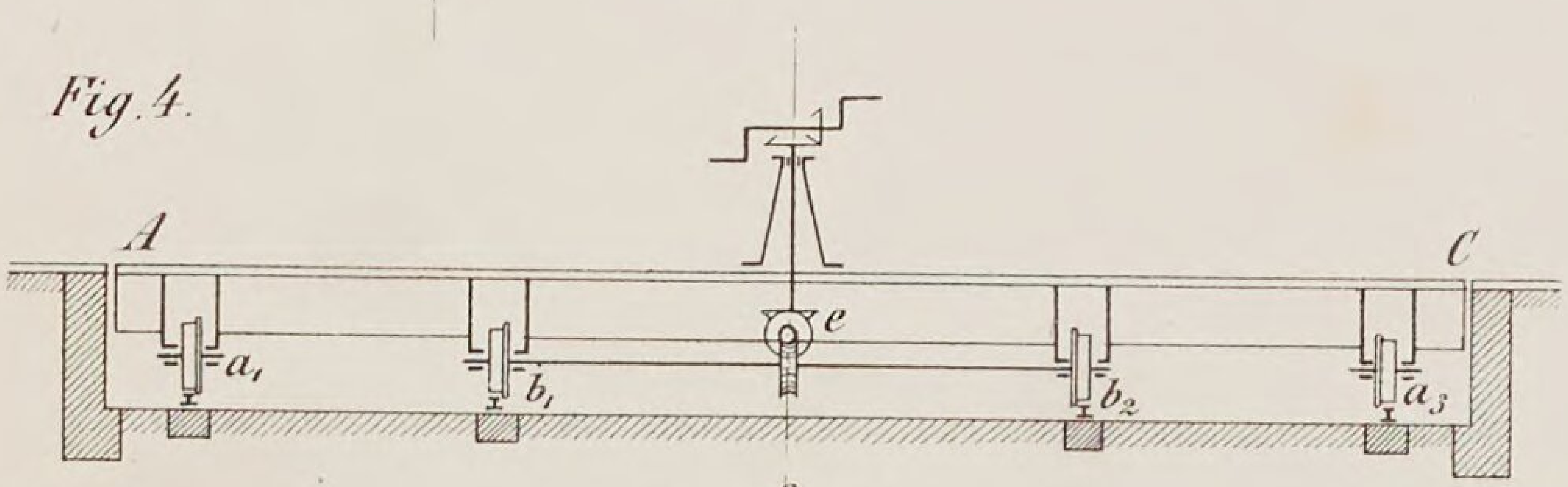


Fig. 5.

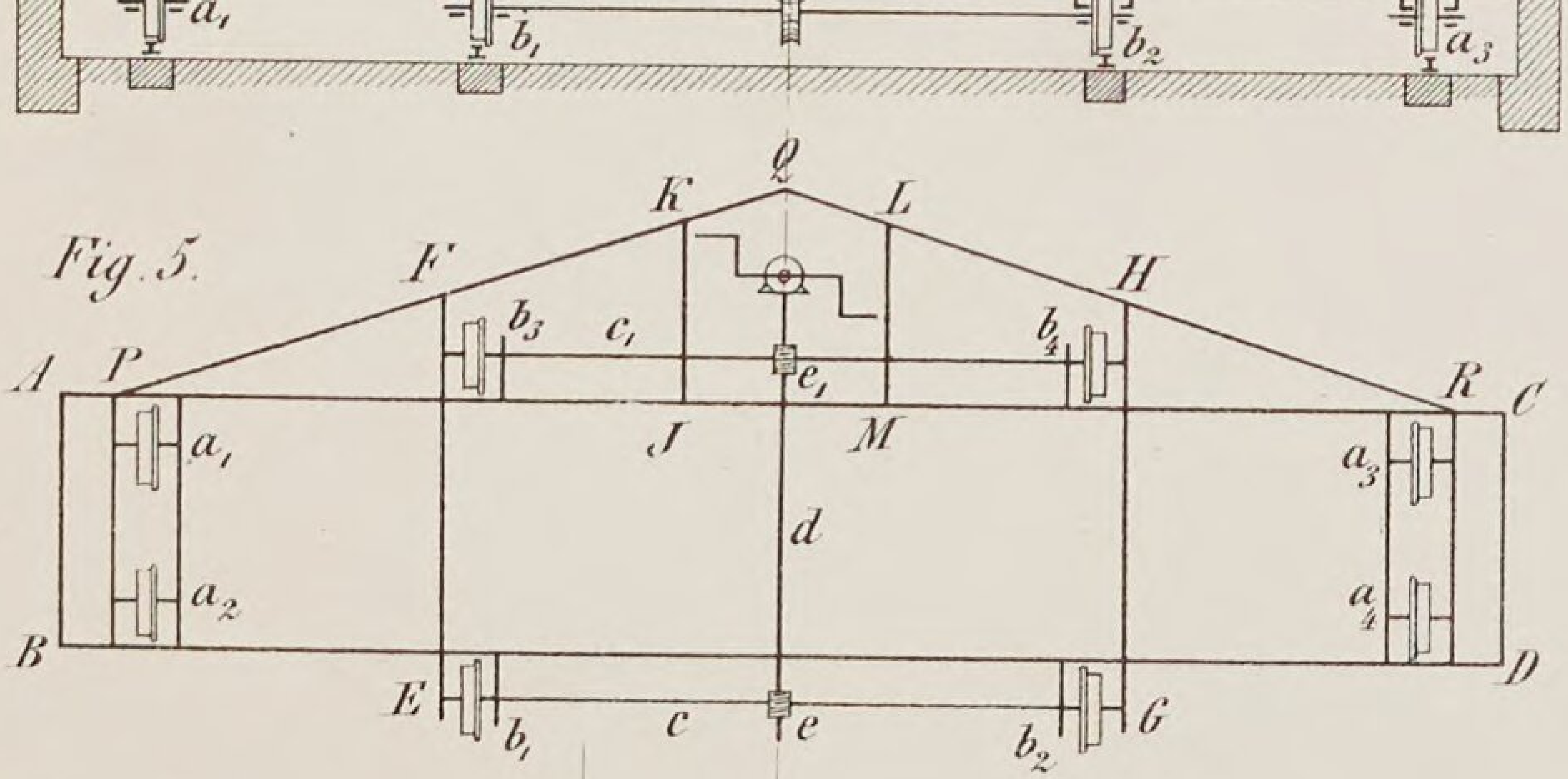


Fig. 8.

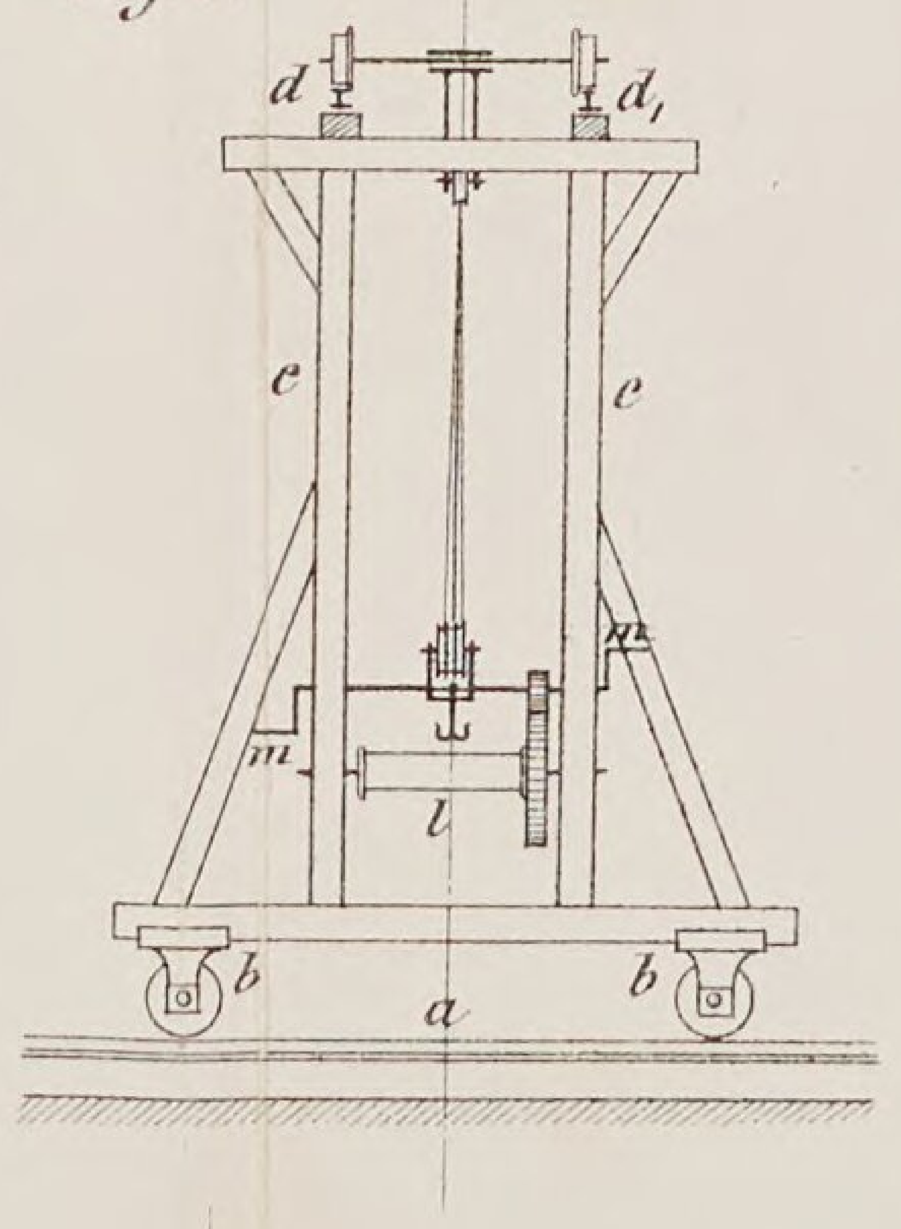


Fig. 6.

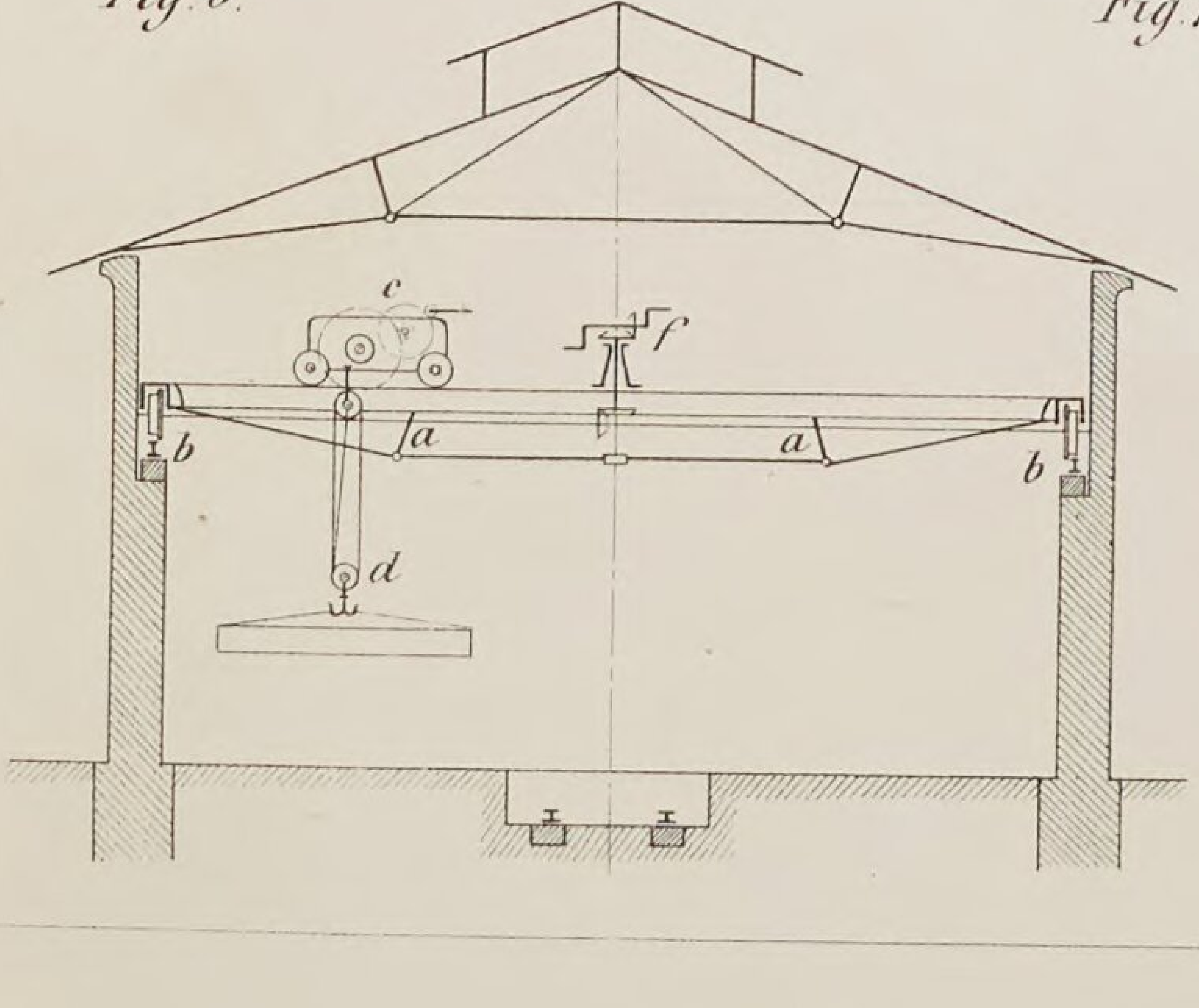
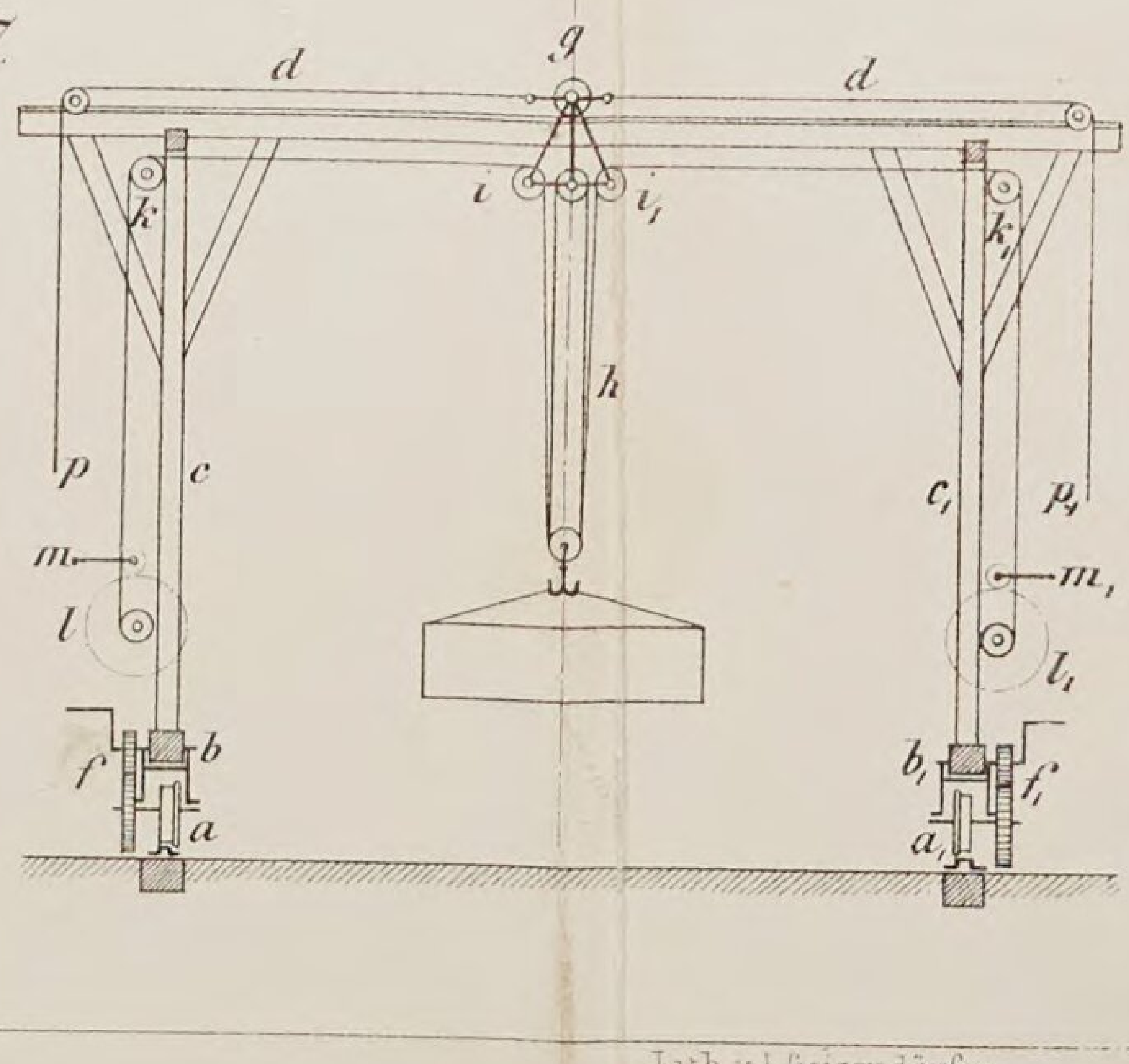


Fig. 7.



Lith. v. L. Geisendörfer.

Fig. 1.

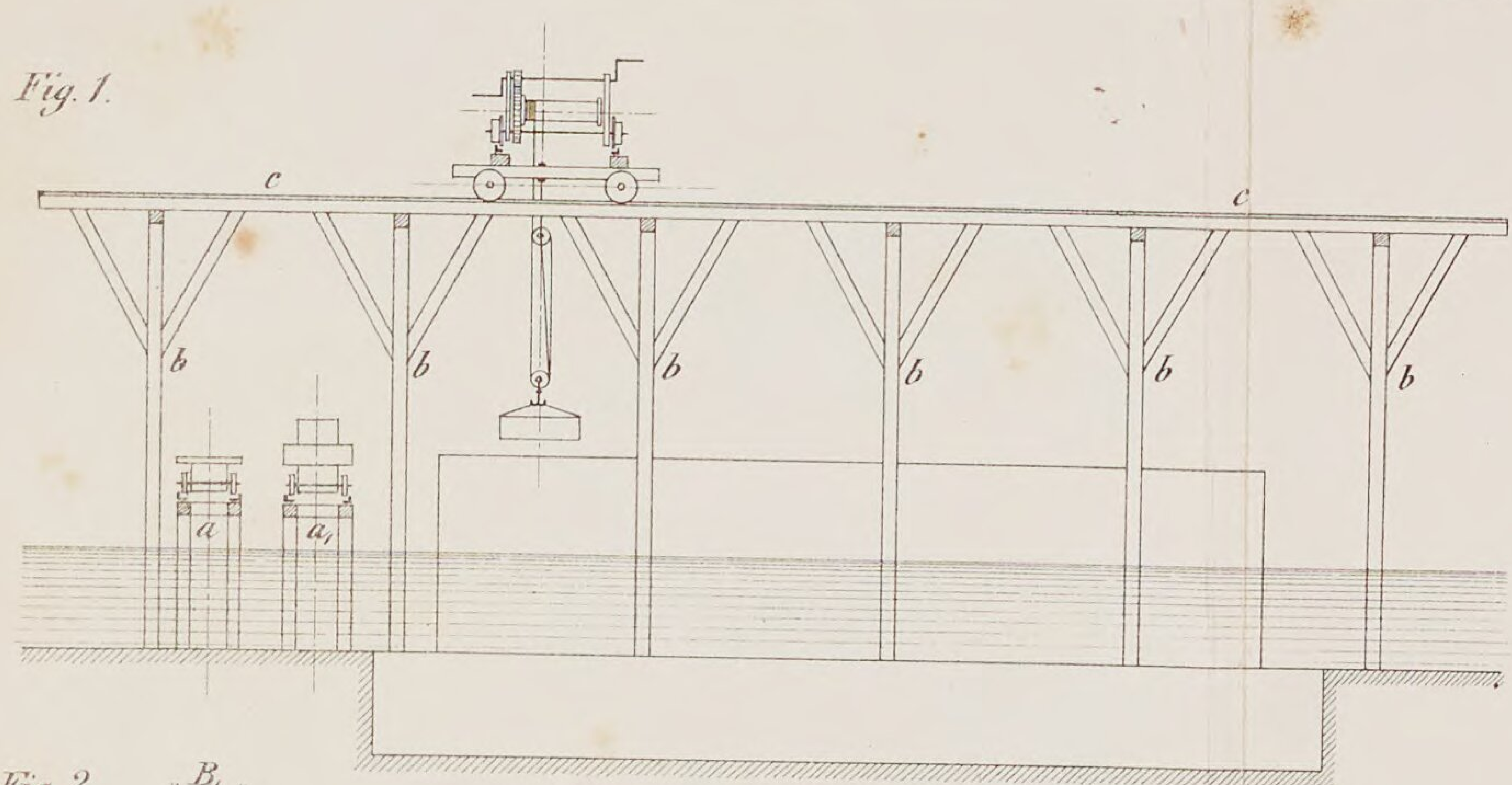


Fig. 2.

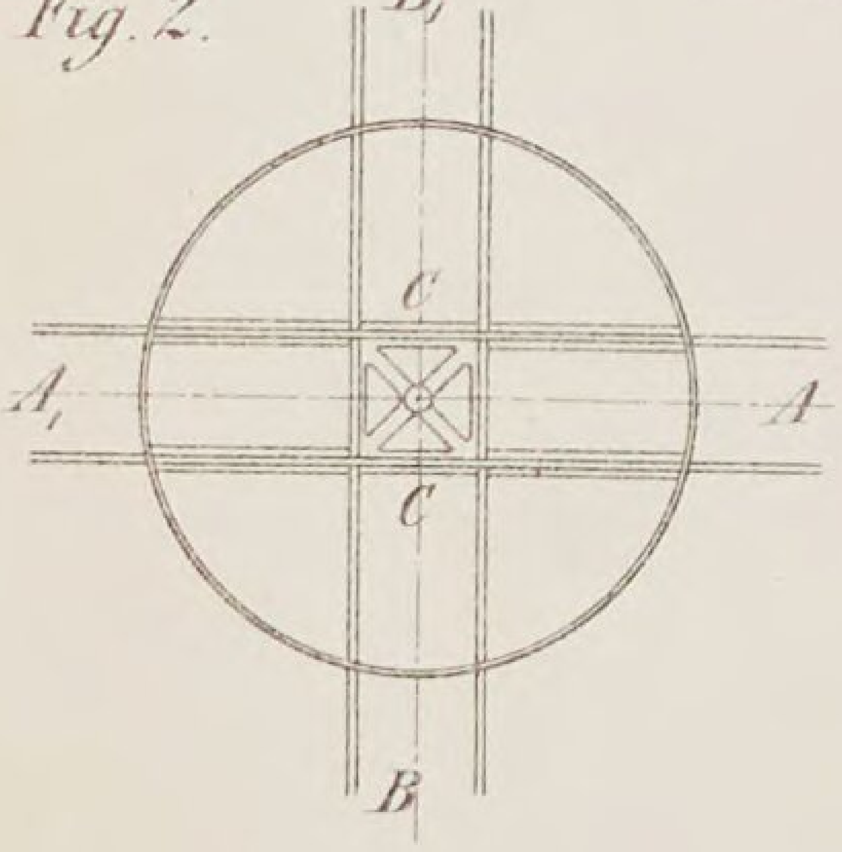


Fig. 3.

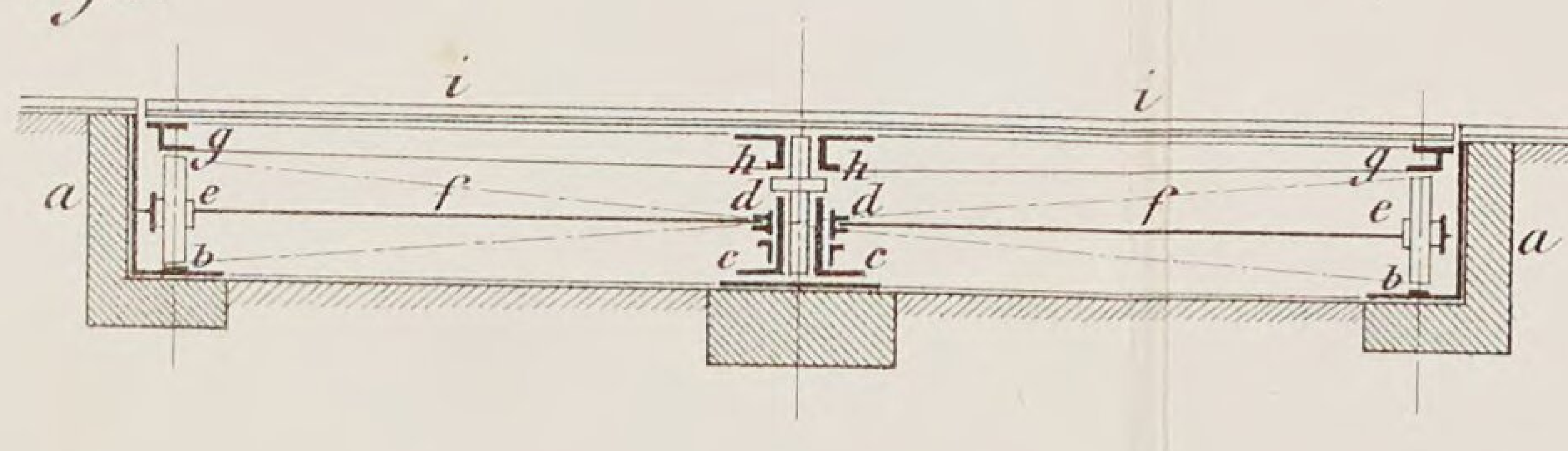


Fig. 4.

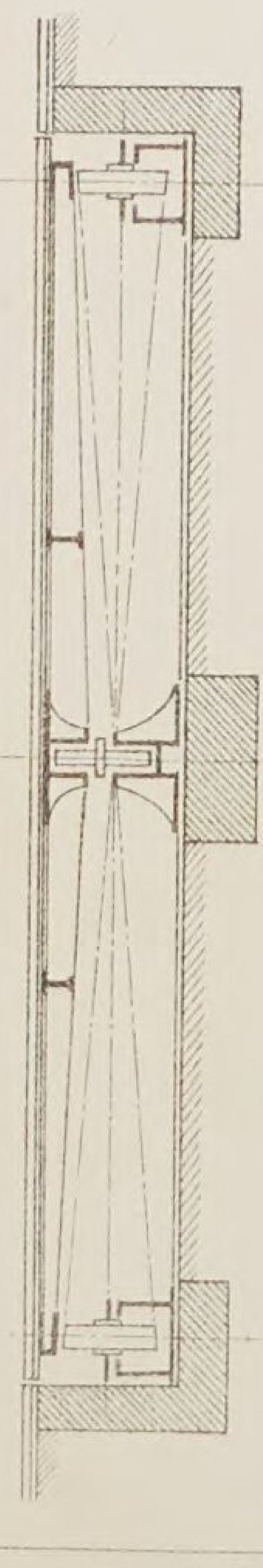
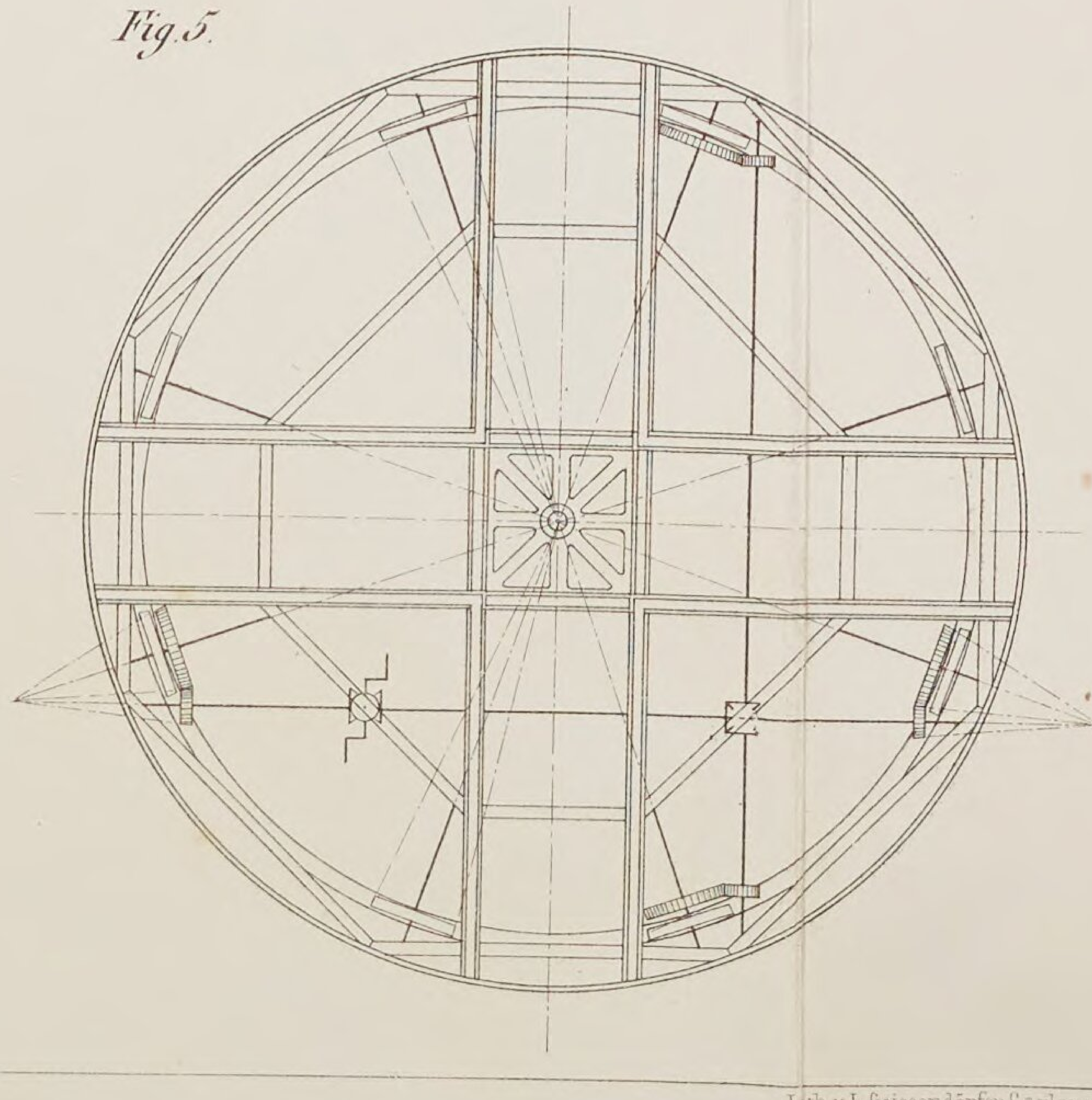


Fig. 5.



Lith. v. L. Geissendörfer, Carlsruhe.

J. 111 ü. d. Handlung
Lbm.

F. X. BEER
kgl. Hofbuchbinder
in
MÜNCHEN
Lederergasse No. 25.

30 Taf.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Redtenbacher, Ferdinand,

Der Maschinenbau

Bd.: 1

Mannheim (1862)

Math.a. 205 ed-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081071-5